

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ПО ДЛИНЕ ЖЕСТКОСТЬЮ

Косых Э.Г.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Sandwich thin walled beam open cross section is considered. For the kinematics description carryings layers accepted the hypotheses Broken Normal. Filler is hard. Boundary problem come to the linear system of differential equations with variable coefficients. Received combined equations of equilibrium and its analytical solution via moving.

Keywords and phrases: sandwich thin walled beam, hypotheses Broken Normal, boundary value problem, variable rigidity.

Устоявшаяся классификация тонкостенных стержней на конструкции открытого и закрытого профилей [1], недостаточна в том смысле, что одна и та же конструкция может рассматриваться и закрытой и открытой, Все зависит от соотношения размеров поперечного сечения. Тем более, в случае заполнения пространства между внешними слоями заполнителем, при значительном неравенстве размеров - длины профиля и его толщины - принятие модели открытого профиля совершенно естественно.

На рисунке 1. изображен эскиз фрагмента модели крыла планера и его поперечное сечение. Внешние слои назовем обшивкой - ее верхним и нижним слоями соответственно. Пусть толщины этих слоев будут h_1, h_2 , а пространство между верхним и нижним слоями, будучи заполненное другим материалом, например жестким заполнителем, естественно считать внутренним слоем, пусть, толщиной $2c$. Таким образом, в качестве простейшей модели крыла планера примем консольный трехслойный тонкостенный стержень открытого профиля.

Ограничимся малыми деформациями, которые определяются соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1)$$

Здесь $u_{i,j}$ - производная переменной u_i по j -й координате. Введем криволинейную ось поперечного сечения - рис.1 с соответствующей координатой - s как след пересечения срединной плоскости с поперечным сечением. Координата s отсчитывается от произвольно выбранной точки отсчета на срединной линии сечения - криволинейной оси. Пусть это будет точка M_0 .

В каждой точке оси s введем местную систему координат - $(\vec{\tau}, \vec{n})$, соответственно направлениям: по касательной и нормали к срединной линии сечения. Перемещения вдоль этих направлений обозначим через v, w . В третьем, продольном направлении перемещение обозначим u .

Учитывая геометрию стержня, гипотезу В.З. Власова об отсутствии сдвига в срединной поверхности, а также введенные им понятия секториальных характеристик сечения, получим для перемещений v, w, u формулы:

$$\begin{aligned} v &= \xi(z) \cos \alpha + \eta(z) \sin \alpha + \theta(z) h, \\ w &= -\xi(z) \sin \alpha + \eta(z) \cos \alpha + \theta(z) t, \\ u &= \zeta(z) - \xi_{,z}(z) x - \eta_{,z}(z) y - \vartheta_{,z}(z) \varpi. \end{aligned}$$

