

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ МНОГОСЛОЙНЫХ СФЕР К ЧИСЛЕННЫМ РАСЧЕТАМ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ТАЗОБЕДРЕННОМ СУСТАВЕ ЧЕЛОВЕКА

Чигарев А.В.¹, Борисов А.В.²

*Белорусский национальный технический университет, г. Минск¹
филиал ГОУ ВПО «Московский энергетический институт
(Технический университет)», Смоленск²*

In practice it is often necessary to carry out the analysis of systems, where there are multilayer objects and each layer has which it's own properties. In the article the deformations and pressure inside a system consisting of arbitrary final quantity of thick-walled orbs are investigated. The relations of pressure on the limits of orbs, stress tensors and deformations inside orbs are obtained.

В экспериментальных работах в Центральном институте травматологии и ортопедии РФ [1] установлено, что головка тазобедренного сустава является практически идеальной сферой, за исключением шейки бедра.

В работах гомельских ученых [2–4] показано, что смазка в суставе является жидкокристаллической и обеспечивает практически нулевое трение в зоне контакта и сглаживание всех несовершенств поверхности: шероховатостей, асферичности, неровностей и других отклонений поверхности от идеальной сферы. Эта смазка обеспечивает практически равномерное гидростатическое давление в суставе. Также имеет место внутреннее давление костного мозга на элементы сустава.

В исследовании учитывается многослойность и многокомпонентность структуры головки тазобедренного сустава: наличие надкостницы, кости, внутреннего губчатого вещества.

В процессе жизни человека в суставе происходят изменения, связанные с множеством причин. В результате этих изменения возникают отклонения формы от идеальной сферической, появляются шероховатости поверхности и неравномерности распределения давления. В дальнейшем мы исследуем эти случаи.

Создадим математические модели для различных приближений к реальному суставу или протезу, учитывающие различное количество слоев, из которых он состоит. Каждое решение для определенной модели является законченным и им можно непосредственно пользоваться при расчетах в реальных ситуациях, возникающих в практике [5-7].

Рассмотрим в качестве первого приближения, модель полого шара, внешним радиусом R_1 и внутренним R_2 , находящегося под действием внешнего давления p_1 и внутреннего p_2 (рис. 1).

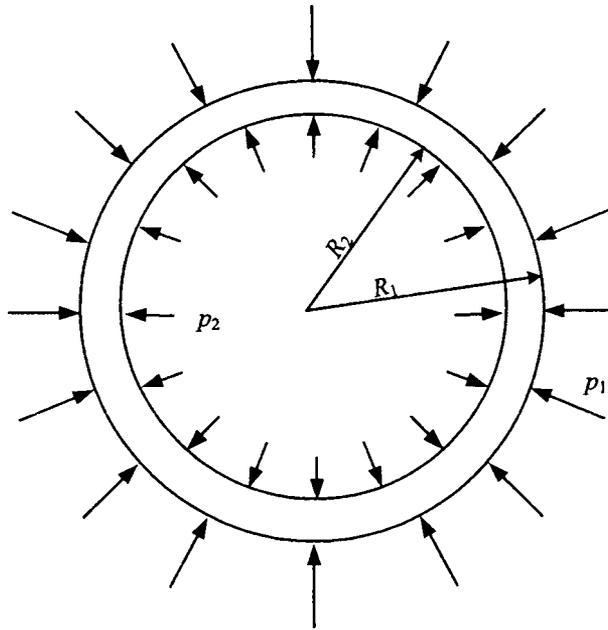


Рис. 1. Модель однослойной сферы, находящейся под действием внешнего и внутреннего давлений

Л.Д. Ландау и Е.М. Лившиц [8] в определении деформации полого шара приводят только одно решение данной задачи для однослойной оболочки. Ими получены компоненты тензора деформации в сферических координатах:

$$u_{rr} = a - 2b/r^3, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + b/r^3 \quad (1)$$

и радиальное напряжение

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}. \quad (2)$$

Постоянные a и b определены ими из граничных условий: $\sigma_{rr} = -p_2$ при $r = R_2$ и $\sigma_{rr} = -p_1$ при $r = R_1$:

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{2E}. \quad (3)$$

Авторы ограничились этим решением. Но оно открывает путь к решению более сложных задач, в том числе дает возможность описать аналитически предложенную нами модель.

Исходя из предложенной Л.Д. Ландау и Е.М. Лившицем результатов, мы можем записать формулы распределения напряжений по толщине шарового слоя для рассматриваемой однослойной сферы

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{R_2^3 - R_1^3} \left(p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3 - \frac{R_1^3 R_2^3}{r^3} (p_1 - p_2) \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R_2^3 - R_1^3} \left(p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3 + \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} (p_1 - p_2) \right),$$

где $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – угловые компоненты тензора напряжений.

Аналогично, подставляя формулы (3) в формулы (1) получаем компоненты тензора деформаций.

$$u_{rr} = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{1}{r^3} \cdot \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \quad (5)$$

$$u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Рассмотрим вариант, более приближенный к биологическому прототипу, одной оболочки и шар внутри – двухслойной модели (рис. 2). Система находится под действием внешнего давления p_1 . Под его действием происходит деформация оболочки, она сжимается, оказывая действие на шар, находящийся внутри нее с давлением p_2 . Шар на нее действует с тем же давлением.

