

Коваль Ю.Г., Томило Е.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The decision of a problem of Hertz on interaction of two hemispheres analytically and by means of program complex ANSYS 12 is presented. Static and dynamic problems are solved.

При решении технических контактных проблем машиностроения широко используется задача Герца. При расчёте современных машин и механизмов пятно контакта принимают в виде линии либо прямоугольной площадки. Т.е. контактирующие поверхности имеют форму цилиндров. Однако вследствие погрешностей при изготовлении, сборке, монтаже, а также в результате износа часто имеет место точечный контакт взаимодействующих тел. В этом случае при моделировании используется задача взаимодействия двух сфер.

Постановка задачи

Необходимо рассмотреть деформации и напряжения в области соприкосновения двух шаров, прижатых друг к другу силами $P = 1000$ Па. Радиусы кривизны 30 мм и 60 мм, Модули Юнга $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3$.

Аналитическое решение задачи

Возьмём две точки A_1 и A_2 на поверхности шаров, находящихся на расстоянии ρ от оси z , проходящей через центры шаров (рис. 1). Расстояние между этими точками до деформации равно:

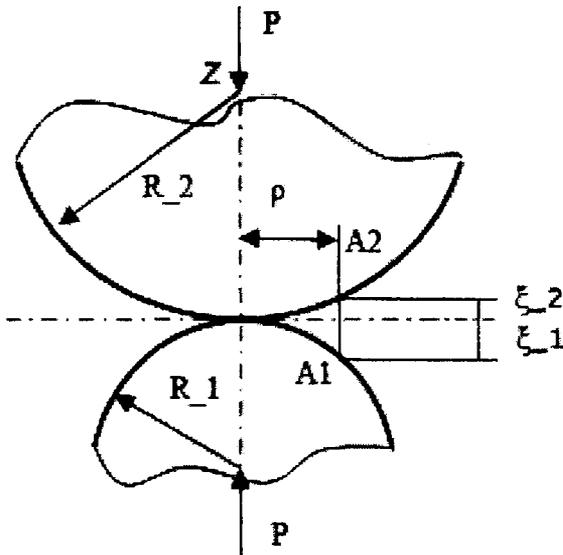


Рис. 1. Схематическое изображение контактирующих полусфер

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{\rho^2}{2R_1} + \frac{\rho^2}{2R_2} = \beta \rho^2,$$

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}.$$

Под действием нагрузки P шары сплющатся в месте соприкосновения, образовав плоскость контакта в форме круга радиуса a , и центры их сблизятся на величину δ . Если $a \geq \rho$, то точки A_1 и A_2 совместятся.

$$u_z^1 + u_z^2 = \delta - \beta \rho^2,$$

где u_z^1 и u_z^2 – вертикальные проекции перемещений точек A_1 и A_2 .

Считая шары приближённо за упругие полупространства, можно найти вертикальные проекции перемещений:

$$u_z^1 = \iint \frac{1 - \sigma_i^2}{\pi E_i} * \frac{p(r)}{s} dF,$$

где $p(r)$ – удельное давление на расстоянии r от оси z , s – расстояние от точки A_i , где определяется прогиб, до точки приложения нагрузки.

Составив сумму вертикальных проекций перемещений получим интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right) \iint \frac{p(r)}{s} dF = \delta - \beta \rho^2,$$

Решив это уравнение, Герц нашёл, что:

$$p(r) = \frac{p_{max}}{a} \sqrt{a^2 - r^2},$$

$$p_{max} = \frac{3P}{2\pi a^2},$$

$$a = \sqrt{\frac{3PR_1R_2}{4(R_1 + R_2)} \left(\frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right)},$$

$$\delta = \left(\frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right) \frac{\pi a}{2} p_{max}.$$

Наибольшее сжимающее напряжение – в центре площадки контакта: здесь материал работает в условиях всестороннего сжатия. Наибольшее растягивающее напряжение – на контуре площадки контакта и при наших условиях оно составляет $Z_{z=0} = 0,133p_{max}$

