

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕКУЧЕСТИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ОДНООСНОГО СЖАТИЯ

Гавриленко С.Л.

*Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого
НАН Беларуси, Гомель*

Fluidity modeling of a nonlinear elastic viscoplastic material in conditions of uniaxial compression has been carried out. Changes of the area of cross section of a sample and linear factor of deformation from time have been taken into account. Results of modeling have been compared to experimental data.

Введение

Хладотекучесть, как проявление ползучести, в особенности свойственная политетрафторэтилену (ПТФЭ), в определенной степени способствует широкому использованию указанного полимерного материала в уплотнительной технике, способствуя с течением времени прилеганию контактирующих поверхностей. С другой стороны, хладотекучесть приводит к нестабильности геометрической формы сопряжений из антифрикционных полимерных композитов при эксплуатации. Таким образом, в целях прогнозирования эксплуатационных характеристик трибосопряжений на стадии проектирования, необходимо описание и прогнозирование хладотекучести.

В данной работе описана методика прогнозирования хладотекучести на основе математического моделирования напряженно-деформированного состояния материала в условиях растяжения и сжатия.

Постановка задачи

Искомými функциями задачи являются компоненты вектора скорости. В общем случае эти 3 компоненты зависят от 4 переменных (цилиндрических координат и времени):

$$V_r = V_r(r, \varphi, z, t), \quad V_\varphi = V_\varphi(r, \varphi, z, t), \quad V_z = V_z(r, \varphi, z, t).$$

Считаем, что компоненты тензора скоростей деформации связаны с компонентами вектора скорости соотношениями Коши, которые в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\xi_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad \xi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r}; \quad \xi_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z};$$

$$\xi_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right); \quad \xi_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right); \quad \xi_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right).$$

Последние соотношения верны при малых градиентах компонент вектора скорости. Малые градиенты могут быть обеспечены при условии небольшой скорости нагружения и относительно большой рабочей длины образца.

Исходной является модель нелинейного упруговязкопластического материала с ненулевым пределом текучести. Аналитическая форма модели имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\tau}{H} \xi_{ij} \\ \tau = \tau_0 + K \left(\frac{H}{\varepsilon_0} \right)^m \text{ при } \tau \geq \tau_0, \\ \sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \text{ при } \tau < \tau_0 \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0. \end{array} \right.$$

Здесь S_{ij} и ξ_{ij} – соответственно девиаторы напряжений и скоростей деформации, $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – соответственно тензора напряжений и деформации, τ и H – интенсивности тензора напряжений и скоростей деформации соответственно, τ_0 – предел текучести, m – параметр скоростной чувствительности, K – коэффициент вязкости, ε_0 – некоторая характерная скорость деформации, λ, μ – параметры Ламе, div – оператор дивергенции.

С помощью векторного и скалярного соотношений модели могут быть получены компоненты девиатора скоростей деформации и напряжений. Тогда уравнения движения в цилиндрических координатах относительно 4 неизвестных функций $V_x(x, y, z, t)$, $V_y(x, y, z, t)$, $V_z(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$ в квазистатическом подходе имеют вид [1, 2].

Граничные условия для этой системы уравнений имеют вид:

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma} = 0,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши; Γ – подвижная боковая граница образца, n_j – нормаль к границе Γ .

Предполагаем, что материал однородный по структуре и ширине. Процесс движения разобьем на несколько состояний. Для каждого состояния верны следующие предположения:

- 1) изменением размеров тела можно пренебречь (аналогично квазистатическому подходу [3]);
- 2) на верхнем торце образца задан постоянный вектор скорости, на боковых торцах нулевые усилия (свертка тензора напряжений и внешней нормали равна нулю), нижнее и верхнее сечения свободно скользят.

