УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАДЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА В ВОЗДУХЕ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Горбач Н.И., Лужинский Е.С., Неверовская Я.Б.

Белорусский национальный технический университет, Минск

В работе приводятся результаты теоретических исследований падения тяжелого тела в воздухе при квадратичном законе сопротивления. Получен ряд аналитических зависимостей, характеризующих основные параметры этого движения.

Рассмотрим падение тела в воздухе без начальной скорости. Примем силу сопротивления $\bar{R}$ равной по величине μV^2, где μ - постоянный коэффициент сопротивления, зависящий от формы и размеров тела и физических свойств среды.

Определим изменение скорости падения и пройденного пути с течением времени, предельную скорость падения, время, в течение которого тело достигает предельной скорости, расстояние, пройденное телом до достижения предельной (максимальной) скорости падения.

1. Направим ось Ox (рис.1) по вертикали вниз, изобразим тело в произвольном положении и покажем силы, действующие на него: вес $\bar{P}$ и силу сопротивления $\bar{R}$.

Запишем второй закон динамики в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = P - R = P - \mu V^2, \qquad (1)$$

где $P = mg$. Обозначим $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}$ и сократим на m, получим

$$\frac{dV}{dt} = g - \frac{\mu}{m}V^2 = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - V^2\right). \qquad (2)$$

Обозначим $\frac{\mu}{m} = k;\ \frac{mg}{\mu} = n^2$, разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_0^V \frac{dV}{n^2 - V^2} = \int_0^t k\,dt \Rightarrow \frac{1}{2n} ln\left|\frac{n+V}{n-V}\right| = kt.$$

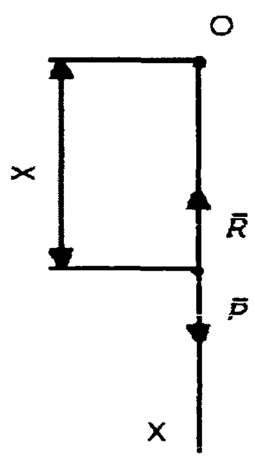

Рис. 1

Потенцируем полученное выражение и определим закон изменения скорости с течением времени:

$$V = n\frac{e^{2nkt} - 1}{e^{2nkt} + 1}. \qquad (3)$$

2. Для определения предельной скорости падения уравнение (3) представим в виде

$$V = n\frac{1 - e^{-2nkt}}{1 + e^{-2nkt}}. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что с увеличением времени падения скорость возрастает и при $t = \infty$ достигает максимальной (предельной) величины:

$$V_{np} = n = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}. \qquad (5)$$

Значение V_{np} можно также получить из условия максимума функции $f(V)$, при котором $\dot{f}(V) = \frac{dV}{dt} = 0$. Поэтому подставив в уравнение (1) ускорение $\frac{dV}{dt} = 0$, получим $P - \mu V_{np}^2 = 0$. Отсюда $V_{np} = \sqrt{\frac{P}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$.

3.Определим время, за которое скорость падения тела достигнет значения весьма мало отличающегося от предельной скорости, т.е. $V = \gamma V_{np}$, где $\gamma < 1$, $V_{np} = n$.

Подставим в (3) вместо V значение $V = \gamma n$. После сокращения на V получим $\gamma = \frac{e^{2nkt}-1}{e^{2nkt}+1}$. Отсюда $t = t_\gamma = \frac{1}{2nk} ln\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$. (6)

Или с учетом введенных выше обозначений

$$t_\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{\mu g}} ln\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \ . \qquad (6')$$

Таким образом, время, в течение которого скорость тела достигает предельного значения, зависит от массы тела и коэффициента сопротивления воздуха, т.е. более тяжелое тело достигает предельной скорости падения за большее время при одном и том же сопротивлении воздуха.

4. Определим зависимость пройденного пути (координаты x) от времени.

Так как $V = \frac{dx}{dt} = n\frac{e^{2nkt}-1}{e^{2nkt}+1}$, то разделим переменные и преобразуем $dx = n\frac{(e^{2nkt}-1)dt}{e^{2nkt}+1} = n(1 - \frac{2}{e^{2nkt}+1})dt$.

После интегрирования этого выражения при начальных условиях $t = 0$, $x_0 = 0$ получим

$$x = nt + \frac{1}{k} ln\frac{(1+e^{-2nkt})}{2} \ . \qquad (7)$$

Так как $n = V_{np}$, $k = \frac{\mu}{m}$, то (7) можно записать в следующем виде:

$$x = V_{np}\left(t + \frac{m}{\mu V_{np}} ln\frac{\left(1+e^{-2\frac{\mu}{m}V_{np}t}\right)}{2}\right) \cdot \qquad (8)$$

В соответствии с этим законом тело будет падать до тех пор, пока не достигнет предельной скорости. В этом случае ускорение $\frac{dV}{dt} = 0$, то после достижения предельной скорости дальнейшее движение тела будет равномерным со скоростью, равной предельной скорости.

