

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ

Громько О.В., Царева А.А.

Белорусский государственный университет, Минск

In this paper the problem of mathematical and computer simulation of the kinematics of a complex mechanism on the example of solving the direct and inverse problems of the kinematics of the manipulator Fanuc M-710iC/20L is considered. The results of calculations in package Mathematica for the mechanism are obtained.

При исследовании механики роботов важным аспектом является автоматизация расчетов и качественная визуализация, как самой твердотельной модели, так и полученных результатов. В такой ситуации наиболее рационально применение различных программных комплексов компьютерной математики и механики, таких как *Mathematica*, ADAMS, Visual Nastran, ANSYS WorkBench. Каждый из этих пакетов в отдельности позволяет пользователям провести всесторонний анализ и получить достоверные и наглядные результаты, однако наибольшей эффективности можно достичь при совместном использовании данных программных комплексов. Рассмотрим подробнее моделирование в пакетах ADAMS, ANSYS WorkBench, Visual Nastran и Pro/Engineer. Так в настоящей работе рассматриваются основные результаты анализа кинематики манипулятора Fanuc M-710iC/20L представленного на рис. 1 в среде пакета *Mathematica*.

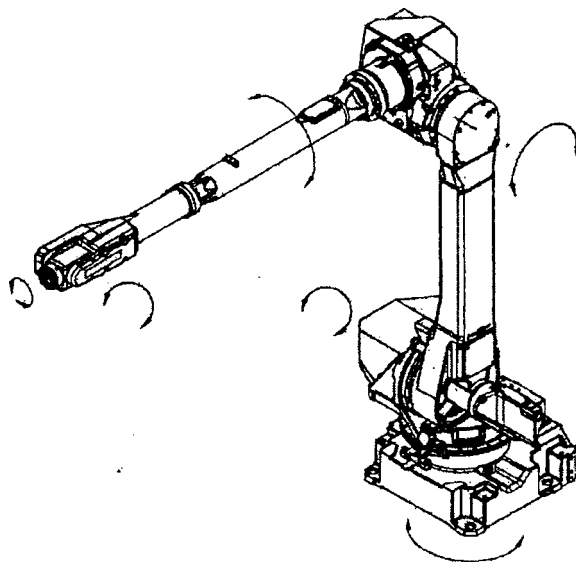


Рис. 1. Манипулятор Fanuc M-710iC/20L

Одной из наиболее важных задач на сегодняшний день является исследование кинематики манипулятора. При этом прямая задача кинематики: определение положения и ориентации рабочего органа манипулятора по заданным обобщенным координатам, - является более простой для исследования, так как имеет однозначное и единственное решение, в отличие от обратной задачи кинематики: отыскание конфигурации робота по заданному положению рабочего органа манипулятора, - которая требует более громоздких и нетривиальных решений. Поэтому при решении данных задач были использованы возможности системы компьютерной математики *Mathematica*.

Для модели M-710iC/20L, имеющей структурную формулу RRRRRR, системы координат, связанные со звеньями были выведены следующим образом [3]:

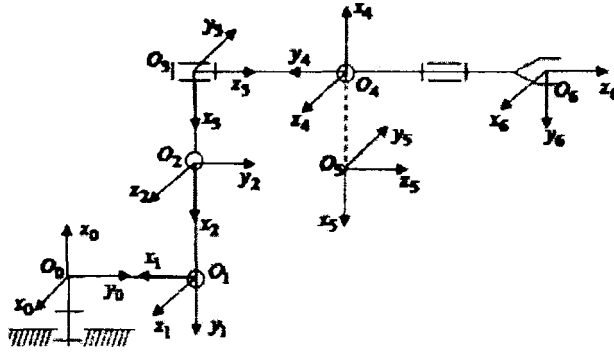


Рис 2. Системы координат, связанные со звеньями манипулятора M-710iC/20L

Соответствующая таблица параметров Денави-Хартенберга преобразования $(i-1)$ -й системы координат в i -ю имеет вид

N	Тип	$N_{\text{звена}}$	θ	S	a	α
1	R	1	q_1	0	$-O_0O_1$	$-\pi/2$
2	R	2	q_2	0	$-O_1O_2$	0
3	R	3	q_3	0	$-O_2O_3$	$-\pi/2$
4	R	4	q_4	O_3O_4	0	$-\pi/2$
5	R	5	q_5	0	0	$-\pi/2$
6	R	6	q_6	O_4O_6	0	0

