

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ РЕОНОМНОГО СТЕРЖНЯ С МАССОЙ НА КОНЦЕ

Холодарь Б.Г.

Брестский государственный технический университет, Брест

Considered is the development in time of stresses and strains in the straight rod with a rigid mass ($M > 0$) at the free end during an impact with an absolute-rigid motionless barrier of infinite weight. Material of the rod is a rheonomic elastic-plastic body described by Maxwell's equation with nonlinear viscosity.

В [1,2] рассмотрена задача об ударе жесткой массой по свободному торцу прямого закрепленного стержня из реономного упруго-пластического материала без упрочнения с вязкостью, экспоненциально зависящей от достигнутого уровня напряжений. Проанализированы некоторые особенности изменения во времени напряженно-деформированного состояния стержня в зависимости от отношения масс стержня и ударника, скорости соударения, реологических свойств материала.

В настоящей работе рассматривается поведение стержня с массой на конце ($x=0$), который своим другим концом ($x=L$) наносит удар по абсолютно-жесткой неподвижной пре-граде бесконечной массы. При $t < 0$ скорости всех точек стержня и массы M одинаковы. При $M=0$ получаем задачу об ударе только самим стержнем. Методика решения задачи совпадает с использованной в [1].

Связь напряжений и деформаций в материале описывается уравнением Максвелла

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{Edt} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (1)$$

где σ , ε – напряжение и деформация; t – время, E – модуль упругости; $\eta = \eta_0 \exp(-\beta|\sigma|)$ – вязкость материала; η_0 , β – реологические параметры (константы).

Уравнения движения системы “стержень-масса” вдоль оси x имеют вид

$$v'_0 = \frac{\mu}{\beta E} p_0, \quad p'' + \chi(1 + \text{abs}(p)) \exp(\text{abs}(p)) p' - p''_{\xi} = 0, \quad (2)$$

где дополнительно обозначено $v=V/c$, $V, \text{м/с}$ – скорость массы M (индексом “0” отмечены значения переменных на торце с прикрепленной массой), $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость звука в стержне, ρ – плотность материала, $\mu = m/M$, $m = \rho AL$ – масса стержня, A и L – его длина и площадь, $\chi = \frac{L\sqrt{E\rho}}{\eta_0}$, $p = \beta\sigma$, p''_{ξ} – вторая производная по безразмерной продольной координате $\xi = x/L$, штрихами обозначены производные по безразмерному времени $\tau = t \frac{c}{L}$.

Числовые значения констант уравнений соответствуют использованным в [1]: $E = 2e11 \text{Па}$, $\eta_0 = 1e11 \text{Па/с}$, $\beta = 5e-8 \text{Па}^{-1}$, $\rho = 7.8e3 \text{Кг/м}^3$, $d = 5e-3 \text{м}$ (диаметр стержня). Для $M = 1 \text{Кг}$, $L = 1 \text{м}$ имеем $\mu \approx 0.153$.

В целом, поведение стержня аналогично рассмотренному в [1], но наличие у точек исходной кинетической энергии приводит к возрастанию влияния реологических факторов на поведение механической системы. В связи с большим количеством параметров, контролирующих развитие напряженно-деформированного со-

стояния при ударе, невозможно однозначно определить роль каждого. Зависимость напряжений в материале от скорости деформирования не позволяет также свести задачу к изучению только роли исходного количества движения и кинетической энергии системы.

При решении задачи граничные условия после отскока стержня от преграды не изменялись, поэтому соответствующий участок движения на рисунках имеет иллюстративный характер.

Удар начинается нагружением свободного конца стержня. При $M=0$ на всем времени первого прохода волны по стержню для малых скоростей ($V_0 < 1$) напряжение на фронте волны практически не меняет свой уровень, поскольку при использованном в расчетах значении начальной вязкости $\eta_0 = 1 \text{ е11 Па/с}$ затухание невелико. Роль затухания сказывается не столько на уровне σ и ϵ , сколько на крутизне фронта волны, движущейся вдоль стержня. Если скорость соударения V_0 увеличивать, то проявления реономности материала становятся заметными уже на первом проходе – напряжения на ударяемом торце непропорциональны скорости соударения и непосредственно после удара падают, вызывая на кривой $\sigma(\epsilon)$ появление “зуба текучести”, хотя сам процесс соударения, как и при упругом подходе, заканчивается при $\tau = 2$. При дальнейшем нарастании скорости V_0 смена знака напряжений происходит при $\tau > 2$.

