

# МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ В СУСТАВАХ ЧЕЛОВЕКА

Чигарев А.В.<sup>1</sup>, Борисов А.В.<sup>2</sup>

*Белорусский национальный технический университет, Минск<sup>1</sup>  
филиал ГОУ ВПО «Московский энергетический институт  
(Технический университет)», Смоленске<sup>2</sup>*

*The approach permitting modeling the work of a human joint as interacting surfaces with allowance of the change of physical-mechanical properties and damage accumulation in tissues, participating in motion in a joint is offered. The obtained results demonstrate changes going on in a site of a contact during ageing process.*

Описанию работы суставов человека и их патологий посвящено большое количество медицинской литературы. Исследованы патологии суставов, приводящие к тотальному эндопротезированию и описываются модели эндопротезов и дальнейшего наблюдения их эксплуатации [4, 8, 13, 15, 17, 21]. Авторы основное внимание уделяется анализу эмпирических данных. В работе [1] показано, что воспалительные процессы позвоночника приводят к изменению его механических свойств и в итоге к разрушению. Развитие заболевания моделируется постепенным уменьшением модуля Юнга для материала межпозвоночного диска от  $10^8$  до 0 Па. Имеются работы по моделированию механических свойств человеческого организма [19, 16], в которых рассматриваются модели на основе численного метода конечных элементов. Есть исследования, в которых определяются характеристики контакта при силовом взаимодействии твердых упругих тел [2, 3, 5, 12, 18, 22], основное внимание уделяется нахождению перемещения в центре, давления, размера площадки контакта, без учета процессов разрушения. В [10] рассматриваются модели износа цилиндрических тел, с учетом параметров качества поверхности и наличия покрытий на базе соотношений теории упругости и ползучести. Моделирование процессов разрушения проведено в работах [6, 9, 14].

Исследований описывающих разрушения суставов человека на базе теоретических положений механики деформируемого твердого тела, практически не имеется.

Разработано достаточное количество моделей, для которых вычислены характеристики контакта различных конфигураций поверхностей для материалов неживой природы. Однако отсутствуют методики расчета по моделям суставов человека, т.е. по органическим материалам. Материалы, работающие в условиях контактного взаимодействия и трения скольжения, обладают способностью трансформации исходной структуры. Переход от исходного состояния поверхности к эксплуатационному и последующему разрушению сопровождается сложными физико-механическими и структурными превращениями в приповерхностных слоях, которые целесообразно учитывать при расчете параметров контакта. В органических структурах этот процесс более сложен, так как с износом происходит и восстановление тканей. Но этот процесс ограничен временными рамками.

В данной работе предложен вариант учета износа и разрушения в органического вещества, позволяющий моделировать контакт пар трения в суставе человека с учетом процессов накопления повреждений и изменения физико-механических свойств в поверхностном слое контактирующих тел.

Триботехнические характеристики определяются не только исходными свойствами материалов, но и конкретным состоянием поверхностного слоя компонентов узла трения, структура которого может считаться однородной лишь ус-

ловно, с различной степенью идеализации. Элементами ее могут быть микроповреждения сустава, являющиеся следствием жизнедеятельности человека и возрастных изменений. В процессе эксплуатации сустава это инициирует рост концентрации повреждений, приводя в конечном итоге, к макроскопическим повреждениям.

В качестве модели выберем неоднородный изотропный слой, описываемый законом Гука. Будем предполагать, что он представляет собой композит, состоящий из  $n$  компонентов, характеризующихся упругими модулями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Каждый компонент описывается  $K_i, \mu_i$  – объемным и сдвиговым модулем упругости соответственно. Распределение  $K_i, \mu_i$  в исходном состоянии представляет собой композицию  $\delta$ -функций (сплошная линия на рис. 1):