При сделанных предположениях относительно продольной скорости сделаем допущение:

$$V_z = -\frac{v}{l_m} z.$$

Оператор дивергенции в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Далее делаем предположение, что $\frac{\partial V_r}{\partial r}$ и $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$ являются функциями только

времени. В силу сделанных предположений вектор скорости имеет вид

$$V_r = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m} r, \quad V_\varphi = 0, \quad V_z = -\frac{v}{l_m} z.$$

Находим тензор скоростей деформации, для этого воспользуемся соотношениями Коши: $\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$, где V_i – компоненты вектора скорости, x_i – декартовы координаты, $i, j=1,2,3$. После несложных математических операций, получаем компоненты тензора скоростей деформации. Они имеют вид

$$\xi_{11} = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m}, \quad \xi_{22} = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m}, \quad \xi_{33} = -\frac{v}{l_m}, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = 0, \quad \xi_{23} = 0.$$

После того, как компоненты тензора скоростей деформаций известны находим интенсивность скоростей деформации (второй инвариант тензора) по известной формуле:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 + \xi_{33}^2)}.$$

Последнее равенство верно для тензора скоростей деформации диагонального вида. После подстановки компонент имеем

$$H = \frac{v}{l_m}.$$

Воспользовавшись вторым соотношением в определяющих соотношениях модели, получим интенсивность девиатора напряжений τ :

$$\tau = \tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m.$$

Согласно векторным соотношениям модели определим компоненты девиатора тензора напряжений. После несложных математических преобразований получим

$$S_{11} = \frac{1}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right), \quad S_{22} = \frac{1}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right),$$

$$S_{33} = -\frac{2}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right), \quad S_{12} = 0, \quad S_{13} = 0, \quad S_{23} = 0.$$

Далее находим первый инвариант тензора напряжений. Для этого выпишем уравнение равновесия в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial(S_{33} + p)}{\partial z} = 0.$$

Учитывая, что $\frac{\partial S_{33}}{\partial z} = 0$ и после подстановки выражений для компонент вектора скорости получаем систему уравнений в частных производных для определения p :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Зная компоненты девиатора напряжений и первый инвариант, можем найти σ_{33} по формуле $\sigma_{33} = S_{33} + p$.

Зная $\sigma_{33}(x, y, z, t)$ и $S(t)$ некоторого поперечного сечения по известной формуле условия равновесия можем найти зависимость силы от времени t .

$$P_T(t_i) = \frac{2\pi r_i^2}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right) - p\pi r_i^2.$$

Значение p находим из граничных условий (нулевое усилие на боковой поверхности образца). После несложных математических преобразований имеем:

$$p = -\frac{1}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right).$$

Таким образом, теоретическое значение силы определяется выражением:

$$P_T(t_i) = \pi r_i^2 \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right).$$

Аналогичный подход рассмотрен для призматических образцов в работе [5].

Моделирование одноосного сжатия

Для определения параметров модели проведено испытание на сжатие цилиндрического образца радиусом 10 мм и высотой 30 мм со скоростью движения захвата $V = 10$ мм/мин (Instron 5567). Зависимость «Усилие - перемещение» приведена на рис. 1.

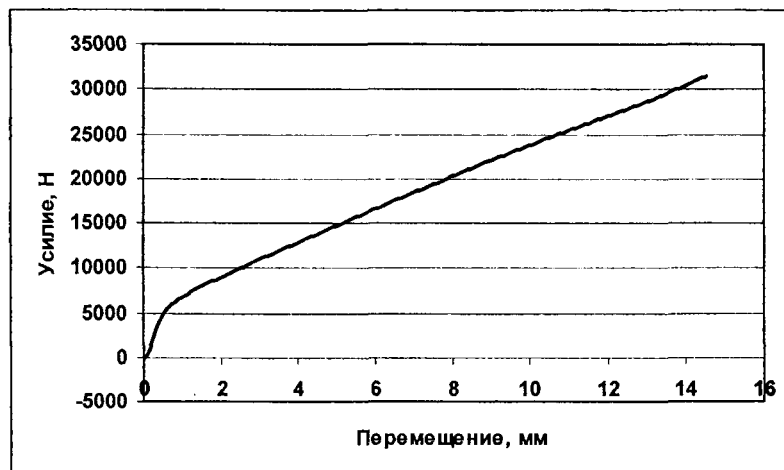


Рис. 1. Зависимость «Усилие (Н) – перемещение (мм)» для материала FLUVIS 25 AM2

Из зависимости «Усилие - перемещение» методом наименьших квадратов и значения точки перегиба кривой получены параметры модели в вязкопластической области:

$$\tau_0 = 16,33 \text{ МПа}, K = 39,99 \text{ МПа}, m = 1,118.$$

Моделирование текучести

При известных параметрах вязкопластической модели проведено моделирование текучести материала FLUVIS 25 AM2. С этой целью проведено испытание на текучесть при постоянной силе $P = 15000$ Н. Данное значение силы достигалось движением захватов со скоростью $V = 10$ мм/мин. Зависимость «Перемеще-

ние – время» для цилиндрического образца диаметром 20 мм и высотой 30 мм в условиях текучести представлена на рис. 2.