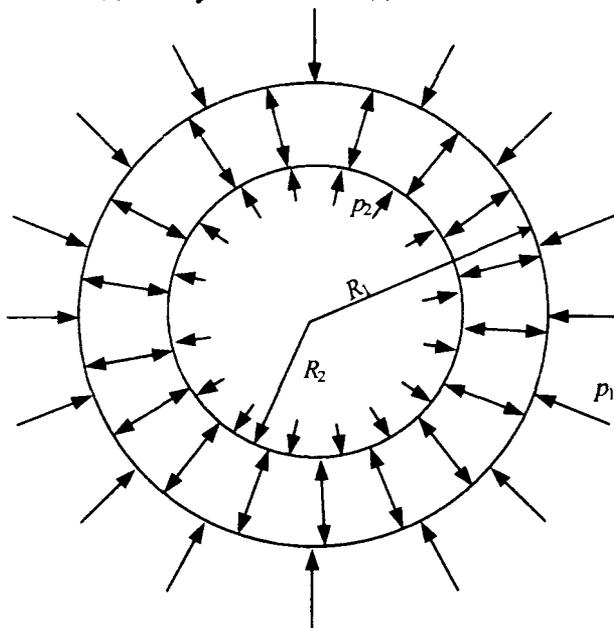


Рис. 2. Модель сферы и шара внутри нее, находящейся под действием внешнего давления

Цели решения данной задачи:

- 1) найти давление, которое оказывает внешняя сфера на шар внутри нее, считая внешнее давление известным;
- 2) найти совместную деформацию сферы и шара.

Полагая в формуле (5) $r = R_2$, где под R_2 понимается внутренний радиус внешней сферы, из радиальной компоненты тензора деформации получаем уравнение, линейное относительно неизвестного давления p_2 . Предположим, что упругие модули σ и E одинаковы для всех материалов модели.

$$\frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_1^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = -p_2 \frac{1-2\sigma}{E}. \quad (6)$$

Решая это уравнение, находим, что $p_2 = p_1$, т. е. как для однородного шара. Это естественный результат, подтверждающий правильность математического описания модели. В реальности модули Юнга E материалов и σ различны, что и наблюдается в реальном суставе человека. Это будет учитываться при рассмотрении уравнения (6) при помощи индексов. Для внешней оболочки индекс 1, для шара – 2.

$$\frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma_1}{E_1} - \frac{R_1^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma_1}{E_1} = -p_2 \frac{1-2\sigma_2}{E_2}. \quad (7)$$

Введем обозначения $\frac{1-2\sigma_i}{E_i} = a_i$, $\frac{1+\sigma_i}{E_i} = b_i$, $R_i^3 = d_i$, ($i = 1, 2$), $\frac{1}{R_{i+1}^3 - R_i^3} = c_i$ ($i=1$).

В результате введенных выше обозначений, уравнение (7) принимает вид

$$c_1 a_1 (p_1 d_1 - p_2 d_2) - d_1 c_1 b_1 (p_1 - p_2) = -p_2 a_2. \quad (8)$$

Перепишем данное уравнение в стандартном виде:

$$p_2(d_1c_1b_1 - d_2c_1a_1 + a_2) = p_1(d_1c_1b_1 - d_1c_1a_1). \quad (8')$$

Решая полученное линейное уравнение относительно неизвестного p_2 , находим давление внутри сферы на шар.

$$p_2 = p_1 \frac{d_1c_1(b_1 - a_1)}{d_1c_1b_1 - d_2c_1a_1 + a_2}. \quad (9)$$

Если ввести обозначения $h_2 = d_1c_1b_1 - d_2c_1a_1 + a_2$ и $g_1 = d_1c_1a_1 - d_1c_1b_1$, уравнение (8') и его решение (9) запишутся в компактном виде:

$$p_2h_2 = -p_1g_1, \quad p_2 = -p_1 \frac{g_1}{h_2}. \quad (9')$$

Подставляя найденные значения давления на среднюю сферу и шар в формулу (5), получаем распределения деформаций внутри внешней сферы и шара соответственно. Ввиду громоздкости получаемых выражений, мы их здесь не приводим. Построим графики при значениях, соответствующих значениям реальных констант в тазобедренном суставе человека.

Усложним теперь модель и рассмотрим сферу внутри сферы. Внешняя сфера будет соответствовать хрящу, внутренняя – надкостнице и кости. Внутри предполагаем, имеется некоторое небольшое давление губчатого вещества и костного мозга.

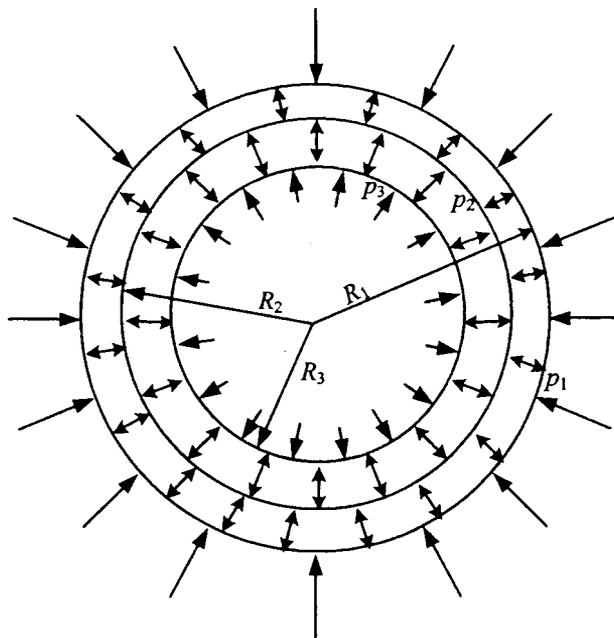


Рис. 3. Модель двух сфер и шара внутри, находящихся под действием внешнего давления