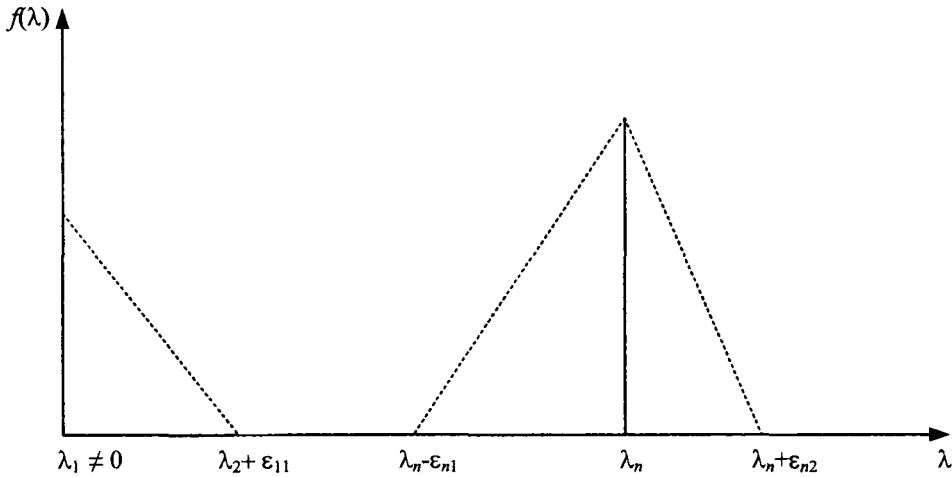


Рис. 1. Распределение упругих модулей в гетерогенном  $n$ -компонентном слое

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i \delta(\lambda - \lambda_i), \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1. \quad (1)$$

В процессе эксплуатации происходит накопление повреждений в рабочем слое, представляющее собой деградацию физико-механических и геометрических свойств материала. Это обуславливает изменение упругих, теплопроводных, пластических и триботехнических характеристик во времени. Поэтому исходная функция (1), согласно данным работы [20], через определенный промежуток времени трансформируется в распределение, например, следующего вида (пунктирная линия на рис. 1):

$$f(\lambda) = \begin{cases} S_i^{(\lambda)} \left( 1 + \frac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i1}} \right), & \lambda \in [\lambda_i - \varepsilon_{i1}, \lambda_i] \\ S_i^{(\lambda)} \left( 1 + \frac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i2}} \right), & \lambda \in [\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon_{i1}] \\ 0, & \lambda \notin [\lambda_i - \varepsilon_{i1}, \lambda_i] \cup [\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon_{i1}] \end{cases} \quad (2)$$

$$S_i = \frac{2c_i}{\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}}, \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Функция плотности вероятности (2) описывает параметры материала, в котором исходные физико-механические характеристики  $\lambda_i$  изменились, т.е. появились разброс свойств. При наличии пор в исходном состоянии считаем, что  $\lambda_2 = 0$ ,  $c_2 \neq 0$ .

Макроскопические характеристики поверхностного слоя  $\lambda_0$ , согласно методу самосогласования, вычисляются из условия равенства нулю средней поляризуемости, что соответствует равномерному распределению в среде повреждений [23]:

$$\langle \gamma \rangle = \left\langle \frac{\lambda - \lambda_0}{1 + I^{(\lambda)}(\lambda - \lambda_0)} \right\rangle = 0, \quad (3)$$

$$I^{(K)} = \frac{1}{K_0 + \frac{4}{3}\mu_0}; \quad I^{(\mu)} = \frac{2(K_0 + 2\mu_0)}{5\left(K_0 + \frac{4}{3}\mu_0\right)}. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) с учетом (2) примут вид

$$I^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^n S_i^{(\lambda)} \sum_{\beta=1}^2 \frac{A_{0i}^{(\lambda)} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}^{(\lambda)}}{\varepsilon_{i\beta}^{(\lambda)}} \ln \frac{A_{0i}^{(\lambda)} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}^{(\lambda)}}{A_{0i}^{(\lambda)}}; \quad A_{0i}^{(\lambda)} = \lambda - \lambda_0 + \frac{1}{I^{(\lambda)}}, \quad \lambda = K, \quad (5)$$

$\mu.$

При  $\varepsilon_{ij}^{(\lambda)} \rightarrow 0$ ,  $f(\lambda)$  переходит в распределение (1), а уравнения (5) – в уравнения самосогласованного поля для  $K_0$ ,  $\mu_0$ ,  $n$  – компонентной композиционной среды [23]:

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{(\lambda_i - \lambda_0)}{1 + I^{(\lambda)}(\lambda - \lambda_0)} = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим однородный материал с упругими коэффициентами  $K_1$ ,  $\mu_1$ , объемной концентрацией  $c_1$  и порами, характеризуемыми  $c_2 = c = 1 - c_1$ ,  $K_2 = 0$ ,  $\mu_2 = 0$ . Будем описывать изменение концентрации повреждений в процессе эксплуатации кинетическими уравнениями, например Качанова, Работнова, Голуба:

$$\frac{d(1-c)}{dt} = -A \left( \frac{\sigma}{1-c} \right)^N, \quad (7)$$

$$\frac{dc}{dt} = A \sigma^N (1-c)^{-N}, \quad (8)$$

$$\frac{dc}{dt} = A \left( \frac{\sigma}{1-c^N} \right) \left( \frac{1}{1-c} \right)^{\Omega(\sigma)}, \quad \Omega(\sigma) = \frac{\int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_b} \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} [\varphi_0(\varepsilon) - \sigma] d\varepsilon} - (2 + N). \quad (9)$$

