КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА

Леоненко Д. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

The axisymmetric forced vibrations of a viscoelastic circular sandwich plate on an elastic foundation are studied. The plate is subjected to axisymmetric loads with frequency equal to one of the natural frequencies of the plate. The foundation reaction is described by the Winkler model. The problem on the viscoelastic plate oscillations was solved by averaging. The numerical results are analyzed.

Введение

Колебания упругих сплошных круговых трехслойных пластин с легким заполнителем на упругом основании изучены в [1]. Здесь рассмотрена поперечно нагруженная вязкоупругая круговая трехслойная пластина на деформируемом основании Пастернака под действием динамических нагрузок.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z. Через h_k обозначена относительная толщина k-го слоя. Для изотропных несущих слоев, толщиной h_1, h_2, приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине заполнитель ($h_3 = 2c$) легкий, т. е. в нем пренебрегается работа напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении. Вертикальная нагрузка $q(r, t)$ распределена по внешней поверхности пластины (рис. 1). На границах слоев перемещения непрерывны. На внешнем контуре пластины радиуса r_1, предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. К внешней

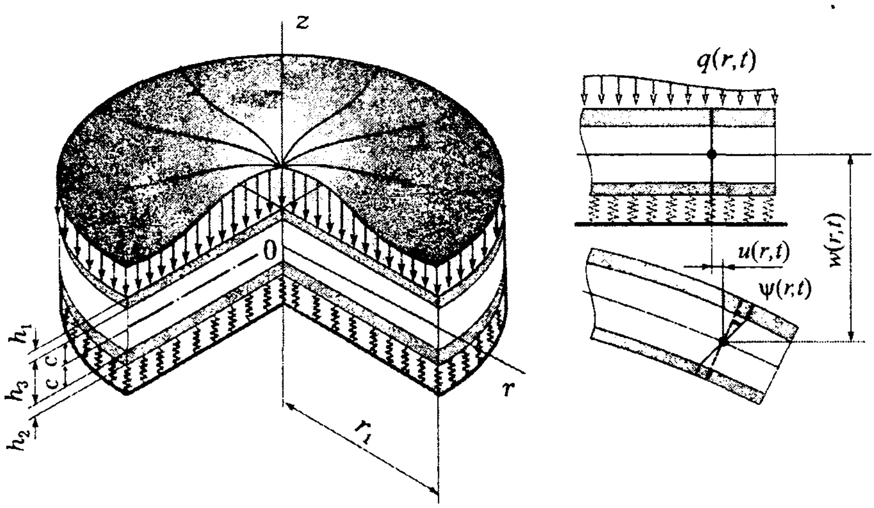

Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины на упругом основании

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ, т. е. $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми.

Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой $q_r = \kappa_0 w$ (κ_0 – коэффициент постели основания).

Физические соотношения для материалов слоев выпишем, используя интегральный оператор линейной вязкоупругости:

$$s^k_{\alpha\beta} = 2G^*_k э^k_{\alpha\beta}, \quad \sigma^k = 3K_k \varepsilon^k, \tag{1}$$

где G_k^* – оператор линейной вязкоупругости

$$G_k^* f(t) \equiv G_k(1-R_k^*)f(t) \equiv G_k\left(f(t)-\int_0^t R_k(t-\tau)f(\tau)d\tau\right),$$

$R_k(t)$ – ядро релаксации материала k-го слоя, G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации, $s_{\alpha\beta}^k, э_{\alpha\beta}^k$ – девиаторы напряжений и деформаций k-го слоя, ε_k – объемная деформация.

Система уравнений поперечных колебаний вязкоупругой пластины следует из уравнений для упругой пластины, рассмотренной в [1], если в коэффициентах a_m (m = 1, ..., 6) модули сдвига G_k формально заменить операторами линейной вязкоупругости G_k^* (1):

$$L_2(a_1^*u + a_2^*\psi - a_3^*w,_r) = 0, \quad L_2(a_2^*u + a_4^*\psi - a_5^*w,_r) = 0,$$

$$L_3(a_3^*u + a_5^*\psi - a_6^*w,_r) - M_0\ddot{w} - \kappa_0 w = -q, \qquad (2)$$

где

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}, \mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(r\mathrm{L}_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