Рассмотрим две оболочки и шар внутри. Они находятся под внешним давлением p_1 . Под его действием происходит деформация оболочки, она сжимается, оказывая действие на среднюю сферу p_2 . Средняя сфера, в соответствии с третьим законом Ньютона действует на внешнюю сферу с тем же по модулю давлением p_2 . В свою очередь, средняя сфера, под действием давления p_2 действует на шар, находящийся внутри нее с давлением p_3 . Шар на нее действует с тем же давлением.

Полагая в формуле (5) $r = R_i$, ($i = 2, 3$) где под R_i понимается внутренний радиус внешней и средней сфер, из радиальной компоненты тензора деформации получаем систему двух уравнений, линейных относительно неизвестных давле-

ний p_2 и p_3 .

$$\begin{cases} \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_1^3(p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = \\ = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\ \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_2^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = -p_3 \frac{1-2\sigma}{E}. \end{cases} \quad (10)$$

Учтем, при рассмотрении системы уравнений то, что модули Юнга материалов и σ различны с помощью индексов: для внешней оболочки индекс 1, для внутренней – 2, для шара – 3.

Тогда система уравнений (10) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma_1}{E_1} - \frac{R_1^3(p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma_1}{E_1} = \\ = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_3^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma_2}{E_2}, \\ \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_2^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma_2}{E_2} = -p_3 \frac{1-2\sigma_3}{E_3}. \end{cases} \quad (11)$$

Введем аналогично обозначения: $\frac{1-2\sigma_i}{E_i} = a_i$, $\frac{1+\sigma_i}{E_i} = b_i$, $R_i^3 = d_i$, ($i = 1, 2, 3$),

$$\frac{1}{R_{i+1}^3 - R_i^3} = c_i \quad (i=1, 2).$$

В введенных выше обозначениях, система уравнений (11) принимает вид:

$$\begin{cases} c_1 a_1 (p_1 d_1 - p_2 d_2) - d_1 c_1 b_1 (p_1 - p_2) = \\ = c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_3 c_2 b_2 (p_2 - p_3), \\ c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_2 c_2 b_2 (p_2 - p_3) = -p_3 a_3. \end{cases} \quad (12)$$

Так как давление, прикладываемое к внешней сфере p_1 , известно, перепишем систему уравнений (12), линейную относительно неизвестных давлений p_2 и p_3 в стандартной форме записи.

$$\begin{cases} p_2 (d_1 c_1 b_1 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2 + d_3 c_2 b_2) + p_3 (d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2) = p_1 (d_1 c_1 b_1 - d_1 c_1 a_1), \\ p_2 (d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2) + p_3 (d_2 c_2 b_2 - d_3 c_2 a_2 + a_3) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Далее решаем данную линейную систему уравнений по формулам Крамера, находим неизвестные давления p_2 и p_3 :

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} p_1 (d_1 c_1 b_1 - d_1 c_1 a_1) & d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2 \\ 0 & d_2 c_2 b_2 - d_3 c_2 a_2 + a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 c_1 b_1 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2 + d_3 c_2 b_2 & d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2 \\ d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2 & d_2 c_2 b_2 - d_3 c_2 a_2 + a_3 \end{vmatrix}}, \quad (14)$$

$$p_3 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 c_1 b_1 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2 + d_3 c_2 b_2 & p_1 (d_1 c_1 b_1 - d_1 c_1 a_1) \\ d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 c_1 b_1 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2 + d_3 c_2 b_2 & d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2 \\ d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2 & d_2 c_2 b_2 - d_3 c_2 a_2 + a_3 \end{vmatrix}}.$$

Систему уравнений (13) и ее решение (14) можно представить в более компактном виде, если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} e_i &= d_{i-1}c_{i-1}b_{i-1} + d_{i+1}c_i b_i - d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_i a_i, \\ f_i &= d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_{i-1} b_{i-1}, \\ g_i &= d_i c_i a_i - d_i c_i b_i, \\ h_i &= d_{i-1} c_{i-1} b_{i-1} - d_i c_{i-1} a_{i-1} + a_i, \end{aligned} \quad (*)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда система (13) принимает вид

$$\begin{cases} p_2 e_2 + p_3 f_3 = -p_1 g_1, \\ p_2 g_2 + p_3 h_3 = 0. \end{cases} \quad (13')$$

А ее решение (14) запишется так:

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} -p_1 g_1 & f_3 \\ 0 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 \\ g_2 & h_3 \end{vmatrix}}, \quad p_3 = \frac{\begin{vmatrix} e_2 & -p_1 g_1 \\ g_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 \\ g_2 & h_3 \end{vmatrix}}. \quad (14')$$

Подставляя найденные значения давления на среднюю сферу и шар в формулу (5), получаем распределения деформаций внутри внешней сферы, внутренней и шара соответственно. Ввиду громоздкости получаемых выражений, мы их здесь не приводим.