Численный расчет по формулам (5) обладает тем недостатком, что при  $\varepsilon_{21} \rightarrow 0$  правая часть становится неопределенностью (типа 0/0), поэтому для малых  $\varepsilon_{21}$  решение неустойчиво.

Вычисления удобно вести на основе уравнения, полученного из соотношений (5) разложением правой части в ряд Маклорена, избавившись от неопределенности. Интегрируя уравнения (7), (8) или (9) и подставляя  $c(t)$  в полученные выражения для поврежденного слоя ( $\lambda_2 = 0$ ,  $\varepsilon_{21} = 0$ ,  $i = 1, 2$ ), обладающего битреугольным распределением свойств, получим систему двух нелинейных уравнений для расчета изменения эффективных упругих модулей за счет накопления повреждений:

$$I^{(\lambda)} = [1 - c(t)] \left[ \frac{1}{A_{01}^{(\lambda)}} + \frac{\varepsilon_{11}^{(\lambda)} - \varepsilon_{12}^{(\lambda)}}{(A_{01}^{(\lambda)})^2} \right] + c(t) \left[ \frac{1}{A_{01}^{(\lambda)} - \lambda_1} + \frac{\varepsilon_{22}^{(\lambda)}}{(A_{01}^{(\lambda)} - \lambda_1)^2} \right]. \quad (10)$$

Приведя это выражение к более удобному для вычислений виду, получим систему двух уравнений относительно  $K_0$  и  $\mu_0$ :

$$K_0 = \frac{\left(\frac{4}{3}\mu_0\right)^2 \left(K_1 + \frac{4}{3}\mu_0\right)^2}{[1 - c(t)] \left(K_1 + \frac{4}{3}\mu_0 + \varepsilon_{11}^{(k)} - \varepsilon_{12}^{(k)}\right) \left(\frac{4}{3}\mu_0\right)^2 + c(t) \left(\frac{4}{3}\mu_0 - \varepsilon_{22}^{(k)}\right) \left(K_1 + \frac{4}{3}\mu_0\right)^2} - \frac{4}{3}\mu_0, \quad (11)$$

$$\mu_0 = \frac{5}{4}\mu_0 \left(K_0 + \frac{4}{3}\mu_0\right) P - c(t) Q \frac{5}{4}\mu_0 \left(K_0 + \frac{4}{3}\mu_0\right) - \frac{1}{2}K_0,$$

$$P = \frac{1}{A_{01}^{(\mu)}} + \frac{\varepsilon_{11}^{(\mu)} - \varepsilon_{12}^{(\mu)}}{(A_{01}^{(\mu)})^2},$$

$$Q = -\frac{\mu_1}{A_{01}^{(\mu)}(A_{01}^{(\mu)} - \mu_1)} + \frac{\varepsilon_{11}^{(\mu)} - \varepsilon_{12}^{(\mu)}}{(A_{01}^{(\mu)})^2} + \frac{\varepsilon_{22}^{(\mu)}}{(A_{01}^{(\mu)} - \mu_1)^2}.$$

При  $\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$  уравнения (11) переходят в уравнения самосогласованного поля для  $K_0$  и  $\mu_0$  двухкомпонентной композиционной среды:

$$I^{(\lambda)} = \frac{[1 - c(t)]}{A_{01}^{(\lambda)}} + \frac{c(t)}{A_{01}^{(\lambda)} - \lambda_1}. \quad (12)$$

или в явном виде после преобразований:

$$K_0 = \frac{4\mu_0 K_1 [1 - c(t)]}{4\mu_0 + 3c(t)K_1}, \quad (13)$$

$$8\mu_0^2 + [9K_1 - 3K_1c(t) + 20\mu_1c(t) - 8\mu_1]\mu_0 - 9K_1\mu_1[1 - 2c(t)] = 0. \quad (14)$$

Как следует из формул (10) – (11), на зависимость  $\lambda_0(t)$  влияет несимметричность разброса, то есть величина  $\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}$ . Наличие разброса  $\varepsilon_{22}$ , обусловленное пористостью, позволяет получить зависимость эффективных упругих модулей  $\lambda_0$  от  $t$  для всех значений  $0 \leq c \leq 1$ . Для поврежденной среды без учета  $\varepsilon_{22}$  самосогласованный метод [8] дает обращение  $\lambda_0$  в нуль при  $c = 1/2$ . В терминах теории протекания это означает слияние пор в магистральную трещину.