где $N_{\text{звена}}$ – номер звена, $\theta = q_i, i = \overline{1,6}$ – углы поворота между осью x_{i-1} и лучом, проведенным из точки O_{i-1} параллельно оси x_i (в данном случае обобщенные координаты), S_i – перенос вдоль оси z_{i-1} до тех пор, пока оси x_{i-1} и x_i не окажутся на одной прямой, a_i – перенос вдоль оси x_{i-1} до тех пор, пока не совпадут точки O_{i-1} и O_i , α_i – поворот вокруг оси x_i до совмещения систем $(i-1)$ и i .

Решением прямой задачи кинематики манипулятора, является матрица $A_{6,0} = A_{1,0}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,3}A_{5,4}A_{6,5}$, которая определяет положения и ориентации рабочего органа по заданной конфигурации манипулятора. Данная матрица является результатом последовательного перемножения матриц преобразования вида

$$A_{i,i-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \overline{1,6}.$$

В силу громоздкости полученного решения $A_{6,0}$, приведем только четвертый столбец данной матрицы, так как его значения понадобятся дальше для нахождения матрицы Якоби:

$$\begin{aligned} & (-h_5 S_1 S_4 S_5 - C_1 (h_1 + C_2 (h_2 + C_3 h_3 + h_4 S_3 - C_5 h_5 S_3 + C_3 C_4 h_5 S_5) + S_2 (C_3 (h_4 - C_5 h_5) - \\ & - S_3 (h_3 + C_4 h_5 S_5))), -S_1 (h_1 + S_2 (C_3 h_4 - C_3 C_5 h_5 - h_3 S_3) + C_2 (h_2 + C_3 h_3 + h_4 S_3 - C_5 h_5 S_3)) + \\ & + h_5 (-C_2 C_3 C_4 S_1 + C_4 S_1 S_2 S_3 + C_1 S_4) S_5, S_2 (h_2 + C_3 h_3 + h_4 S_3 - C_5 h_5 S_3 + C_3 C_4 h_5 S_5) + \\ & + C_2 (-C_3 h_4 + C_3 C_5 h_5 + h_3 S_3 + C_4 h_5 S_3 S_5), 1)^T. \end{aligned}$$

Аналитическое решение обратной задачи связано с решением системы шести нелинейных уравнений с n неизвестными, поэтому при ее решении используем известный алгоритм [3]. Для упрощения расчетов в качестве опорной выберем систему $O_5x_6y_6z_6 = \bar{R}_6$, оси которой параллельны осям системы $R_6 = O_6x_6y_6z_6$, а начало находится в точке O_6 . Данный прием имеет место, поскольку M-710iC/20L заканчивается тремя вращательными парами, оси которых пересекаются в одной точке. С учетом этого получим, что во всех матрицах $A_{i,j}$, $-O_4O_6 = 0$. Зададим матрицу:

$$B_{6,0} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x^* \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & y^* \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & z^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица, соответствующая системе $O_5x_6y_6z_6 = \bar{R}_6$ запишется в виде.

$$\tilde{B}_{6,0} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & -\alpha_{13}h_5 + x^* \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & -\alpha_{23}h_5 + y^* \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & -\alpha_{33}h_5 + z^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все элементы данной матрицы являются известными и задают положение и ориентацию рабочего органа в базовой системе координат. Для решения обратной задачи воспользуемся формулами для расчета обратных матриц $A_{i,i-1}^{-1}$, которые описывают переход из $(i-1)$ -й системы координат в i -ю:

$$A_{i,i-1}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -s_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -s_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

соответствующие параметрам Денави-Хартенберга, заданными выше.