В качестве начальных примем следующие условия

$$w(r,0) \equiv f(r), \qquad \dot{w}(r,0) \equiv g(r).$$

Если контур пластины защемлен, то при $r = r_1$ должны выполняться граничные условия

$$u = \psi = w = w,_r = 0.$$

При шарнирном опирании контура пластины и наличии на нем жесткой диафрагмы должны выполняться требования:

$$u = \psi = w = M_r = 0.$$

Решение задачи

Для решения применим *метод усреднений* в динамических задачах линейной вязкоупругости [2]. Система уравнений (2) является интегро-дифференциальной. Для ее упрощения введем гипотезу о подобии ядер релаксации материалов слоев:

$$R_k(t) = l_k R_3(t), \quad l_k = \text{const}, \quad 0 \le \int_0^t R_3(\tau)d\tau << 1, \quad R_3(\tau) \ge 0. \qquad (3)$$

То есть здесь предполагается, что ядра релаксации материалов слоев выражаются через ядро релаксации заполнителя, которое в дальнейшем принимается пропорциональным некоторому малому положительному параметру. Для многих конструкционных материалов эта гипотеза выполняется.

Распределенная нагрузка $q(r, t)$ считается малой и записывается в виде разложения в ряд по фундаментальной ортонормированной системе собственных функций v_n:

$$q(r, t) = \varepsilon_1 M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \qquad (4)$$

где ε_1 – некоторый малый параметр;

$$v(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n}\left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r)\right],$$

$J_n(r)$, $I_n(r)$ – функции Бесселя [3].

Операторы линейной вязкоупругости a_m^* в (2) представляем в виде

$$a_m^* = a_m - a_m' R_3^*, \quad (m = 1, \ldots, 6), \tag{5}$$

где для коэффициентов a_m и a_m' справедливы соотношения:

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad K_k^+ \equiv K_k + \tfrac{4}{3} G_k,$$

$$a_3 = h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+, \quad a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \tfrac{2}{3} c K_3^+\right),$$

$$a_5 = c\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \tfrac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^2 K_3^+\right],$$

$$a_6 = h_1\left(c^2 + c h_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + c h_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \tfrac{2}{3}c^3 K_3^+,$$

$$a_1' = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{3} l_k G_{k0}, \quad a_2' = \frac{4}{3}c(l_1 G_{10} - l_2 G_{20}), \quad a_3' = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{2} l_k G_{k1},$$

$$a_4' = \frac{4}{3}(G_{32} + c^2(l_1 G_{10} + l_2 G_{20})), \; a_5' = \frac{4}{3}(G_{32} + c(l_1 G_{11} - l_2 G_{21})),$$

$$a_6' = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{3} l_k G_{k2}, \quad G_{kn} = \int_{h_k} G_k z^n dz, \quad (n = 0, 1, 2).$$

Решение системы трех интегро-дифференциальных уравнений (2), с учетом условий (3)–(5) будем искать в виде

$$u(r,t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi(r,t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad w(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t). \tag{6}$$

где координатные функции $\varphi_n(r)$

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n}\left[J_1(\lambda_n r_1)\frac{r}{r_1} - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}\left(I_1(\lambda_n r_1)\frac{r}{r_1} - I_1(\lambda_n r)\right)\right].$$

Подстановка выражений (4)–(6) в третье уравнение системы (2) приводит к уравнению относительно неизвестной функции времени $T_n(t)$:

$$L_3(b_1 a_3 \varphi_n + b_2 a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r}) T_n - \kappa_0 v_n T_n - M_0 v_n \ddot{T}_n =$$

$$= -\varepsilon_1 M_0 v_n q_n + L_3(b_1 a_3' \varphi_n + b_2 a_5' \varphi_n - a_6' v_{n,r}) R_3^* T_n,$$

$$R_3^* T_n \equiv \int_0^t R_3(t-\tau) T_n(\tau) d\tau. \tag{7}$$

Преобразуем уравнение (7) к следующему виду

$$\frac{L_3(b_1 a_3 \varphi_n + b_2 a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r})}{v_n} - \frac{\kappa_0 T_n + M_0 \ddot{T}_n - \varepsilon_1 M_0 q_n}{T_n} =$$

$$= \frac{L_3(b_1 a_3' \varphi_n + b_2 a_5' \varphi_n - a_6' v_{n,r}) R_3^*}{v_n}. \tag{8}$$

