УДК 539.3

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Гончарова С.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In article the operational method of the decision of system of the differential equations of thermoelasticity is considered.

Представим дифференциальные уравнения термоупругости [1]

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{j,ji} + X_i = \rho \ddot{u}_i + \gamma\Theta_{,i}, \tag{1}$$

$$\Theta_{,jj} - (1/\chi)\dot{\Theta} - \eta\dot{e} = -Q/\chi, \tag{2}$$

в более удобном для дальнейших рассуждений операторном виде

$$L_{ij}(u_j) + L_{i4}(\Theta) = -F_i, \tag{3}$$

$$L_{4i}(u_i) + L_{44}\Theta = -Q/\chi,\ i,j = 1,2,3. \tag{4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$L_{ij} \equiv \square_2^2\delta_{ij} + a\partial_i\partial_j,\ L_{i4} \equiv -\gamma_0\partial_i,\ L_{4i} \equiv -\eta\partial_t\partial_i,\ L_{44} \equiv \square_3^2,$$

$$F_i \equiv X_i/\mu,\ \gamma_0 \equiv \gamma/\mu,\ a \equiv (\lambda+\mu)/\mu.$$

Уравнения (3) и (4) можно записать также в виде слебдующей таблицы, составленной из операторов и свободных членов:

	u_1	u_2	u_3	Θ	
I	$\square_2^2 + a\partial_1^2$	$a\partial_1\partial_2$	$a\partial_1\partial_3$	$-\gamma_0\partial_1$	$-F_1$
II	$a\partial_2\partial_1$	$\square_2^2 + a\partial_2^2$	$a\partial_2\partial_3$	$-\gamma_0\partial_2$	$-F_2$
III	$a\partial_3\partial_1$	$a\partial_3\partial_2$	$\square_2^2 + a\partial_3^2$	$-\gamma_0\partial_3$	$-F_3$
IV	$-\eta\partial_t\partial_1$	$-\eta\partial_t\partial_2$	$-\eta\partial_t\partial_3$	$\square_3^2$	$-Q/\chi$

(5)

Введем четыре функции χ_i (i = 1, 2, 3, 4), связанные с перемещениями и температурой следующим образом:

$$u_1 = \begin{vmatrix} \chi_1 & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \chi_2 & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ \chi_3 & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ \chi_3 & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & \chi_1 & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & \chi_2 & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & \chi_3 & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & \chi_4 & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix},$$

$$u_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \chi_1 & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & \chi_2 & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & \chi_3 & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & \chi_4 & L_{44} \end{vmatrix}, \quad \Theta = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \chi_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \chi_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \chi_3 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & \chi_4 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Остановимся более подробно на нахождении u_1. Раскладывая определитель по первому столбцу, запишем

$$\mathrm{U1} = \begin{vmatrix} L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} X_1 - \begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} X_2 + \begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} X_3 -$$

$$-\begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} \end{vmatrix} X_4$$

Прежде, чем вычислить эти определители установим зависимость между $\square_2^2$ и $\square_1^2$. Имеем $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$; $c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\rho} = (\alpha+1)c_2^2$ или $c_2^2 = \frac{c_1^2}{\alpha+1}$ где $\alpha = \frac{\lambda+\mu}{\mu}$, тогда

$\square_2^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\partial_t^2 = \nabla^2 - \frac{\alpha+1}{c_1^2}\partial_t^2 = \nabla^2 + \alpha\nabla^2 - \frac{\alpha+1}{c_1^2} - \alpha\nabla^2 = (\alpha+1)\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\right) - \alpha\nabla^2 = (\alpha+1)\square_1^2 - \alpha\nabla^2.$

Таким образом $\square_2^2 = (\alpha+1)\square_1^2 - \alpha\nabla^2$ или $\square_2^2 + \alpha\nabla^2 = (\alpha+1)\square_1^2$.

Найдем эти определители, рассматривая операторы, как числа. Это даст следующие выражение для перемещения u_1:

$$u_1 = (\Omega - \partial_1^2\Gamma)\varphi_1 - \partial_1\partial_2\Gamma\varphi_2 - \partial_1\partial_3\Gamma\varphi_3 + \gamma_0\partial_1\square_2^2\varphi_4.$$

Используя симметрию операторов по аналогии устанавливаем другие соотношения:

$$u_2 = -\partial_2\partial_1\Gamma\varphi_1 - (\Omega - \partial_2^2\Gamma)\varphi_2 - \partial_2\partial_3\Gamma\varphi_3 + \gamma_0\partial_2\square_2^2\varphi_4, \qquad (7)$$

$$u_3 = -\partial_3\partial_1\Gamma\varphi_1 - \partial_3\partial_2\Gamma\varphi_2 - (\Omega - \partial_3^2\Gamma)\varphi_3 + \gamma_0\partial_3 \,?_2^2\varphi_4,$$

$$\Theta = \eta\partial_t\partial_1\square_2^2\varphi_1 + \eta\partial_t\partial_2\square_2^2\varphi_2 + \eta\partial_t\partial_3\square_2^2\varphi_3 + (1+a)\square_1^2\square_2^2\varphi_4.$$

Здесь

$$\Omega \equiv (1+a)\square_1^2\square_3^2 - \gamma_0\eta\partial_t\nabla^2, \qquad \Gamma \equiv a\square_3^2 - \gamma_0\eta\partial_t.$$

Введем обозначение $\psi \equiv \square_2^2\varphi_4$ и запишем соотношения(7) в более компактном виде

$$u_i = (\Omega\delta_{ij} - \partial_i\partial_j\Gamma)\varphi_j + \gamma_0\partial_i\psi, \qquad (8)$$

$$\Theta = \eta\partial_t\partial_j\square_2^2\varphi_j + (1+a)\square_1^2\psi, \qquad i,j = 1,2,3,$$

или в векторной форме

$$\vec{u} = \Omega\vec{\varphi} - \operatorname{grad}\ \operatorname{div}(\Gamma_\varphi) + \gamma_0 \operatorname{grad}\psi,\ \Theta = \eta\partial_t \operatorname{div}\square_2^2\vec{\varphi} + (1+a). \qquad (9)$$

Функции $\vec{u}$ и Θ выражаются через векторную функцию $\vec{\varphi}$ и скалярную функцию ψ, функцию $\vec{\varphi}$ можно рассматривать как обобщение на динамические задачи термоупругости векторной функции Галеркина. Подставляя соотношения (7) и (8) (или (9)) в уравнения (3) и (4) (или (5), после преобразований получим систему четырех уравнений

$$\square_2^2[\square_1^2\square_3^2 - m\eta\partial_t\nabla^2]\varphi_i + X_i/(c_1^2\rho) = 0, \quad i = 1,2,3, \qquad (10)$$

$$[\square_1^2\square_3^2 - m\eta\partial_t\nabla^2]\psi + Q\mu/(\chi c_1^2\rho) = 0. \qquad (11)$$

К уравнениям (10), (11) следует добавить тепловые краевые условия, краевые условия для перемещений или напряжений и начальные условия. Решение уравнений (10), (11) существенно упрощается в случае неограниченной термоупругой среды. Здесь нет краевых условий в точном смысле этого слова; вместо них выдвигается постулат обращения в ноль напряжений и температуры на бесконечности, если массовые силы и тепловые источники действуют в ограниченной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий, В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.