Вычисляя поочередно матрицы $\tilde{B}_{6,i} = A_{i,i-1}^{-1} \tilde{B}_{6,i}$, $i = \overline{1,6}$ и сравнивая соответствующие элементы матриц $\tilde{A}_{6,i}$, $i = \overline{1,6}$, полученных из матриц $A_{6,1}$, $i = \overline{1,6}$ при $-O_4O_6 = 0$ получим следующее решение обратной задачи кинематики для манипулятора M-710iC/20L (нужно отметить, что полное решение задачи получено на третьем шаге при $i = 3$):

$$S_1 = \frac{\varepsilon_1 t_{24}}{\sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2}},$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 t_{14}}{\sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2}},$$

$$S_2 = \frac{(2h_2 t_{34} (h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 + (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2) - 2h_2 (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24}) \times \sqrt{4h_2^2 (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + 4h_2^2 t_{34}^2 - (h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 + (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2) \varepsilon_2}) / 4h_2^2 ((h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2)}{2h_2^2 ((h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2)},$$

$$C_2 = \frac{-(h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24}) (h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 + (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2) + t_{34} \sqrt{4h_2^2 (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + 4h_2^2 t_{34}^2 - (h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 + (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2) \varepsilon_2}}{2h_2^2 ((h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2)},$$

$$S_3 = \frac{(-h_2 h_4 + S_2 (h_1 h_3 + h_4 t_{34} + h_3 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \varepsilon_1) - C_2 (h_1 h_4 - h_3 t_{34} + h_4 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \varepsilon_1)) / (h_3^2 + h_4^2)}{h_3^2 + h_4^2},$$

$$C_3 = \frac{(-C_2 h_1 h_3 + h_2 h_3 + h_1 h_4 S_2 + C_2 h_4 t_{34} - h_3 S_2 t_{34} + C_2 h_3 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \varepsilon_1 + h_4 S_2 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \varepsilon_1) / (h_3^2 + h_4^2)}{h_3^2 + h_4^2},$$

$$C_5 = C_1 C_3 S_2 t_{13} + C_1 C_2 S_3 t_{13} + C_3 S_1 S_2 t_{23} + C_2 S_1 S_3 t_{23} + C_2 C_3 t_{33} - S_2 S_3 t_{33},$$

$$S_5 = \varepsilon_3 \sqrt{1 - C_5^2},$$

$$C_4 = (-C_1 C_2 C_3 t_{13} + C_1 S_2 S_3 t_{13} - C_2 C_3 S_1 t_{23} + S_1 S_2 S_3 t_{23} + C_3 S_2 t_{33} + C_2 S_3 t_{33}) / S_5,$$

$$S_4 = (-S_1 t_{13} + C_1 t_{23}) / S_5$$

$$C_6 = (C_1 C_3 S_2 t_{11} + C_1 C_2 S_3 t_{11} + C_3 S_1 S_2 t_{21} + C_2 S_1 S_3 t_{21} + C_2 C_3 t_{31} - S_2 S_3 t_{31}) / S_5$$

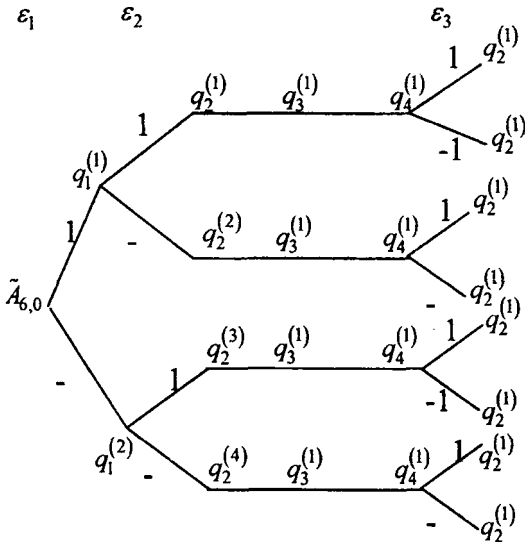
$$S_6 = (-C_1 C_3 S_2 t_{12} - C_1 C_2 S_3 t_{12} - C_3 S_1 S_2 t_{22} - C_2 S_1 S_3 t_{22} - C_2 C_3 t_{32} + S_2 S_3 t_{32}) / S_5$$

где $\varepsilon_{1,2,3} = \pm 1$ и для краткости $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, $i = \overline{1,6}$. При этом в ходе решения были получены ограничения на элементы матрицы $\tilde{A}_{6,2}$

$$4(O_1 O_2)^2 \left(-O_0 O_1 + \varepsilon_1 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \right)^2 + 4(O_1 O_2)^2 t_{34}^2 - ((O_2 O_3)^2 + (O_3 O_4)^2 - t_{34}^2 -$$

$$- \left(-O_0 O_1 + \varepsilon_1 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \right)^2 - (O_1 O_2)^2)^2 \geq 0.$$

Как видно, из-за присутствия параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1$, решение обратной задачи не является однозначным и имеет восемь возможных исходов. Можно построить дерево решений, которое позволяет выполнить проверку полученных результатов:



Выполнив проверку полученных результатов, мы получили, что обратная задача решена верно.