Так как функции v_n являются собственными, то для них справедливо соотношение, следующее из решения динамической задачи теории упругости:

$$\frac{L_3(b_1a_3\varphi_n+b_2a_5\varphi_n-a_6v_{n,r})}{v_n}=\frac{\kappa_0T_n+M_0\ddot{T}_n}{T_n}=-M_0\left(\omega_n^2-\frac{\kappa_0}{M_0}\right), \tag{9}$$

где ω_n – частоты собственных колебаний, определяемые через собственные числа λ_n;

$$\omega_n^2=\frac{(a_1a_6-a_3^2)(a_1a_4-a_2^2)-(a_1a_5-a_2a_3)^2}{a_1(a_1a_4-a_2^2)M_0}\left(\lambda_n^4+\kappa^4\right).$$

Подставив выражение (9) в (8), получаем

$$\frac{L_3(b_1a_3'\varphi_n+b_2a_5'\varphi_n-a_6'v_{n,r})}{v_n}=-\frac{M_0\omega_n^2T_n+M_0\ddot{T}_n-\varepsilon_1M_0q_n}{R_3^*T_n}=-M_0\omega_n'^2. \tag{10}$$

Величины типа частот ω_n' определяются через обобщенные собственные числа λ_n для упругой пластины по формуле

$$\omega_n'^2=\frac{a_6'-a_3'b_1-a_5'b_2}{M_0}\lambda_n^4.$$

Здесь для решения системы (7) используем предложенный в [2] метод усреднения для динамических задач линейной вязкоупругости. В этом случае предполагается существование в последнем члене уравнения малого параметра ε, который в окончательных результатах следует положить равным единице, так как малость интегральных членов обеспечивается условием (3). Поэтому ядро релаксации $R_3(t)$ заменим величиной $\varepsilon R_3(t)$.

Из соотношения (10) для функции времени $T_n(t)$ получаем уравнение

$$\ddot{T}_n+\omega_n^2T_n=\varepsilon_1q_n+\varepsilon\omega_n^2k_n\int_0^t R_3(t-\tau)T_n(\tau)d\tau,\quad k_n=\omega_n'^2/\omega_n^2. \tag{11}$$

Применительно к нашей задаче имеем

$$T_n=\left[A_n\cos\omega_n(1+0{,}5R_{cn})t+B_n\sin\omega_n(1+0{,}5R_{cn})t\right]\exp(-0{,}5\omega_nR_{sn}t)+$$
$$+\frac{2}{\omega_n}\sqrt{\frac{q_{1n}^2+q_{2n}^2}{R_{cn}^2+R_{sn}^2}}\cos(\omega_nt+\varphi_{01}-\varphi_{02}), \tag{12}$$

где R_{cn}, R_{sn} – два основных Фурье-образа ядра $k_nR_3(t)$, характеризующие скорость возрастания частоты и логарифмический декремент затухания:

$$R_{cn}=k_n\int_0^\infty R_3(\tau)\cos(\omega_n\tau)d\tau,\quad R_{sn}=k_n\int_0^\infty R_3(\tau)\sin(\omega_n\tau)d\tau,\quad \varphi_{01}=\operatorname{arctg}\frac{R_{sn}}{R_{cn}},$$

$$\varphi_{02}=\operatorname{arctg}\frac{q_{1n}}{q_{2n}},\quad q_{1n}=\frac{1}{\omega_n}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T q_n(t)\sin(\omega_nt)dt,\quad q_{2n}=\frac{1}{\omega_n}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T q_n(t)\cos(\omega_nt)dt.$$

Константы A_n, B_n определяются из начальных условий движения:

$$A_n=\int_0^{r_1}w(r,0)v_nrdr-\frac{2}{\omega_n}\sqrt{\frac{q_{1n}^2+q_{2n}^2}{R_{cn}^2+R_{sn}^2}}\cos(\varphi_{01}-\varphi_{02}),$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n\left(1+0{,}5R_{cn}\right)}\left[\frac{\omega_n R_{sn}}{2}A_n + 2\sqrt{\frac{q_{1n}^2+q_{2n}^2}{R_{cn}^2+R_{sn}^2}}\sin(\varphi_{01}-\varphi_{02}) + \int_0^{r_1}\dot{w}(r,0)v_n r dr\right]. \quad (13)$$