Далее приведём решение задачи Герца для нашего случая в пакете Mathcad

$$\begin{aligned} r1 &:= 30 \cdot 10^{-3} & \sigma &:= 0.3 \\ r2 &:= 60 \cdot 10^{-3} & \sigma1 &:= \sigma \\ & & \sigma2 &:= \sigma \\ E &:= 2 \cdot 10^{11} & P &:= 1000 \\ E1 &:= E \\ E2 &:= E \end{aligned}$$

$$a := \sqrt{\left[\left(\frac{1 - \sigma1^2}{E1} + \frac{1 - \sigma2^2}{E2} \right) \cdot \frac{3 \cdot P \cdot r1 \cdot r2}{4 \cdot (r1 + r2)} \right]} \rightarrow 0.00051488576345776852711$$

$$PM := \frac{3 \cdot P}{2 \cdot \pi \cdot a^2} \rightarrow 1.80102449191095017482622e9$$

$$\delta\delta := \left(\frac{1 - \sigma1^2}{E1} + \frac{1 - \sigma2^2}{E2} \right) \cdot \frac{\pi \cdot a}{2} \cdot PM \rightarrow 0.0000132553674705744581962608$$

$$Z0 := 0.133 \cdot PM \rightarrow 2.39536257424156373251887e8$$

Моделирование в программном комплексе ANSYS 12

Решение производилось методом конечных элементов, реализованном в программном пакете ANSYS 12. Он позволяет быстро, наглядно и достаточно точно произвести данный расчёт.

В первую очередь следует построить модели в SolidWorks (рис. 2).

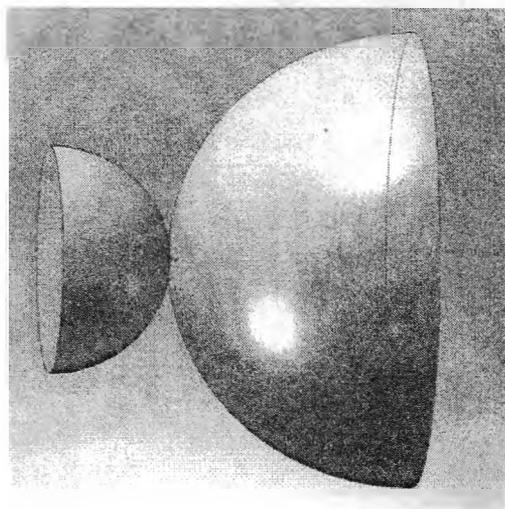


Рис. 2. Твёрдая модель

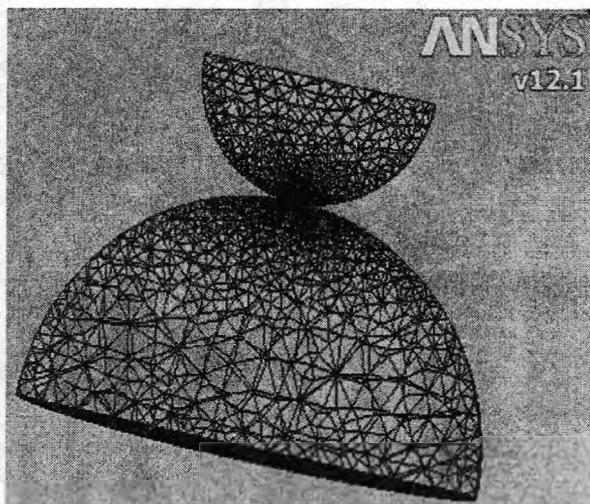


Рис. 3. Сеточная модель контактирующих полусфер

За модель взяты две касающиеся полусферы радиусами 30 и 60 мм. Далее модель импортируется в ANSYS 12 и разбивается на конечные элементы с угущением сетки в области контакта (рис. 3).

Непосредственное решение задачи производится в модуле Explicit Dynamics (ANSYS).

Здесь прикладываются сжимающие силы по 1000 Па к каждой полусфере (рис. 4).