Если в пределе взятое распределение переходит в комбинацию  $\delta$ -функций (1), то, соответственно, расчетные уравнения переходят в известные уравнения  $n$ -компонентной среды, получаемые методом самосогласования.

Рассмотрим модифицированную задачу Герца, позволяющую исследовать влияние накопления повреждений в контактирующих телах на характеристики площадки контакта. Заменяем в известных расчетных формулах упругие постоянные их эффективными значениями, рассчитанными на основе моделей (10)–(12):

$$\alpha(t) = \frac{P\eta(t)}{a} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1+\xi)(k^2+\xi)}}, \quad (15)$$

$$A(t) = \frac{P\eta(t)}{a} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1+\xi)\sqrt{\xi(1+\xi)(k^2+\xi)}}, \quad (16)$$

$$B(t) = \frac{P\eta(t)}{a} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(k^2+\xi)\sqrt{\xi(1+\xi)(k^2+\xi)}}. \quad (17)$$

$$\text{Здесь } \xi = \frac{\lambda}{a^2}, \frac{b}{a} = k, \eta(t) = \frac{3P}{8\pi} \left[ \frac{1 - \nu_0^+(t)}{\mu_0^+(t)} + \frac{1 - \nu_0^-(t)}{\mu_0^-(t)} \right].$$

Каждый из интегралов представляет собой функцию отношения осей эллиптической площадки контакта  $k$ . Обратимся теперь к рассмотрению случаев, когда интегралы в формулах вычисляются аналитически.

Решим задачу о контакте в суставе в виде двух сфер с радиусами  $R^+$  и  $R^-$ , которые приводятся в соприкосновение и прижимаются друг к другу нагрузкой  $p$ . Уравнение сферы в окрестности точки  $O$  запишем в виде [11]

$$Z = \frac{r^2}{2R}, \quad (18)$$

$$Z^+ = \frac{x^2}{2R^+} + \frac{y^2}{2R^+}, \quad (19)$$

$$Z^- = \frac{x^2}{2R^-} + \frac{y^2}{2R^-}. \quad (20)$$

Следовательно,

$$A = B = A^+ + A^- = \frac{R^+ + R^-}{2R^+R^-}. \quad (21)$$

Так как в суставе одинаковые материальные, в том числе и упругие константы

$$\frac{1 - \nu_0^-(t)}{\mu_0^-(t)} = \frac{1 - \nu_0^+(t)}{\mu_0^+(t)} = \frac{3K_0(t) + 4\mu_0(t)}{2\mu_0(t)[3K_0(t) + \mu_0(t)]}. \quad (22)$$

Тогда с учетом формул (15) – (17) получим:

$$\eta(t) = \left( \frac{3}{8\pi} \right) \frac{3K_0(t) + 4\mu_0(t)}{\mu_0(t)[3K_0(t) + \mu_0(t)]}. \quad (23)$$

$$\alpha(t) = [2\pi^2 p^2 \eta^2(t) A]^{\frac{1}{3}}. \quad (24)$$

Перейдем к численному анализу полученной модели. Выразим из уравнения (4.4.14)  $\mu_0$ . Получаем следующие корни:

$$\left\{ \left\{ \mu_0 \rightarrow \frac{1}{16} \left( -9k_1 + 3ctk_1 + 8\mu_1 - \sqrt{20ct\mu_1 - \sqrt{288(1-2ct)k_1\mu_1 + (9k_1 - 3ctk_1 - 8\mu_1 + 20ct\mu_1)^2}} \right) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \mu_0 \rightarrow \frac{1}{16} \left( -9k_1 + 3ctk_1 + 8\mu_1 - 20ct\mu_1 + \sqrt{288(1-2ct)k_1\mu_1 + (9k_1 - 3ctk_1 - 8\mu_1 + 20ct\mu_1)^2} \right) \right\} \right\}$$

Подставляем полученные корни и уравнение (13) в уравнения (23) и (24). После подстановки в уравнения остаются только следующие параметры, которые мы примем равными соответствующим средним характеристикам, определенным для человека [4, 7].

Модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^9$  Па;

Коэффициент Пуассона  $\sigma = 0,332$ ;

Связь объемного и сдвигового модулей упругости с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона имеет вид [11]:

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (25)$$

Контактное давление.  $p = 1.8136 \cdot 10^7$  Па. Размеры:  $R^+ = 0,015$  м;  $R^- = 0,014$  м.

Зададим концентрацию повреждений линейной зависимостью так, чтобы

значения  $c(t)$  содержались в отрезке  $[0, 1/2]$ , т.к. при превышающем значении поры сливаются в магистральную трещину и происходит фактическое разрушение и прекращение активной эксплуатации сустава. Предполагаем время жизни человека 100 лет:  $c(t) = t/200$ . Тогда, для первого корня  $\mu_0$ , графики имеют вид:

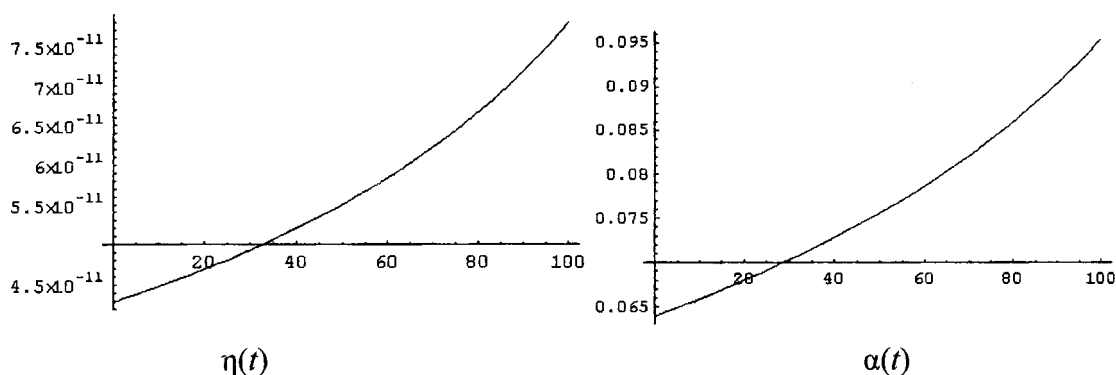


Рис. 2. Изменение характеристик площадки контакта в суставе вследствие деградации материала: а –  $\alpha(t)$ ; б –  $\eta(t)$

Для второго корня  $\mu_0$ , графики имеют вид, показанный на рис. 3.

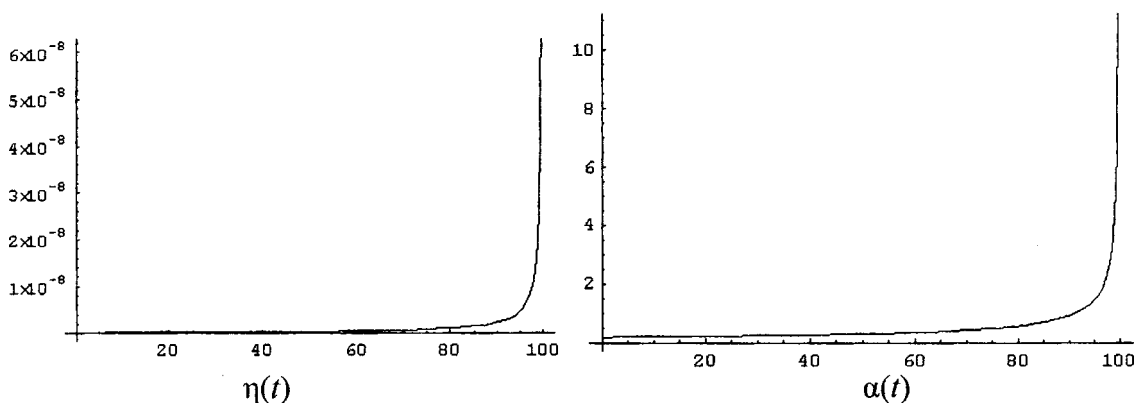


Рис. 3. Изменение характеристик площадки контакта в суставе вследствие деградации материала:  $\eta(t)$ ;  $\alpha(t)$