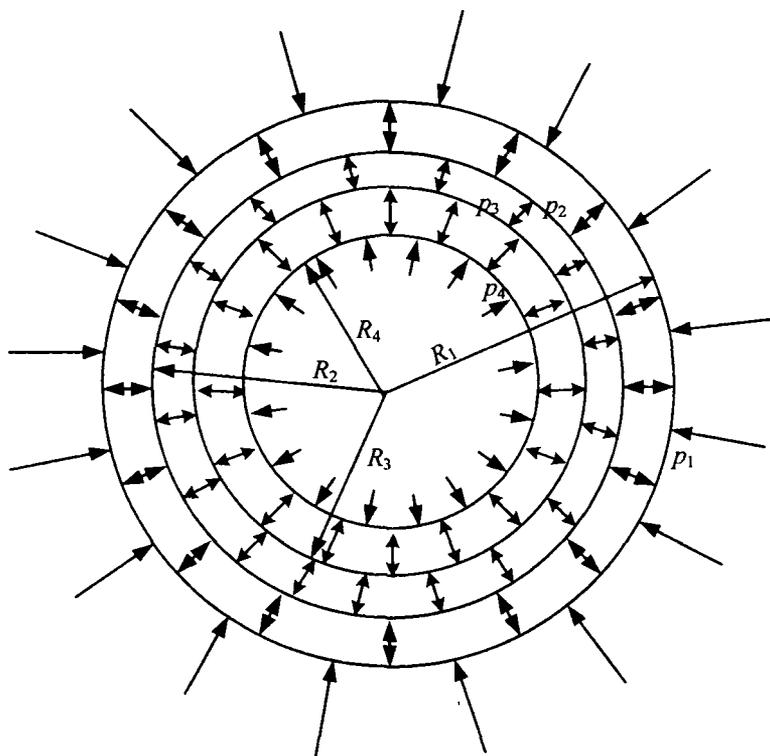


Рис. 4. Модель трех сфер и шара внутри, находящихся под действием внешнего давления

Для проверки обобщения усложним еще модель и рассмотрим две сферы внутри сферы, т. е. четыре взаимодействующих тела.

Рассмотрим три оболочки и шар внутри. Они находятся под внешним давлением p_1 . Под его действием происходит деформация оболочки, она сжимается, оказывая действие на среднюю сферу p_2 . Средняя сфера, в соответствии с третьим

законом Ньютона, действует на внешнюю сферу с тем же по модулю давлением p_2 . В свою очередь, средняя сфера, под действием давления p_2 действует на следующую сферу с давлением p_3 , которая действует на шар, находящийся внутри нее с давлением p_4 . Шар на нее действует с тем же давлением.

Полагая в формуле (5) $r = R_i$, ($i = 2, 3, 4$) где под R_i понимается внутренний радиус внешней и средней сфер, из радиальной компоненты тензора деформации получаем систему трех уравнений, линейных относительно неизвестных давлений p_2 , и p_3 и p_4 :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_1^3(p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} &= \\ = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\ \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_2^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} &= \\ = \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_4^3(p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\ \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3(p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} &= -p_4 \frac{1-2\sigma}{E}. \end{aligned} \right. \quad (10')$$

С учетом различий упругих модулей сфер, система уравнений (10') принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma_1}{E_1} - \frac{R_1^3(p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma_1}{E_1} &= \\ = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_3^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma_2}{E_2}, \\ \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_2^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma_2}{E_2} &= \\ = \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma_3}{E_3} - \frac{R_4^3(p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma_3}{E_3}, \\ \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma_3}{E_3} - \frac{R_3^3(p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma_3}{E_3} &= -p_4 \frac{1-2\sigma_4}{E_4}. \end{aligned} \right. \quad (11')$$

— введем обозначения: $\frac{1-2\sigma_i}{E_i} = a_i$, $\frac{1+\sigma_i}{E_i} = b_i$, $R_i^3 = d_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$),

$$\frac{1}{R_{i+1}^3 - R_i^3} = c_i \quad (i=1, 2, 3).$$

В введенных выше обозначениях, система уравнений (11') принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} c_1 a_1 (p_1 d_1 - p_2 d_2) - d_1 c_1 b_1 (p_1 - p_2) &= c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_2 c_2 b_2 (p_2 - p_3), \\ c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_2 c_2 b_2 (p_2 - p_3) &= c_3 a_3 (p_3 d_3 - p_4 d_4) - d_3 c_3 b_3 (p_3 - p_4), \\ c_3 a_3 (p_3 d_3 - p_4 d_4) - d_3 c_3 b_3 (p_3 - p_4) &= -p_4 a_4. \end{aligned} \right. \quad (12')$$

Так как давление, прикладываемое к внешней сфере p_1 известно, перепишем систему уравнений (12'), линейную относительно неизвестных давлений p_2 и p_3 в стандартной форме записи.

$$\begin{cases} p_2(d_1c_1b_1 + d_3c_2b_2 - d_2c_1a_1 - d_2c_2a_2) + p_3(d_3c_2a_2 - d_3c_2b_2) = \\ = p_1(d_1c_1b_1 - d_1c_1a_1), \\ p_2(d_2c_2a_2 - d_2c_2b_2) + p_3(d_2c_2b_2 + d_4c_3b_3 - d_3c_2a_2 - d_3c_3a_3) + \\ + p_4(d_4c_3a_3 - d_4c_3b_3) = 0, \\ p_3(d_3c_3a_3 - d_3c_3b_3) + p_4(d_3c_3b_3 + a_4 - d_4c_3a_3) = 0. \end{cases}$$