Для вычисления матрицы Якоби рассчитаем элементы $U_{6i} \tilde{a}_4 = \frac{\partial A_{6,0}}{\partial q_i} (0; 0; 0; 1)^T$,

$i = \overline{1,6}$, которые представляют собой продифференцированный по q_i четвертый столбец матрицы $A_{6,0}$:

$$U_{61} \tilde{a}_4 = (h_1 S_1 + C_2 h_2 S_1 + C_2 C_3 h_3 S_1 + C_3 h_4 S_1 S_2 - C_3 C_5 h_5 S_1 S_2 + C_2 h_4 S_1 S_3 - C_2 h_5 S_1 S_3 - h_3 S_1 S_2 S_3 +$$

$$+ C_2 C_3 C_4 h_5 S_1 S_5 - C_4 h_5 S_1 S_2 S_3 S_5 - C_1 h_5 S_4 S_5, -C_1 h_1 - C_1 C_2 h_2 - C_1 C_2 C_3 h_3 - C_1 C_3 h_4 S_2 +$$

$$+ C_1 C_3 C_5 h_5 S_2 - C_1 C_2 h_4 S_3 + C_1 C_2 C_5 h_5 S_3 + C_1 h_3 S_2 S_3 - C_1 C_2 C_3 C_4 h_5 S_5 + C_1 C_4 h_5 S_2 S_3 S_5 - h_5 S_1 S_4 S_5,$$

$$0, 1)^T$$

$$U_{62} \tilde{a}_4 = (C_1 h_2 S_2 + C_1 C_3 h_3 S_2 - C_1 C_2 C_3 h_4 + C_1 C_2 C_3 C_5 h_5 + C_1 h_4 S_2 S_3 - C_1 C_5 h_5 S_2 S_3 + C_1 C_2 h_3 S_3 +$$

$$+ C_1 C_3 C_4 h_5 S_2 S_5 + C_1 C_2 C_4 h_5 S_3 S_5, h_2 S_1 S_2 + C_3 h_3 S_1 S_2 - C_2 C_3 h_4 S_1 + C_2 C_3 C_5 h_5 S_1 + h_4 S_1 S_2 S_3 -$$

$$- C_5 h_5 S_1 S_2 S_3 + C_2 h_3 S_1 S_3 + C_3 C_4 h_5 S_1 S_2 S_5 + C_2 C_4 h_5 S_1 S_3 S_5, C_3 h_4 S_2 - C_3 C_5 h_5 S_2 + C_2 h_2 +$$

$$+ C_2 C_3 h_3 - h_3 S_2 S_3 + C_2 h_4 S_3 - C_2 C_5 h_5 S_3 + C_2 C_3 C_4 h_5 S_5 - C_4 h_5 S_2 S_3 S_5, 1)^T$$