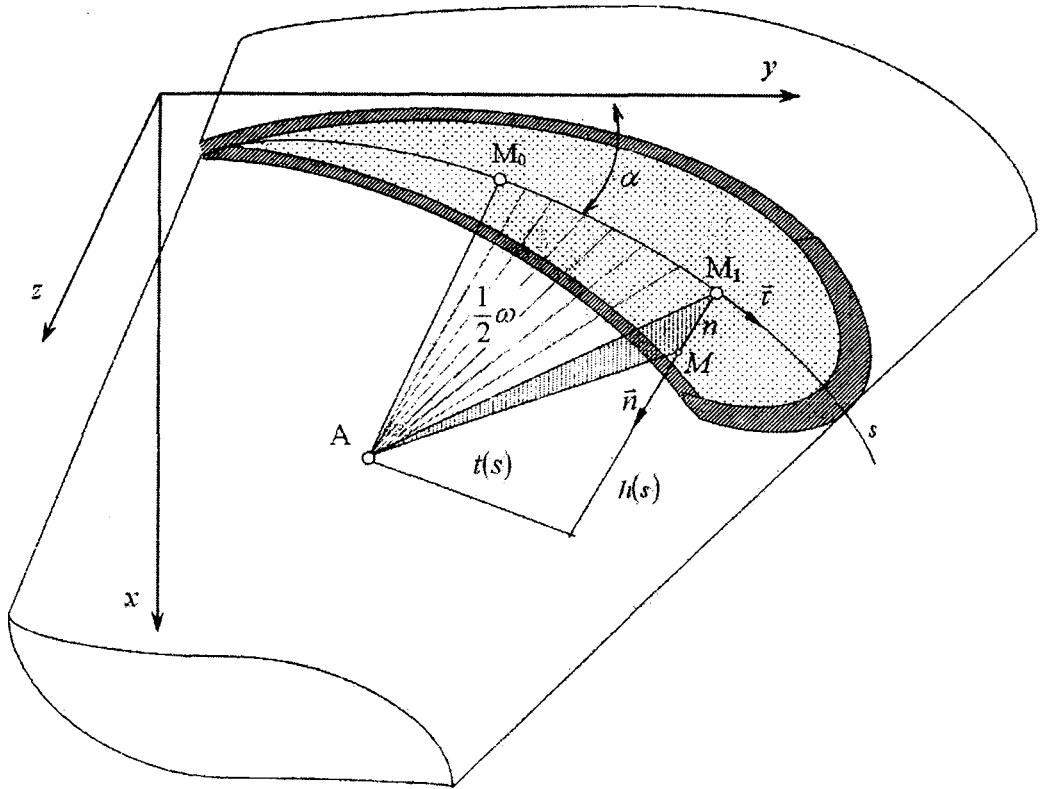


Рис. 1. Эскиз модели фрагмента крыла планера

Здесь $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\zeta(z)$ – перемещение профиля как жесткого целого в плоскости и из плоскости сечения, $\theta(z)$ – угол закручивания, обусловленный деформацией поперечного сечения и чистым кручением стержня,

$$h = (x - a_x) \sin \alpha - (y - a_y) \cos \alpha,$$

$$t = (x - a_x) \cos \alpha + (y - a_y) \sin \alpha,$$

$$dx = (ds) \cos \alpha, \quad dy = (ds) \sin \alpha,$$

ω – секториальная площадь.

Учитывая, что для слоистой конструкции необходимо учитывать работу продольного момента, то с принятием к рассмотрению сдвиговой поправки по Тимошенко С.П. – Ψ , продольные перемещения по слоям примут вид

$$u^{(1)} = \zeta(z) + c\Psi - \xi_{,z}(z)(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \eta_{,z}(z)(y(s) + n \cos \alpha(s)) - \theta_{,z}(\omega(s) + nt(s));$$

$$u^{(2)} = \zeta(z) - c\Psi - \xi_{,z}(z)(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \eta_{,z}(z)(y(s) + n \cos \alpha(s)) - \theta_{,z}(\omega(s) + nt(s));$$

$$u^{(3)} = \zeta(z) - n\Psi - \xi_{,z}(z)(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \eta_{,z}(z)(y(s) + n \cos \alpha(s)) - \theta_{,z}(\omega(s) + nt(s)).$$

По формулам Коши (1) вычислим деформации. Например, для среднего слоя получим

$$\varepsilon_{zz}^{(3)} = u_{,z}^{(3)} = \xi_{,zz}(z) - n\Psi_{,z}(z) - \xi_{,z,z}(z)(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \eta_{,zz}(z)(y(s) + h \cos \alpha(s)) - \theta_{,zz}(z)(\omega(s) + nt(s)), \quad (2)$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2}(u_{,n}^{(3)} + w_{,z}) = \frac{1}{2}(-\Psi - w_{,z} + w_{,z}) = -\frac{1}{2}\Psi.$$

Уравнения равновесия получим, применяя принцип Лагранжа.

Вычисляем вариации деформаций, например для $\delta \varepsilon_{zz}^{(1)}$ получим

$$\delta \varepsilon_{zz}^{(1)} = \delta \zeta_{,z}(z) + c \delta \psi_{,z} - \delta \xi_{,zz}(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \\ - \delta \eta_{,zz}(z)(y(s) + n \cos \alpha(s)) - \delta \theta_{,zz}(\omega(s) + n t(s)).$$

Аналогично для других вариаций в слоях: $\delta \varepsilon_{zz}^{(2)}$, $\delta \varepsilon_{zz}^{(3)}$, $\delta \varepsilon_{zn}^{(3)}$.

Введем внутренние силы, интегрируя по поперечному сечению, т.е. по координатам n , s .

$$N^{(\kappa)} = \iint_{sn} \sigma_{zz} ds dn; \quad Q = Q^{(3)} = \iint_{sn} \sigma_{zn}^{(3)} ds dn; \quad M_x^{(\kappa)} = \iint_{sn} \sigma_{zz}^{(\kappa)} y ds dn; \\ M_y^{(\kappa)} = -\iint_{sn} \sigma_{zz}^{(\kappa)} ds dn; \quad B = \iint_{sn} \sigma_{zz}^{(\kappa)} \omega ds dn$$

Необходимо учесть крутящий момент свободного кручения M_x .