Первое слагаемое (12) представляет свободные затухающие колебания системы, причем декремент пропорционален синус-образу Фурье R_{sn} ядра $k_n R_3(t)$, а возрастание частоты – косинус-образу ядра R_{cn}. Второе слагаемое описывает гармонические вынужденные колебания с частотой ω_n и амплитудой

$$\frac{2}{\omega_n}\sqrt{\frac{q_{1n}^2+q_{2n}^2}{R_{cn}^2+R_{sn}^2}}. \quad (14)$$

Таким образом, вынужденные колебания круговой трехслойной пластины, набранной из линейно вязкоупругих слоев, описываются выражениями (6) с функцией времени (12) и системой функций v_n, φ_n.

При малых силах порядка ε излагаемый метод усреднения дает отличную от нуля амплитуду (14) только в случае резонанса. Поэтому рассмотрим случай, когда частота нагрузки совпадает с одной из частот ω_k собственных колебаний пластины:

$$q(r,t) = q_0(D\cos(\omega_k t) + E\sin(\omega_k t)), \quad (D, E, k - \text{const}).$$

Начальные условия движения принимаем однородными. Характеристики колебаний (12), соответствующие k-й гармонике, в этом случае следующие:

$$q_k(t) = D_k\cos\omega_k t + E_k\sin\omega_k t,\ \ q_{1k} = \frac{E_k}{2\omega_k},\ \ q_{2k} = \frac{D_k}{2\omega_k},\ \ \varphi_{02} = \operatorname{arctg}\frac{D_k}{E_k},$$

$$(q_{1n} = q_{2n} = 0,\ n \neq k),\ \ D_k = \frac{Dq_0 r_1}{M_0 d_k \lambda_k}\left[J_1(\lambda_k r_1) - \frac{J_0(\lambda_k r_1)}{I_0(\lambda_k r_1)}I_1(\lambda_k r_1)\right],$$

$$E_k = \frac{Eq_0 r_1}{M_0 d_k \lambda_k}\left[J_1(\lambda_k r_1) - \frac{J_0(\lambda_k r_1)}{I_0(\lambda_k r_1)}I_1(\lambda_k r_1)\right]. \quad (15)$$

Прогиб, радиальное перемещение и относительный сдвиг в заполнителе следуют из соотношений (6) с учетом (15), (16).

Численные результаты получены для жестко закрепленной пластины (Д16Т–фторопласт–Д16Т) с относительными толщинами слоев $h_1 = h_2 = c = 0{,}02$. Вычисления проводились с использованием пакета MathCAD. Интенсивность резонансной нагрузки $q_0 = 1$ Па. Ядро релаксации заполнителя принимается в виде, предложенном Ржаницыным [4]:

$$R(t) = \frac{Ae^{-pt}}{t^{1-\beta}},$$

где A, p, β – параметры ядра, определяемые экспериментально.

Изменение резонансного прогиба упругой – *а* и вязкоупругих – *б, в* пластин во времени при отсутствии упругого основания ($\kappa_0 = 0$) показана на рисунке 2. Вязкоупругость материалов приводит к уменьшению амплитуды колебаний и ее стабилизации при $t > 700$ с.

Аналогичная картина для резонансных прогибов упругой – *а* и вязкоупругих – *б, в* пластин наблюдается при наличии упругого основания $\kappa_0 = 10^8$ Па/м (рис. 3). Вязкоупругость материалов и здесь приводит к уменьшению амплитуды колебаний и ее стабилизации, но уже за гораздо большее время, т. е. при $t > 2000$ с. Влияние упругого основания характеризуется уменьшением скорости нарастания амплитуды огибающей в начальный период времени $t < 50$ с, (см. рис. 2, *б*; 3, *б*) и увеличением периода ее нестационарности.