При $M \neq 0$ место реализации максимума напряжений зависит от скорости соударения — с ростом V_0 максимум от ударяемого торца переходит на торец с прикрепленной массой, что является общим моментом с задачей [1]. Влияние скорости V_0 на уровень реализующегося максимума напряжений σ_{max} при заданных реологических параметрах иллюстрируется кривой 1 на рис.1, а влияние величины прикрепленной массы – кривой 2. Как и в [1], зависимость $\sigma_{\text{max}}(V_0)$ не является монотонной. Отклонения от монотонности соответствуют изменениям числа проходов волн по стержню до момента достижения σ_{max} . Число этих проходов в реономном материале весьма ограничено, и после достижения напряжениями на торцах максимальных значений имеет место спад напряжений с последующим выходом материала на участок текучести.

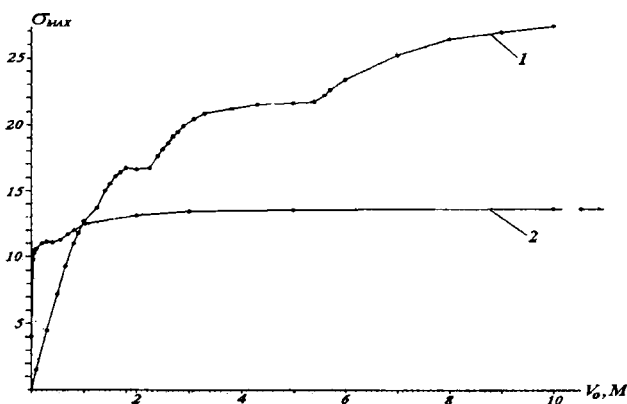


Рис. 1. Зависимость максимальных напряжений в стержне от скорости соударения V_0 и прикрепленной массы M . $\eta_0 = 1 \text{ е11}$. Кривая 1 – $\sigma_{\text{max}}(V_0)$, $M=1$; кривая 2 – $\sigma_{\text{max}}(M)$, $V_0=1$

Если масса M невелика сравнительно с массой стержня, процессы отражения волнового фронта от торцов влияют на изменение напряженно-деформированного состояния в течение значительного числа проходов волн по стержню (без учета нарушения связей на торцах стержня). Наличие рассеяния энергии приводит к тому, что с ростом скорости соударения V_0 роль отражений уменьшается и появляется продолжительный по времени неволновой участок движения, на котором

идет накопление пластических деформаций при постепенном снижении напряжений до нуля.

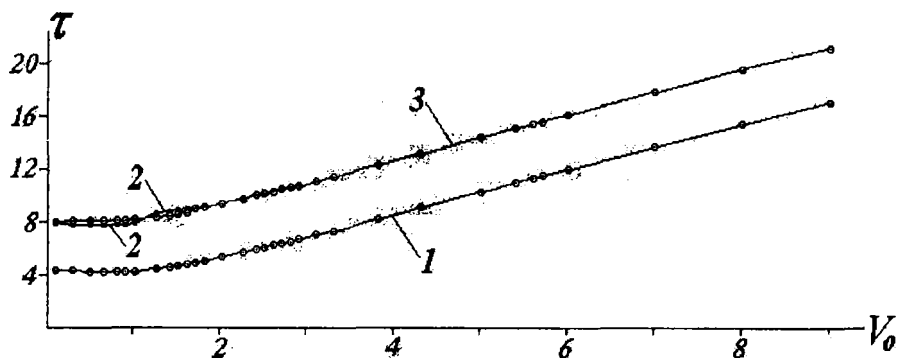


Рис. 2. Зависимость времени смены знака скорости массы $M=1$ (кривая 1) и напряжений на торцах $\xi=0$ и $\xi=1$ стержня (кривые 2,3 соответственно) от скорости соударения

В проведенных расчетах смена знака скорости массы M происходит раньше, чем смена знака напряжений на ударяемом торце. Изменение знака напряжений соответствует нарушению связей стержня с преградой или массой и его отскоку от преграды с последующей сменой характера движения. Переход напряжений через нуль на торце с прикрепленной массой может наступить даже раньше, чем на ударяемом торце (рис.2). Начиная с некоторого значения V_0 уровень напряжений $\sigma = 0$ на обоих торцах стержня достигается практически одновременно. Промежуток времени между моментом смены знака скорости массы M и моментом разрушения связей на торцах стержня остается далее одинаковым и близким кратному числу проходов волн напряжений по стержню, увеличиваясь с ростом прикрепленной массы и уменьшаясь с ростом длины стержня ($\Delta\tau = 3$ для $L=2$, $\Delta\tau = 4$ для $L=1$ при $M=1$, $\eta_0=1e11$). В момент времени нарушения связей скорость массы M всегда противоположна начальной, а потому будет иметь место отскок стержня от преграды.