Определим вариацию потенциальной энергии, как работу внутренних сил деформаций по слоям, и интегрируя по объему получим

$$\delta W = \int \sum_z \iint_{sn} (\sigma_y^{\kappa} \delta \varepsilon_{ij}^{(\kappa)}) ds dn dz.$$

Аналогично для вариации работа внешних сил получим

$$\delta A = \iint_{zs} (p_z \delta u + p_v \delta v + p_w \delta w) ds dz + \delta A_G.$$

Здесь δA_G – вариации работы внешних сил на контуре.

Подставляя в эти выражения вариации деформаций и преобразуя слагаемые с вариациями производных известным образом [2], например,

$$(N(z) \delta \xi_{,z}) = (N(z) \delta \xi)_{,z} - (N_{,z}(z) \delta \xi).$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим систему уравнений равновесия в силах:

$$N_{,z} = -p_z, \\ M_{,z} - Q = 0, \\ M_{y,zz} = \int_{L(z)} \frac{dp_z}{dz} x ds - q_x, \\ M_{x,zz} = \int_{L(z)} \frac{dp_z}{dz} y ds - q_y, \\ B_{,zz} + M_{k,z} = \int_{L(z)} \frac{dp_z}{dz} \omega ds - m. \quad (3)$$

Здесь M – обобщающий момент, соответствующий сдвигу Ψ ; m – погонный крутящий момент; q_x , q_y , p_z – погонные распределенные поверхностные нагрузки.

Преобразуем условия равновесия в силах (3) в уравнения равновесия в перемещениях.

$$\left(F \xi_{,z} + S_n \psi_{,z} - S_y \xi_{,zz} - S_x \eta_{,zz} - S_\omega \theta_{,zz} \right)_{,t} = \frac{1}{E} p_z, \\ \left(S_n \zeta_{,z} + I_n \psi_{,z} - T_{ny} \xi_{,zz} - I_{nx} \eta_{,zz} + I_{nx} \theta_{,zz} \right)_{,z} - \bar{G} \Psi = 0, \\ \left(-S_y \xi_{,z} - I_{yn} \psi_{,z} + I_y \xi_{,zz} + I_{yx} \eta_{,zz} + I_{y\omega} \theta_{,z} \right)_{,zz} = \frac{1}{E} \left(q_x + \int_{L(z)} p_{z,z} x ds \right),$$

$$\begin{aligned} & \left(-S_x \xi_{,z} - I_{xn} \psi_{,z} + I_{xy} \xi_{,zz} + I_x \eta_{,zz} + I_{x\omega} \theta_{,z} \right)_{,zz} = \frac{1}{E} \left(q_y - \int_{L(z)} p_{z,z} y ds \right) \\ & \left(-S_\omega \xi_{,z} - I_{\omega n} \psi_{,z} + I_{\omega y} \xi_{,zz} + I_{x\omega} \eta_{,zz} + I_\omega \theta_{,zz} \right)_{,zz} - \left(\frac{G}{E} I_\rho \theta_{,z} \right)_{,z} = \frac{1}{E} \left(m + \int_{L(z)} P_{z,z} \omega ds \right). \end{aligned}$$

Следует заметить, что полученная система уравнений имеет принципиально ту же структуру как и в случае сплошного тонкостенного стержня, правда на два порядка выше, что обусловлено учетом сдвига во внутреннем слое [3]. Но здесь геометрические характеристики вычисляются по слоям и суммируются. Более того эти характеристики, а именно моменты инерции I_x , I_y , в связи с тем, что для любой малой окрестности приращения вида $n \sin \alpha$, $n \cos \alpha$. Поэтому геометрические характеристики примут вид, например

$$I_x = \int y^2(s) dF + \int \cos \alpha(s) dI,$$

где $dF = \delta(s) ds$; $dI = \frac{\delta^3(s)}{12} ds$.

Полученная система уравнений шестнадцатого порядка. В рамках матричного метода решения [4] система уравнений может быть приведена к системе восьми уравнений второго порядка канонической формы. Тогда решение может быть представлено через матричные функции $Co(E(z))$ и $Si(E(z))$ с определяющей матрицей $E(z)$ восьмого порядка, что вполне обозримо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.
2. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: Белгут, 2002. – 344 с.
3. Косых Э.Г. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней переменной жесткости / Э.Г. Косых // Вестник Самарского государственного университета. – Самара, 2008. – №8/1(67). – С. 300–399.
4. Косых Э.Г. Поперечный изгиб тонкостенного стержня с переменной по длине жесткостью. – Минск: Механика, 2010.