На рис. 2 и 3 линиями представлены расчетные зависимости  $\eta(t)$ ,  $\alpha(t)$ , полученные согласно соотношений (23), (24). Сравнивая с результатами, полученными в рамках классической задачи Герца, следует вывод о том, что расчет характеристик площадки контакта в суставе по предложенной методике дает более реальные результаты, указывающие на изменение условий контакта. Как следует из рис. 1 и 2, площадка контакта в данной модели в отличие от предлагаемых ранее и изменяется во времени и при  $t = 100$  лет наступает процесс разрушения. Таким образом, долговечность контактирующих поверхностей сустава, свойства которых изменяются во времени в зависимости от величины прилагаемых полей напряжений, температуры и других факторов, которые могут быть включены в кинетические уравнения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Афонин, П.Н. Методы и средства компьютерной диагностики позвоночника человека: дис. д-ра. техн. наук. – М., 2003. – 276 с.
2. Воронин, Н. А. Инженерный метод решения контактной задачи о взаимодействии цилиндрического штампа с упругим двухслойным полупространством // Трение и износ, 14. – 1994. – № 5. – С. 754-763.

3. Воронин, Н. А. Применение теории упругого контакта Герца к расчету напряженно-деформированного состояния слоистого упругого тела // Трение и износ, 14. – 1993. – № 2. – С. 250-258.
4. Гаврюшенко Н.С. Материаловедческие аспекты создания эрозионностойких узлов трения искусственных суставов человека: дис. ... д-ра техн. наук. – М., 2000. – 234 с.
5. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Наука, 1989.
6. Дрозд, С.Г. Контактное взаимодействие сферических пар трения с учетом накопления повреждений и изменения физико-механических свойств в поверхностном слое // Том 17, № 2 Трение и износ. Март-апрель. – 1996
7. Дубровский, В.И., Федорова, В.Н. Биомеханика.– М.: Владос-Пресс, 2003. – 672с.
8. Жилиев, А.А. Биомеханические и электрофизиологические критерии оценки функционального состояния опорно-двигательного аппарата нижних конечностей: дис. ... д-ра техн. наук. – М., 2003. – 177 с.
9. Коноваленко, И.С. Теоретическое исследование деформации и разрушения пористых материалов медицинского назначения и биомеханических конструкций: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2007.
10. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. – Минск: Технопринт, 2000. – 196 с.
11. Ландау, Л.Д., Лившиц, Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
12. Можаровский, В. В. Плоские контактные задачи для анизотропных покрытий с учетом трения // Трение и износ, 13. – 1992, № 5, 825-836
13. Пасынкова, И.В. разработка моделей и алгоритмов дифференциальной диагностики патологии коленного сустава: дис. ... канд. техн. наук. – Воронеж, 2005. – 108 с.
14. Романова, В.А. Моделирование процессов деформации и разрушения в трехмерных структурно-неоднородных материалах: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Томск, 2008. – 298 с.
15. Рыбалко, Д.Ю. Строение менисков коленного сустава человека и их фиксирующего аппарат в зрелом, пожилом и старческом возрастах: автореф. дис. ... канд. мед. наук. – Уфа, 2006. – 22 с.
16. Скворчевский, К.А. Волоконно-оптические измерительные системы в задачах биомеханики: дис. ... д-ра техн. наук. – М., 2004. – 184 с.
17. Сотин, А.В. Механика взаимодействия ножки эндопротеза тазобедренного сустава с кортикальным слоем бедренной кости: дис. ... канд. техн. наук. – Пермь, 2005. – 109 с.
18. Суслов, А.Г., Горленко, А.О. Контактное взаимодействие сферических пар трения // Трение и износ. – 15 (1994), № 4, 595-601
19. Тиманин, Е.М. Теоретические и экспериментальные основы виброакустической вискоэластографии мягких биологических тканей: дис. ... д-ра техн. наук. – Нижний Новгород, 2006. – 265 с.
20. Чигарев, А. В., Чигарев, Ю. В. Самосогласованный метод вычисления эффективных коэффициентов неоднородных сред с непрерывным распределением физико-механических свойств // Доклады АН СССР, 313 (1990), № 2, 292-295
21. Шатаева, Е.В. Биомеханические основы диагностики функционального состояния системы «эндопротез-кость»: дис. ... д-ра техн. наук. – СПб.:2003. – 208 с.
22. Matthewson, M. J. Axi-symmetric contact on thin complain coatings // J. Mech. Phys., 29 (1981), No 2, 89.
23. Kroner, F. Elastic moduli of perfectly disordered composite materials // J. Mech. And Phys. Solids, 15 (1967), No 5, 319-324.