Систему уравнений (13) можно представить в более компактном виде, если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} e_i &= d_{i-1}c_{i-1}b_{i-1} + d_{i+1}c_i b_i - d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_i a_i, \\ f_i &= d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_{i-1} b_{i-1}, \\ g_i &= d_i c_i a_i - d_i c_i b_i, \\ h_i &= d_{i-1} c_{i-1} b_{i-1} - d_i c_{i-1} a_{i-1} + a_i, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} p_2 e_2 + p_3 f_3 = -p_1 g_1, \\ p_2 g_2 + p_3 e_3 + p_4 f_4 = 0, \\ p_3 g_3 + p_4 h_4 = 0. \end{cases}$$

Далее решаем данную линейную систему уравнений по формулам Крамера, находим неизвестные давления p_2 , p_3 и p_4 .

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} -p_1 g_1 & f_3 & 0 \\ 0 & e_3 & f_4 \\ 0 & g_3 & h_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 \\ 0 & g_3 & h_4 \end{vmatrix}}, \quad p_3 = \frac{\begin{vmatrix} e_2 & -p_1 g_1 & 0 \\ g_2 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & h_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 \\ 0 & g_3 & h_4 \end{vmatrix}}, \quad p_4 = \frac{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & -p_1 g_1 \\ g_2 & e_3 & 0 \\ 0 & g_3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 \\ 0 & g_3 & h_4 \end{vmatrix}}.$$

Подставляя найденные значения давления на среднюю сферу и шар в формулу (5), получаем распределения деформаций внутри внешней сферы, внутренней и шара соответственно. Ввиду громоздкости получаемых выражений, мы их здесь не приводим. Построим графики при значениях, соответствующих значениям реальных констант в тазобедренном суставе человека.

Аналогично можно обобщить данное рассмотрение и на большее произвольное конечное количество оболочек n .

Рассмотрим n оболочек и шар внутри. Они находятся под внешним давлением p_1 . Под его действием происходит деформация внешней оболочки, она сжимается, оказывая действие на среднюю сферу p_2 . Средняя сфера, в соответствии с третьим законом Ньютона действует на внешнюю сферу с тем же по модулю давлением p_2 . В свою очередь, средняя сфера, под действием давления p_2 действует на следующую сферу и так далее до тех пор, пока давление не передается с последней сферы на шар. Он находится внутри с давлением p_n . Шар на последнюю сферу действует с тем же давлением.

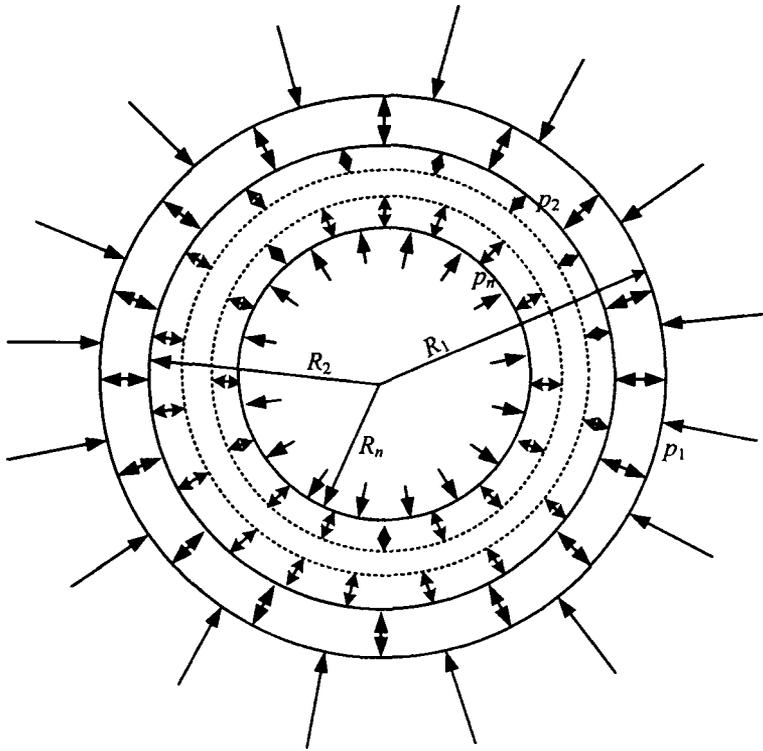


Рис. 5 Модель произвольного количества сфер и шара внутри них, находящихся под действием внешнего давления

Полагая в формуле (5) $r = R_i$, ($i = 2, 3, \dots, n$) где под R_i понимается внутренний радиус внешней и средней сфер, из радиальной компоненты тензора деформации получаем систему n уравнений, линейных относительно неизвестных давлений p_i ($i = 2, 3, \dots, n$).