$$\begin{aligned}
U_{63}\bar{a}_4 &= (C_1C_2h_3S_3 + C_1h_4S_2S_3 - C_1C_5h_5S_2S_3 - C_1C_2C_3h_4 + C_1C_2C_3C_5h_5 + C_1C_3h_3S_2 + \\
&+ C_1C_2C_4h_5S_3S_5 + C_1C_3C_4h_5S_2S_5, C_2h_3S_1S_3 + h_4S_1S_2S_3 - C_5h_5S_1S_2S_3 - C_2C_3h_4S_1 + \\
&+ C_2C_3C_5h_5S_1 + C_3h_3S_1S_2 + C_2C_4h_5S_1S_3S_5 + C_3C_4h_5S_1S_2S_5, C_2h_4S_3 - C_2C_5h_5S_3 - h_3S_2S_3 + \\
&+ C_2C_3h_3 + C_3h_4S_2 - C_3C_5h_5S_2 - C_4h_5S_2S_3S_5 + C_2C_3C_4h_5S_5, 1)^T \\
U_{64}\bar{a}_4 &= (C_1C_2C_3h_5S_4S_5 - C_1h_5S_2S_3S_4S_5 - C_4h_5S_1S_5, C_2C_3h_5S_1S_4S_5 - h_5S_1S_2S_3S_4S_5 + C_1C_4h_5S_5, \\
&C_3h_5S_2S_4S_5 - C_2h_5S_3S_4S_5, 1)^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{65}\bar{a}_4 &= (-C_1C_3h_5S_2S_5 - C_1C_2h_5S_3S_5 - C_1C_2C_3C_4C_5h_5 + C_1C_4C_5h_5S_2S_3 - C_5h_5S_1S_4, \\
&-C_3h_5S_1S_2S_5 - C_2h_5S_1S_3S_5 - C_1C_3C_4C_5h_5S_1 + C_4C_5h_5S_1S_2S_3 + C_1C_5h_5S_4, \\
&-C_2C_3h_5S_5 + h_5S_2S_3S_5 + C_3C_4C_5h_5S_2 + C_2C_4C_5h_5S_3, 1)^T
\end{aligned}$$

$$U_{66}\bar{a}_4 = (0, 0, 0, 1)^T$$

Векторы $A_{i,0}\bar{a}_3 = A_{i,0}(0; 0; 1; 0)^T$, $i = \overline{0,5}$ представляют собой третьи столбцы матриц $A_{i,0}$, получим

$$A_{0,0}\bar{a}_3 = (0, 0, 1, 0)^T$$

$$A_{1,0}\bar{a}_3 = (-S_1, C_1, 0, 0)^T$$

$$A_{2,0}\bar{a}_3 = (-S_1, C_1, 0, 0)^T$$

$$A_{3,0}\bar{a}_3 = (-C_1C_3S_2 - C_1C_2S_3, -C_3S_1S_2 - C_2S_1S_3, -C_2C_3 + S_2S_3, 0)^T$$

$$\begin{aligned}
A_{4,0}\bar{a}_3 &= (C_4S_1 - C_1C_2C_3S_4 + C_1S_2S_3S_4, -C_1C_4 - C_2C_3S_1S_4 + S_1S_2S_3S_4, \\
&C_3S_2S_4 + C_2S_3S_4, 0)^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{5,0}\bar{a}_3 &= (C_1C_3C_5S_2 + C_1C_2C_5S_3 - C_1C_2C_3C_4S_5 + C_1C_4S_2S_3S_5 - S_1S_4S_5, \\
&C_3C_5S_1S_2 + C_2C_5S_1S_3 - C_2C_3C_4S_1S_5 + C_4S_1S_2S_3S_5 + C_1S_4S_5, \\
&C_2C_3C_5 - C_5S_2S_3 + C_3C_4S_2S_5 + C_2C_4S_3S_5, 0)^T
\end{aligned}$$

Таким образом, получим матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} U_{61}\bar{a}_4 & U_{62}\bar{a}_4 & U_{63}\bar{a}_4 & U_{64}\bar{a}_4 & U_{65}\bar{a}_4 & U_{66}\bar{a}_4 \\ A_{0,0}\bar{a}_3 & A_{1,0}\bar{a}_3 & A_{2,0}\bar{a}_3 & A_{3,0}\bar{a}_3 & A_{4,0}\bar{a}_3 & A_{5,0}\bar{a}_3 \end{pmatrix}$$

Задачи кинематики манипуляторов становятся все более и более актуальными при исследовании современных робототехнических комплексов. Применение мощных пакетов компьютерной механики и математики позволяют автоматизировать расчеты и оптимизировать время, затраченное на получение достоверных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. – М.: Наука, 1976. 103 с.
2. Wolfram, St. The Mathematica Book. Fourth Edition. – Cambridge: Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.
3. Механика промышленных роботов: учеб. пособие для вузов: в 3 кн./ под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. – Кн. 1: Кинематика и динамика / Е. И. Воробьев, С. А. Попов, Г. И. Шевелева. – М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах // Специальные главы механики / М.И.Бать; под редакцией Г.Ю.Джанелидзе – М.: Наука, 1973. – Т. 3. – 488 с.