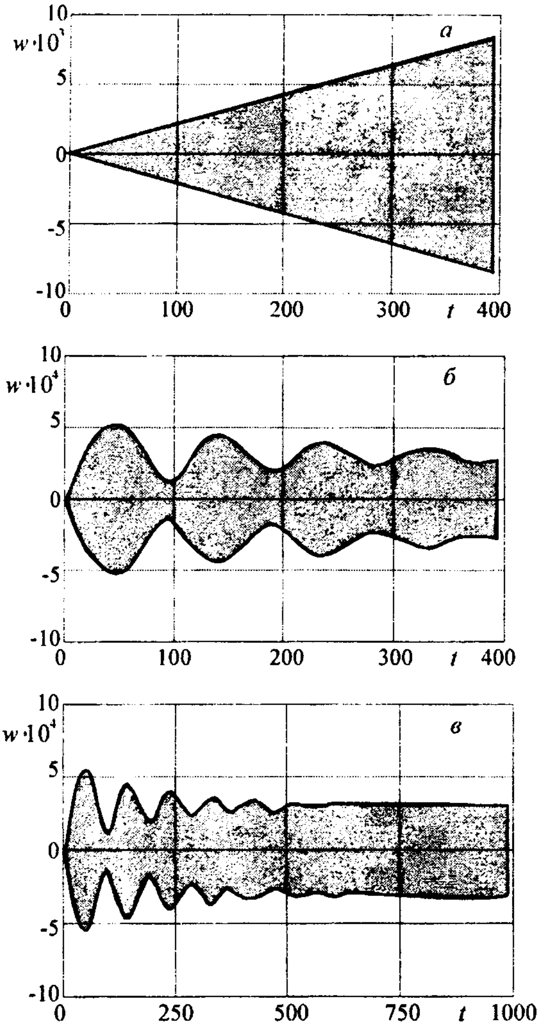

Рис. 2. Зависимость прогиба упругой (а) и вязкоупругих (б), (в) пластин при резонансе при $\kappa_0 = 0$

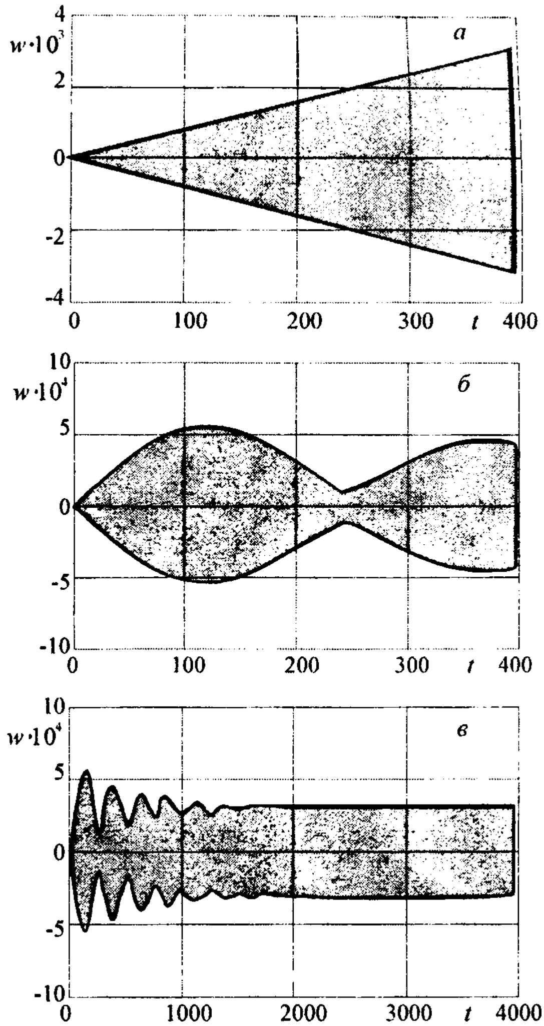

Рис. 3. Зависимость прогиба упругой (а) и вязкоупругих (б), (в) пластин при резонансе при $\kappa_0 = 10^8$ Па/м

Выводы

Таким образом решена задача о колебаниях вязкоупругой круговой трехслойной пластины на основании Винклера, проведен численный анализ, показавший, что вязкоупругость материалов пластины приводит к уменьшению и стабилизации амплитуды колебаний, инерционность оснований замедляет затухание свободных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием распределенных локальных нагрузок / Д. В Леоненко // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – 2 (19). – С. 14–19.
2. Ильюшин, А. А. Основы математической теории термовязко-упругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
3. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
4. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов.– Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.