В качестве примера на рис. 3 показано развитие напряженно-деформированного состояния на торцах и в средней точке стержня при нескольких значениях начальной вязкости η_0 , скорости соударения V_0 и массы M . Из этих рисунков видно, что получаемые для разных точек стержня зависимости $\sigma(\epsilon)$ достаточно сложны и разнообразны по форме и не повторяют друг друга. "Зубцы" на кривых $p(\epsilon)$ соответствуют моментам отражения волн от торцов стержня. С ростом V_0 и M волновые процессы сказываются на форме кривых $\sigma(\epsilon)$ все в меньшей степени, сами кривые становятся более гладкими, однако даже для аперiodического режима нагружения (рис.3, г) они по форме не совпадают с кривыми, построенными в режимах неударных испытаний ($d\epsilon/dt = const$ или $d\sigma/dt = const$). Поскольку деформации $\epsilon(x, t)$ в опытах получают не в точке, а на некоторой конечной базе, то соответствующие им скорости деформаций $\partial\epsilon(x,t)/\partial t$ будут меньше фактических, а потому последующее восстановление напряжений по реологическим уравнениям не позволит определить все особенности искомой связи $\sigma(\epsilon, x)$.

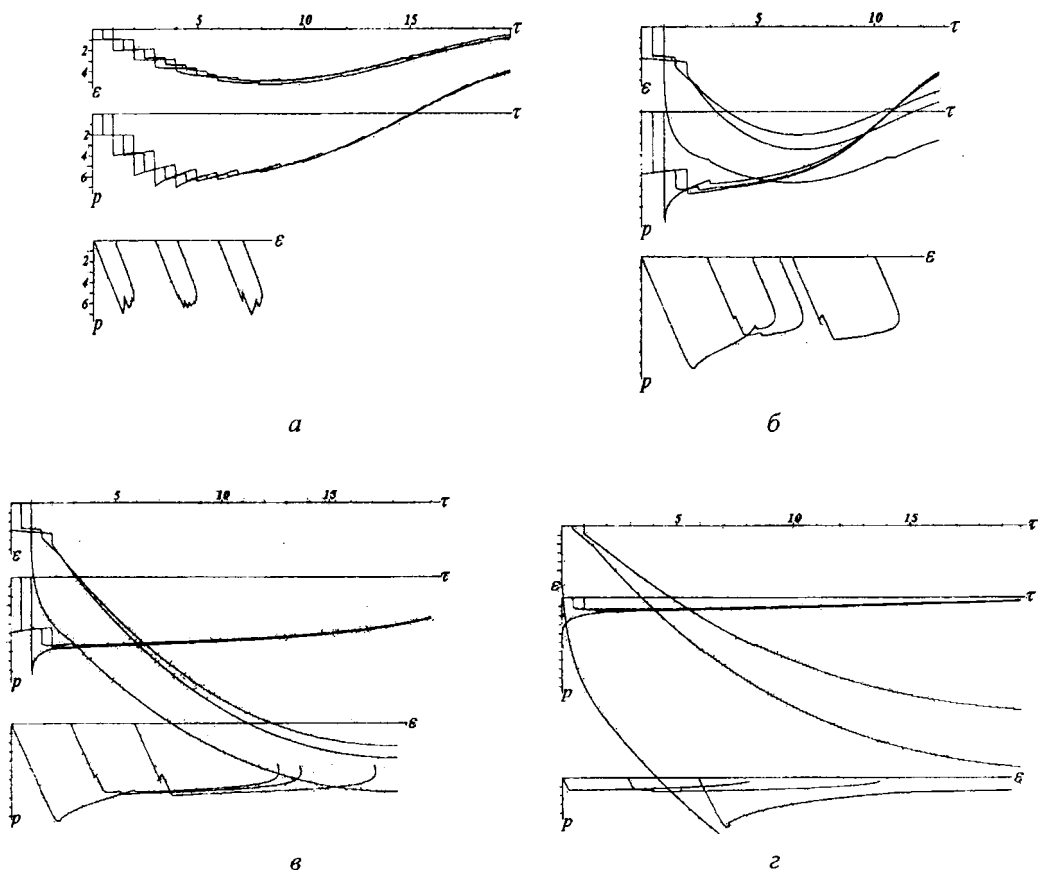


Рис. 3. Зависимости $p(\tau)$, $\varepsilon(\tau)$ и $p(\varepsilon)$ в торцевых и среднем сечениях стержня ($\tau \leq 20$).
 а: $\eta_0 = 1e11$, $M=3$, $V_0=1$; б: $\eta_0 = 1e11$, $M=1$, $V_0=3$; в: $\eta_0 = 1e11$, $M=3$, $V_0=3$; г: $\eta_0 = 1e8$, $M=1$, $V_0=3$. Кривые $p(\varepsilon)$ для $\xi=1.0$, $\xi=0.5$, $\xi=0.0$ (слева направо). Масштаб деформаций $\varepsilon_* = \varepsilon \cdot 5000$

Распределение деформаций по длине стержня неравномерно. При малых V_0 уровень достигнутых полных деформаций вдоль всего стержня примерно одинаков, но с ростом скорости удара уровни деформаций на торцах расходятся между собой тем значительнее, чем больше скорость и масса M . По времени ε_{\max} достигается всегда прежде, чем скорость груза меняет знак, а для стержня без груза – в момент смены знака напряжений на ударяемом торце ($\tau \geq 2$). На рис.4 показано распределение деформаций вдоль оси стержня (случай $M=0$) в фиксированные моменты времени (упругая компонента деформаций на графиках не исключена).