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_1^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = \\ & = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_2^3 (p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\ & \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_2^3 (p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = \\ & = \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3 (p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\ & \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3 (p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = \\ & = \frac{p_4 R_4^3 - p_5 R_5^3}{R_5^3 - R_4^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_4^3 (p_4 - p_5)}{R_5^3 - R_4^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\ & \dots \\ & \frac{p_{n-1} R_{n-1}^3 - p_n R_n^3}{R_n^3 - R_{n-1}^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_{n-1}^3 (p_{n-1} - p_n)}{R_n^3 - R_{n-1}^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = -p_n \frac{1-2\sigma}{E}. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Учитывая различие модулей Юнга и σ материалов, учтем это при рассмотрении системы уравнений при помощи индексов. Для внешней оболочки индекс

1, для внутренней – 2, и так далее, для шара – n .

Тогда система уравнений (15) принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_1}{E_1} - \frac{R_1^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1 + \sigma_1}{E_1} = \\ & = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_3^3 (p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1 + \sigma_2}{E_2}, \\ & \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_2^3 (p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1 + \sigma_2}{E_2} = \\ & = \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_3}{E_3} - \frac{R_4^3 (p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1 + \sigma_3}{E_3}, \\ & \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_3}{E_3} - \frac{R_3^3 (p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1 + \sigma_3}{E_3} = \\ & = \frac{p_4 R_4^3 - p_5 R_5^3}{R_5^3 - R_4^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_4}{E_4} - \frac{R_5^3 (p_4 - p_5)}{R_5^3 - R_4^3} \cdot \frac{1 + \sigma_4}{E_4}, \\ & \dots \\ & \frac{p_{n-1} R_{n-1}^3 - p_n R_n^3}{R_n^3 - R_{n-1}^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_{n-1}}{E_{n-1}} - \frac{R_n^3 (p_{n-1} - p_n)}{R_n^3 - R_{n-1}^3} \cdot \frac{1 + \sigma_{n-1}}{E_{n-1}} = -p_n \frac{1 - 2\sigma_n}{E_n}. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Введем обозначения: $\frac{1 - 2\sigma_i}{E_i} = a_i$, $\frac{1 + \sigma_i}{E_i} = b_i$, $R_i^3 = d_i$, $\frac{1}{R_{i+1}^3 - R_i^3} = c_i$ ($i = 1, 2,$

3, ..., n).

В введенных выше обозначениях, система уравнений (7) принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & c_1 a_1 (p_1 d_1 - p_2 d_2) - d_1 c_1 b_1 (p_1 - p_2) = c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_3 c_2 b_2 (p_2 - p_3), \\ & c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_2 c_2 b_2 (p_2 - p_3) = c_3 a_3 (p_3 d_3 - p_4 d_4) - d_4 c_3 b_3 (p_3 - p_4), \\ & c_3 a_3 (p_3 d_3 - p_4 d_4) - d_3 c_3 b_3 (p_3 - p_4) = c_4 a_4 (p_4 d_4 - p_5 d_5) - d_5 c_4 b_4 (p_4 - p_5), \\ & \dots \\ & c_{n-1} a_{n-1} (p_{n-1} d_{n-1} - p_n d_n) - d_{n-1} c_{n-1} b_{n-1} (p_{n-1} - p_n) = -p_n a_n. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Так как давление, прикладываемое к внешней сфере p_1 известно, перепишем систему уравнений (8), линейную относительно неизвестных давлений p_2, p_3, \dots, p_n в стандартной форме записи.

$$\left\{ \begin{aligned} & p_2 (d_1 c_1 b_1 + d_3 c_2 b_2 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2) + p_3 (d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2) = \\ & = p_1 (d_1 c_1 b_1 - d_1 c_1 a_1), \\ & p_2 (d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2) + p_3 (d_2 c_2 b_2 + d_4 c_3 b_3 - d_3 c_2 a_2 - d_3 c_3 a_3) + \\ & + p_4 (d_4 c_3 a_3 - d_4 c_3 b_3) = 0, \\ & p_3 (d_3 c_3 a_3 - d_3 c_3 b_3) + p_4 (d_3 c_3 b_3 + d_5 c_4 b_4 - d_4 c_3 a_3 - d_4 c_4 a_4) + \\ & + p_5 (d_5 c_4 a_4 - d_5 c_4 b_4) = 0, \\ & \dots \\ & p_{n-1} (d_{n-1} c_{n-1} a_{n-1} - d_{n-1} c_{n-1} b_{n-1}) + p_n (d_{n-1} c_{n-1} b_{n-1} - d_n c_{n-1} a_{n-1} + a_n) = 0. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Систему уравнений (13) можно представить в более компактном виде, если ввести следующие обозначения:

$$e_i = d_{i-1} c_{i-1} b_{i-1} + d_{i+1} c_i b_i - d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_i a_i,$$

$$\begin{aligned}
 f_i &= d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_{i-1} b_{i-1}, \\
 g_i &= d_i c_i a_i - d_i c_i b_i, \\
 h_i &= d_{i-1} c_{i-1} b_{i-1} - d_i c_{i-1} a_{i-1} + a_i,
 \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases}
 p_2 e_2 + p_3 f_3 = -p_1 g_1, \\
 p_2 g_2 + p_3 e_3 + p_4 f_4 = 0, \\
 p_3 g_3 + p_4 e_4 + p_5 f_5 = 0, \\
 \dots \\
 p_{n-1} g_{n-1} + p_n h_n = 0.
 \end{cases} \quad (19)$$