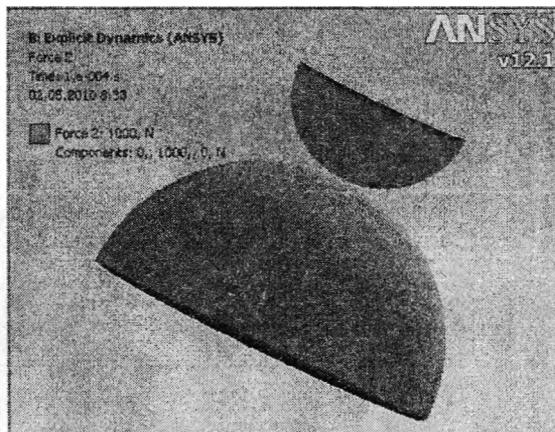
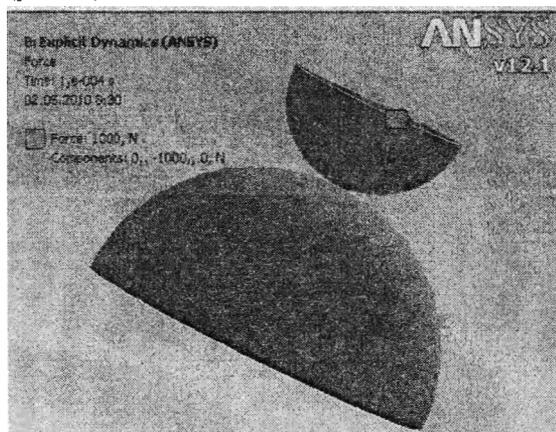


Рис. 4. Приложение нагрузок

Расчёт производился на промежутке времени 0,0001 с.

В результате решения имеем максимальные деформации $1,2201 \cdot 10^{-5}$ м (рис. 5). Погрешность решения в программном комплексе ANSYS 12,7,9 %, что вполне допустимо.

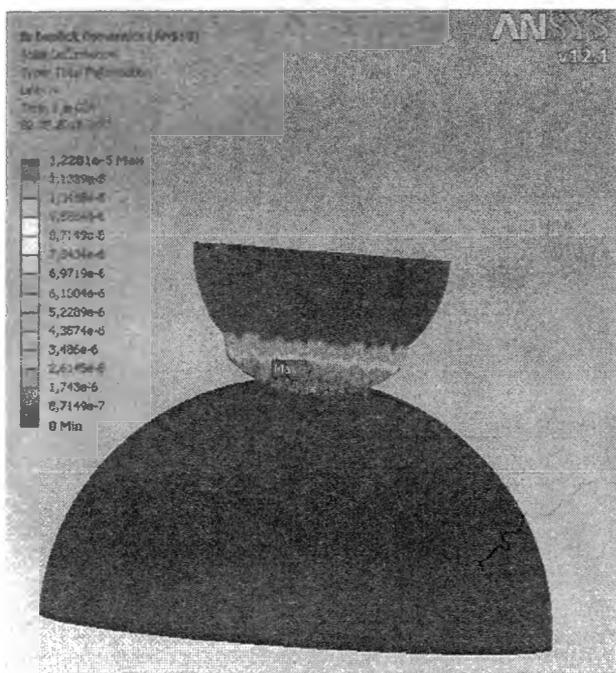


Рис. 5. Распределение деформаций

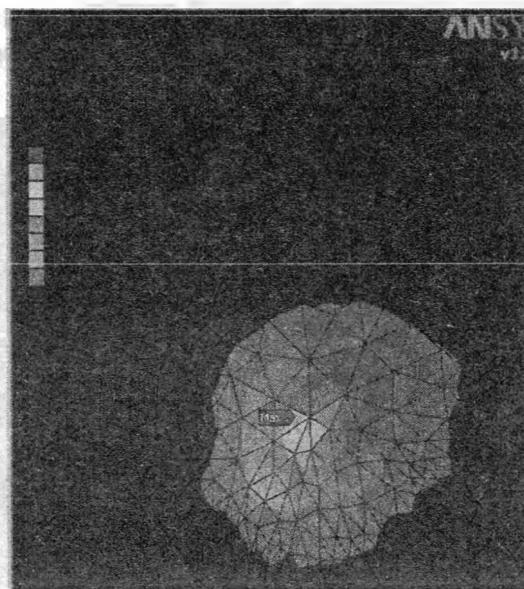


Рис. 6. Распределение напряжений

Напряжения на контуре площадки составили $2,48 \cdot 10^8$ Па (рис. 6.). Погрешность решения 3,5 %, что допустимо.

Более сложной является задача взаимодействия двух сфер, движущихся на встречу друг другу с высокими скоростями.

Рассмотрим два шара, движущихся на встречу со скоростями $v_1 = v_2 = 100$ м/с. Радиусы кривизны 30 и 60 мм, Модули Юнга $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3$.

В первую очередь производим построение модели в SolidWorks и импорт её в ANSYS (рис. 7).