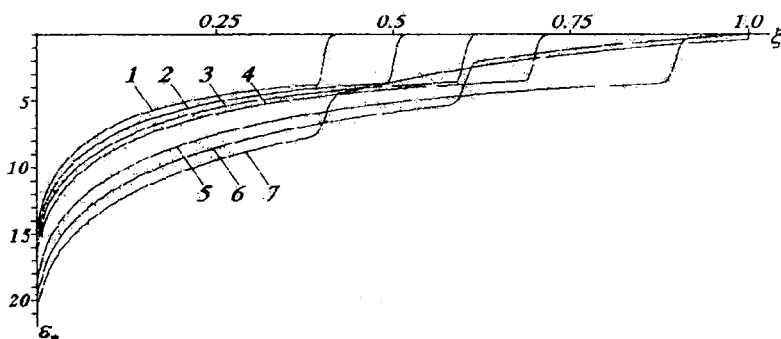


Рис. 4. Распределение полных деформаций по длине стержня. Обозначено: кривые 1–7 – зависимости $\varepsilon(\xi, \tau)$ при $\tau \approx 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 1.1, 1.4, 1.6$ соответственно ($\eta_0 = 1e11$, $V_0=6$). Масштаб деформаций $\varepsilon_* = \varepsilon \cdot 5000$

Сравнение приведенных на рис.4 кривых $\varepsilon(x, t)$ с экспериментальными [3, 4] показывает их качественное соответствие. Поскольку задача об описании опытных данных специально не ставилась, подбор параметров уравнений с целью приближения расчета к эксперименту не производился, и поэтому на сделанное сравнение следует смотреть только как на подтверждение принципиальной применимости исходных реологических уравнений к описанию ударных процессов.

Представление о зависимости достигаемых полных деформаций в стержне от скорости соударения дается рис. 5.

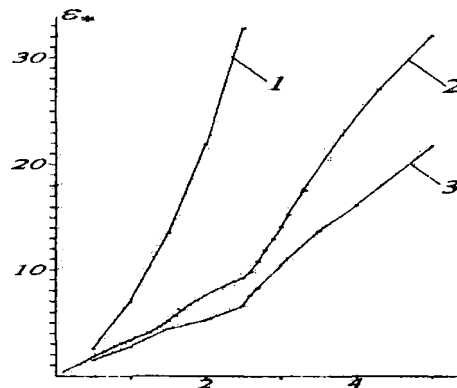


Рис. 5. Зависимость максимальных деформаций от скорости соударения. $M=1$; кривая 1 – $\eta_0=1e8, L=2$; кривая 2 – $\eta_0=1e11, L=1$; кривая 3 – $\eta_0=1e11, L=2$. Масштаб деформаций $\varepsilon_* = \varepsilon \cdot 5000$

Влияние длины стержня на характер движения системы можно проанализировать, учитывая, что параметры μ и χ ей пропорциональны, однако в связи с нелинейным характером исходных уравнений целесообразно использование результатов непосредственного численного решения. Это замечание относится и к случаям заметного изменения других параметров задачи.

Для рассматриваемой задачи имеет место аperiодическое решение (см. рис. 3г). Возможность его появления контролируется тем же комплексным параметром, что и в [1], так как этот параметр вытекает из уравнений движения (2) и не зависит от начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Г. Холодарь. Продольный удар по стержню из реономного материала. Сборник статей XVI Международного научно-методического семинара 28-30 мая 2009г. "Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь". Брест, 2009, стр. 191-196.
2. Б.Г. Холодарь. Ударное нагружение стержня из реономного упруго-пластического материала. The Third International Conference Deformation & Fracture of Materials and Nanomaterials DFMN2009 Moscow 2009. Сборник материалов Третьей международной конференции "Деформация и разрушение материалов и наноматериалов", Москва, 12-15 октября 2009. Под общей редакцией академика О.А.Баннх. – М.: Интерконтакт Наука, том 2, 407с. (в 2 т.). Тезисы доклада, том 2. – С. 397-398.
3. П. Пэжина. Основные вопросы вязкопластичности / пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 175 с.
4. Дж.Ф. Белл. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел: в 2 ч.: пер. с англ. – М.: Наука, 1984. – Ч. II: Конечные деформации. – 432 с.