Далее, решаем данную линейную систему уравнений, состоящую из $n - 1$ уравнения с $n - 1$ неизвестным, по формулам Крамера, находим неизвестные давления $p_2, p_3 \dots p_n$:

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{\begin{vmatrix} -p_1 g_1 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{vmatrix}}, \\
 p_3 &= \frac{\begin{vmatrix} e_2 & -p_1 g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{vmatrix}},
 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
p_4 &= \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccccc} e_2 & f_3 & -p_1 g_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & 0 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccccccc} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccccccc} e_2 & f_3 & 0 & -p_1 g_1 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccccccc} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{array} \right| \\ \dots \\ p_n &= \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccccc} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & -p_1 g_1 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & 0 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccccccc} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{array} \right| \end{array}
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения давления на промежуточные сферы и шар в уравнения (5), получаем распределения деформаций внутри внешней сферы, внутренней, следующей и так далее до шара соответственно. Ввиду громоздкости получаемых выражений, мы их здесь не приводим. Также можно получить и значения напряжений.

Таким образом, получены тензоры деформаций (радиальная компонента) для структуры, состоящей из двух сфер и шара внутри.

Применим полученные теоретические результаты к моделированию тазобедренного сустава человека.

Возьмем модель многослойной толстостенной сферы с произвольным коли-

чеством слоев, разработанную выше и будем фиксировать количество слоев n .

При $n = 1$ имеем заполненный шар внутри. Данная модель не является адекватной реальному человеческому суставу. Но может являться моделью протеза, к примеру, металлического без покрытия полимерными пленками. В этом случае давление везде постоянно и равно внешнему, а распределение напряжения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p_1, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = -p_1. \end{aligned} \quad (21)$$

где $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – угловые компоненты тензора напряжений.

Аналогично, получаем компоненты тензора деформаций.

$$\begin{aligned} u_{rr} &= -p_1 \cdot \frac{1-2\sigma}{E}, \\ u_{\theta\theta} &= u_{\varphi\varphi} = -p_1 \cdot \frac{1-2\sigma}{E}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из полученных зависимостей (21) и (22) видно, что компоненты тензора деформаций и напряжений являются линейно зависимыми от внешнего давления p_1 .

Построим зависимость деформаций при фиксированном давлении $p_1 = 5000$ Па.

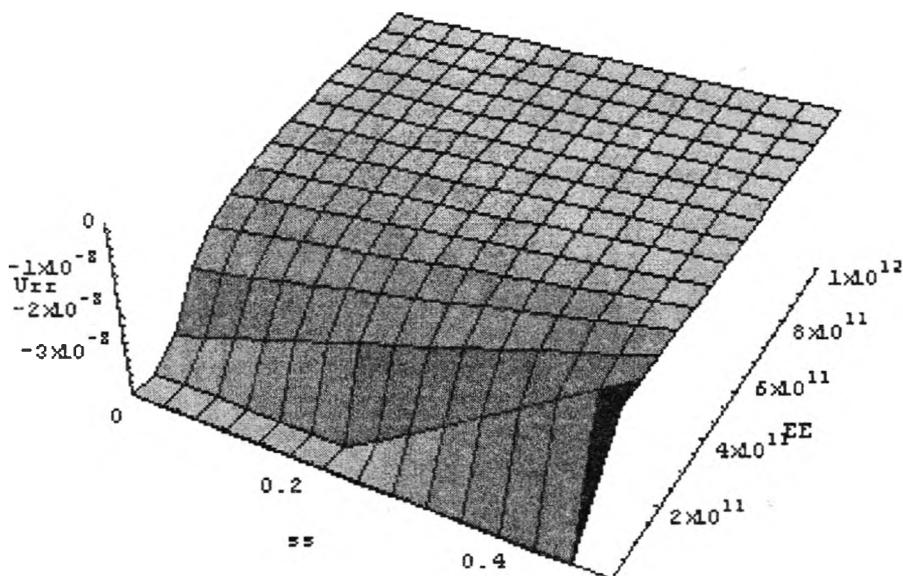


Рис. 6. Зависимость тензора деформаций от модулей упругости материала

Численные расчеты с фиксированными параметрами, взятыми ранее, показывают, что $u_{rr} = u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = -1,68 \cdot 10^{-6}$.

Подобные графики важны при выборе материалов для протезирования и изучении вопросов старения и деградации материалов протезов или опорно-двигательного аппарата человека. На графике сразу качественно видны тенденции убывания тензора деформаций по абсолютной величине при увеличении значения коэффициента Пуассона и увеличении модуля Юнга.

Проведем численные оценки возникающих напряжений и деформаций в этой модели сустава. Для этого используем численные данные, полученные экспериментально на биологическом материале человека [1, 9, 10]. Они имеют сле-

дующие значения:

- модуль Юнга (упругости) кости $E = 10^9$ Па;
- коэффициент Пуассона $\sigma = 0.332$;
- внешний радиус $R_1 = 1,4 \cdot 10^{-3}$ м;
- внутренний радиус $R_2 = 1,3 \cdot 10^{-3}$ м.

На этом этапе моделирования внешнее давление примем равным $p_1 = 5 \cdot 10^3$ Н, внутреннее $p_2 = 4,2 \cdot 10^5$ Н.

В результате численных расчетов в СКМ Mathematica 6.0.3.¹ получаем зависимости от r .