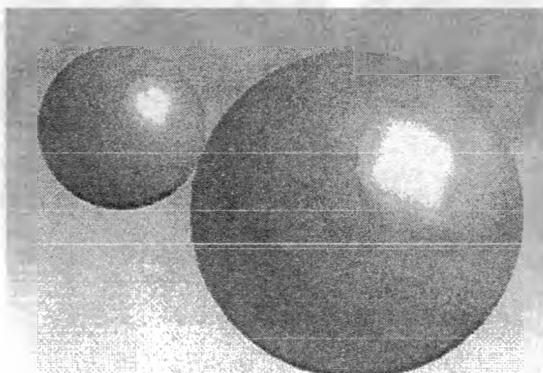


Рис. 7. Твёрдотельная модель

Затем разбиваем модель на конечные элементы и прикладываем скорости в каждому из шаров (рис. 8)

Расчёт будет производиться на промежутке времени 0,000015 с.

В результате решения были получены максимальные деформации 0,0015028 м и напряжения $1,456 \cdot 10^8$ Па (рис. 9).

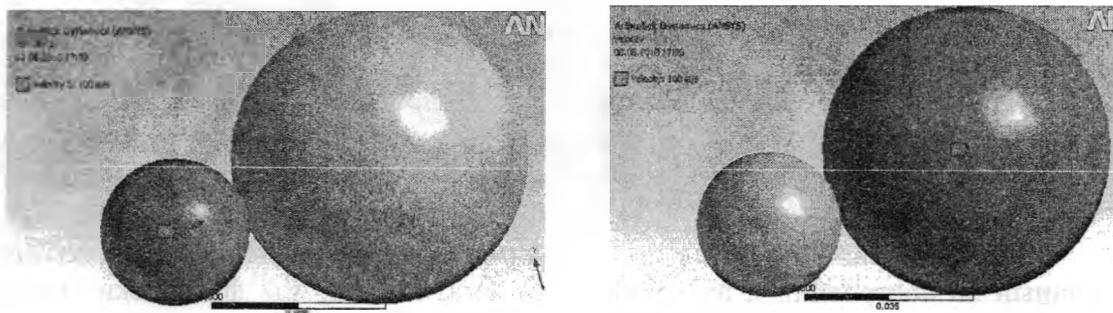


Рис. 8. Приложение скоростей

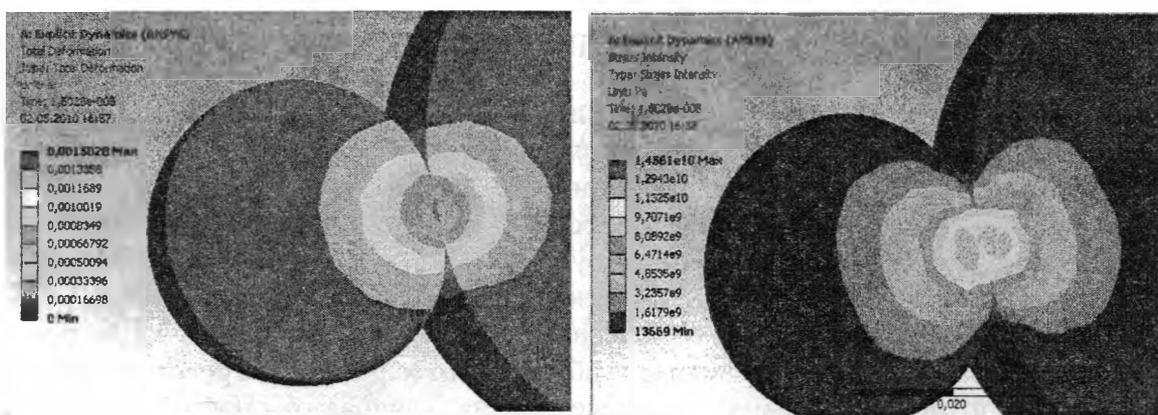


Рис. 9. Распределение деформаций

Вывод

В результате решения задачи Герца при взаимодействии двух полусфер аналитически и решения этой же задачи методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS получена погрешность для деформаций 7,9 % и для напряжений 3,5 %. Выбранный способ расчёта при достаточной точности позволяет значительно снизить время трудоёмкость расчётов, а также решать более сложные динамические задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров. – М.: Машиностроение, 2004. – 506 с.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.