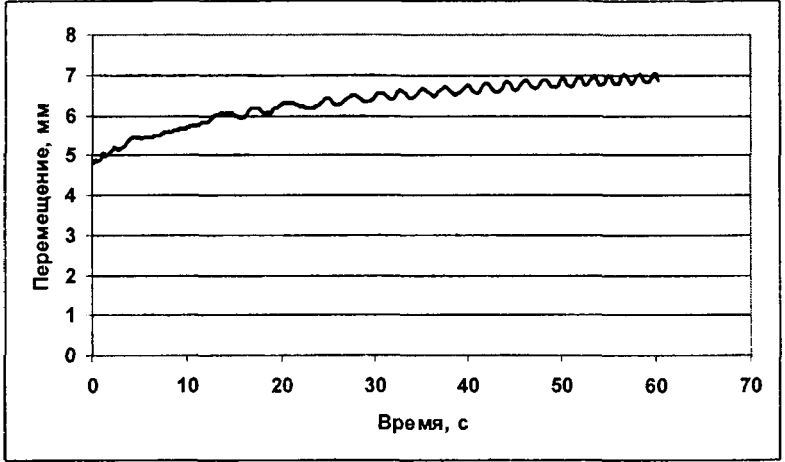


Рис. 2. Зависимость «Перемещение (мм) – время (с)» для материала FLUVIS 25 AM2 при действии постоянной силы $P=15000 \text{ Н}$

При текучести образца материала имеет место следующая зависимость перемещения текучести от времени:

$$\kappa dt = \frac{du}{l_0 - u},$$

где l_0 – высота образца, соответствующая началу текучести ($l_0 = 25,2 \text{ мм}$), l_1 – начальная высота образца ($l_1 = 30 \text{ мм}$), r_0 – начальный радиус образца ($r_0 = 10 \text{ мм}$), κ - коэффициент, определяемый из следующего соотношения:

$$P_T(t_i) = \frac{\pi r_0^2 l_1}{l_0 - u} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} k \right)^m \right).$$

После несложных математических преобразований получаем интегральную зависимость текущего перемещения текучести от времени, которая имеет вид, аналогичный приведенному в работе [4]:

$$\frac{1}{K^m} \frac{P_{\text{мек}} l_0}{\pi r_0^2 l_1} \int \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{P_{\text{мек}}(l_0 - u)}{\pi r_0^2 l_1} x(x - \tau_0)^{\frac{1}{m}}} dx = t.$$

Из последнего соотношения получаем зависимость полного перемещения текучести от времени. Результаты сравнительного анализа расчетного и экспериментального значения, относительной погрешности представлены в табл. 1.

Результаты сравнительного анализа

№	1	2	3	4	5	6	7
Время, с	2	5	10	15	20	25	30
Расчетное значение перемещения, мм	5,11	5,56	6,27	6,92	7,53	8,10	8,63
Экспериментальное значение перемещения, мм	5,13	5,43	5,69	5,99	6,28	6,42	6,48
Относительная погрешность, %	0,4	2,4	10,2	15,5	19,9	26,1	33,1

Заключение

Приближенное решение квазистатической задачи о сжатии цилиндрического образца и разработанная методика моделирования текучести удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными при малых временах деформирования. Более точное описание предполагает аналитическое решение задачи о сжатии цилиндрического образца и учета изменения параметров упруговязкопластической модели в процессе текучести.

Разработанный подход может быть использован в инженерных методиках расчета параметров формоизменения элементов узлов трения из нелинейных упруговязкопластических материалов.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проекты T10CO-033, Ф10-240).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
2. Огибалов, П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. – М.: МГУ, 1977. – 373 с.
3. Новацкий, В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. Гавриленко, С.Л., Шилько, С.В., Васин, Р.А. Определение характеристик вязко-пластического материала в условиях течения Куэтта // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – № 3. – С. 502–508.
5. Гавриленко, С.Л., Шилько С.В. Идентификация модели нелинейного вязкопластического материала при статическом растяжении с учетом изменения площади поперечного сечения образца // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2009. – Т. 14, № 1. – С. 22–27.