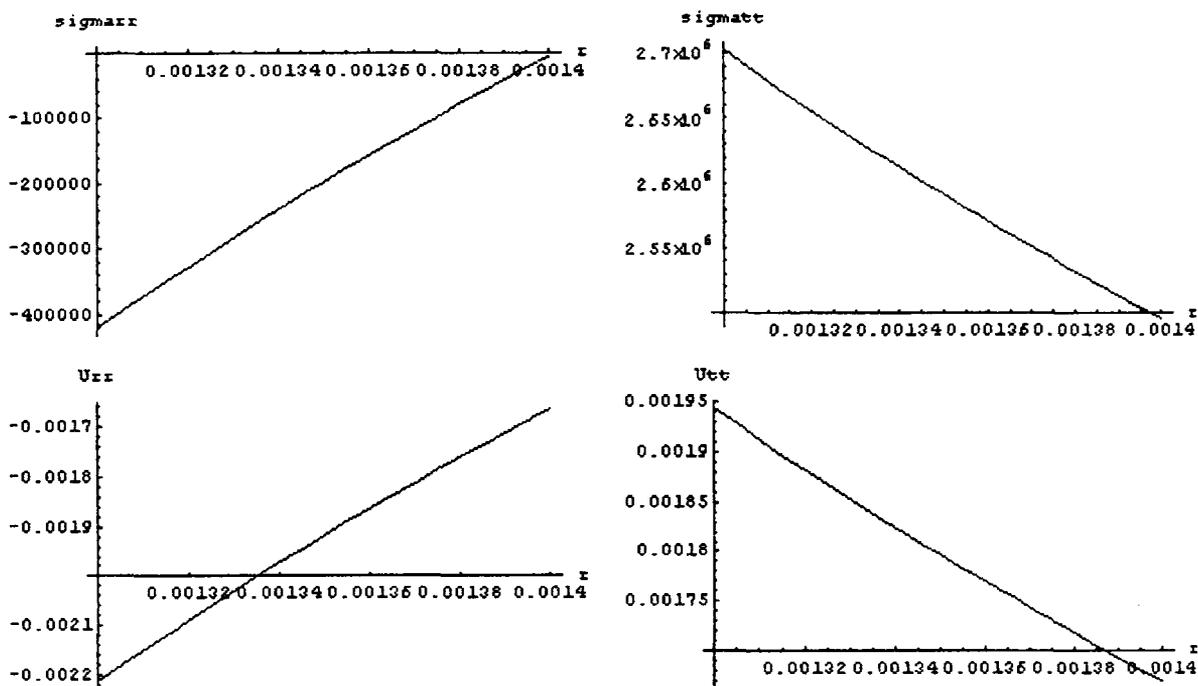


Рис. 7. Численные оценки возникающих напряжений (верхние два графика, слева – радиальные, справа – тангенциальные) и деформаций (нижние два графика, слева – радиальные, справа – тангенциальные) в модели однослойной сферы при заданных числовых характеристиках

Таким образом, видно, что при заданных значениях параметров напряжения в слое сферы достаточно велики, тогда как деформации незначительны, на порядок меньше геометрических размеров модели сустава. Значения радиальных деформаций возрастают от внутренней части к внешней по всему слою сферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврюшенко Н.С. Материаловедческие аспекты создания эрозионностойких узлов трения искусственных суставов человека: дис. д-ра техн. наук. – М.: 2000. – 234 с.
2. Shilko S.V., Gavrilenko S.L., Khizhenok V.F., Stakan I.N., Salivonchik S.P. A method for defining flow and rheological constants of viscoplastic biomaterials. Part 2 // Russian Journal of Biomechanics. – 2003. – Vol. 7, № 2. – P. 11–23.
3. Шилько С.В., Плескачевский Ю.М. Механика адаптивных композитов и биоматериалов // Материалы, технологии, инструмент. – 2003. – № 4. – С. 5–16.

¹ Лицензионная версия данной программы приобретена за счет средств Гранта Президента Российской Федерации, номер МК-2524.2008.1.

4. Pleskachevsky Yu. M., Shilko S.V., Ermakov S.F. Methods of wear reducing based on bioprototypes of tibiogjoints // *Journal of Synthetic Lubrication*. – 2005. – Vol. 22, № 4. – P. 225–236.
5. Борисов А.В. Приближенные математические модели деформируемых суставов человека и численная оценка возникающих деформаций. // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ. 17 - 18 июня 2008 года. Том 4. Педагогика и методика. Москва; Луганск: МАДИ (ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ, 2008. – С. 160-171.
6. Borisov A.V., Chigarev A.V. Problems of Strength at Loading Multilayer Bones of the Person. // *Mechanika 2009. Proceedings of the 14th international conference. April 2-3, 2009 Kaunas University of Technology, Lithuania*. – Technologija Kaunas. 2009. – P. 76-79.
7. Борисов А.В. Моделирование опорно-двигательного аппарата человека и применение полученных результатов для разработки модели антропоморфного робота. – М.: Спутник +, 2009:–212 с.
8. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987:–246 с.
9. http://www.rabus.ru/Gordon/СНАРТ_02/СНАРТ_02.HTM, дата обращения 25.05.2010.
10. Maganaris C.N., Paul J.P. Tensile properties of the in vivo human gastrocnemius tendon decade // *J. Biomech*. – 2002. – № 35. – P. 1639-1646.