5. Определим какой путь, будет проходить тело до момента достижения предельной скорости в зависимости от времени t_γ. Для этого подставим в формулу (7) значение t_γ из (6)

$$x = n\frac{1}{2nk}ln\frac{1+\gamma}{1-\gamma} + \frac{1}{k}ln\frac{\left(1+e^{-2nk\frac{1}{2nk}ln\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}\right)}{2}.$$

После преобразований получим

$$x = -\frac{1}{2k}\ln(1-\gamma^2) = -\frac{1}{2}\frac{m}{\mu}\ln(1-\gamma^2). \qquad (9)$$

Из формул (5), (6) и (9) следует, что более тяжелое тело проходит больший путь до достижения предельной скорости и за большее время, чем менее тяжелое, при одних и тех же значениях γ и μ. Предельная скорость падения более тяжелого тела больше скорости падения менее тяжелого при прочих равных условиях.

6. Определим далее зависимость скорости падения тела от пройденного расстояния (от пути).

Для этого уравнение (2) перепишем, введя подстановку $\frac{dV}{dt} = \frac{VdV}{dx}$, в виде $\frac{VdV}{dx} = \frac{\mu}{m}(\frac{mg}{\mu} - V^2)$ или с учетом введенных выше обозначений:

$$\frac{VdV}{dx} = k(n^2 - V^2) \qquad (10)$$

После интегрирования уравнения (10) с учетом нулевых начальных условий и последующих преобразований получим

$$V = n\sqrt{1-e^{-2kx}}. \qquad (11)$$

Из (11) видно, что с увеличением x выражение e^{-2kx} убывает, стремясь к нулю при $x \to \infty$, а скорость V стремится к максимальной (предельной) скорости $V_{np} = n$.

Из выражения (11) также можно определить, как быстро скорость падающего тела приближается к предельной , т.е. определить x при $V = \gamma V_{np}$. Из выражения $\gamma = \sqrt{1-e^{-2kx}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2k}\ln(1-\gamma^2) = -\frac{1}{2}\frac{m}{\mu}\ln(1-\gamma^2)$, что соответствует полученной ранее формуле (9).

В качестве примера рассмотрим движение парашютиста, считая что парашют раскрывается как только парашютист покидает самолет.

Из практики известно, что сила сопротивления выражается формулой [1]

$$R = \frac{1}{2}c_x\rho SV^2, \qquad (12)$$

где c_x - безразмерный коэффициент сопротивления; для парашюта $c_x = 1{,}4$;

ρ - плотность воздуха;

при $t = 15^0$ и давлении 760 мм рт. ст. $\rho = 1{,}205\ Н \cdot с^2 / м^4$;

S - площадь проекции парашюта на горизонтальную плоскость, $м^2$.

Тогда для коэффициента сопротивления μ получаем выражение:

$$\mu = \frac{1}{2}c_x\rho S. \qquad (13)$$

Примем массу парашютиста вместе с парашютом $m = 80$ $кг$; значение S принимаем 10, 20 и 30 $м^2$.

Тогда для μ получим три значения:

$\mu = 8{,}435; 16{,}870$ и $25{,}305\ H \cdot c^2/м^2$ *или кг / м*.

Значение γ примем:

$$\gamma_1 = 0{,}9;\ \gamma_2 = 0{,}99;\ \gamma_3 = 0{,}999; \gamma_4 = 0{,}9999;$$

Для принятых значений m, μ и γ определим предельную скорость падения, время t_γ и путь, пройденный за это время, используя формулы (5),(6) и (9). Результаты вычислений приведены в таблице 1, где $V_{пр}$ — $м/с$, t_γ- в секундах, x- в метрах.

Таблица 1

γ / $\mu/V_{пр}$	0,9	0,99	0,999	0,9999
8,435 / 9,641	$t_\gamma = 1{,}449$ / $x_1 = 7{,}880$	$t_\gamma = 2{,}604$ / $x_2 = 18{,}586$	$t_\gamma = 3{,}739$ / $x_3 = 29{,}491$	$t_\gamma = 4{,}872$ / $x_4 = 40{,}414$
16,87 / 6,819	$t_\gamma = 1{,}024$ / $x_1 = 3{,}940$	$t_\gamma = 1{,}841$ / $x_2 = 9{,}293$	$t_\gamma = 2{,}644$ / $x_3 = 14{,}745$	$t_\gamma = 3{,}445$ / $x_4 = 20{,}207$
25,30 / 5,567	$t_\gamma = 0{,}836$ / $x_1 = 2{,}625$	$t_\gamma = 1{,}503$ / $x_2 = 6{,}193$	$t_\gamma = 2{,}158$ / $x_3 = 9{,}826$	$t_\gamma = 2{,}812$ / $x_4 = 13{,}466$

Из таблицы 1 видно, что тело достигает скорости, весьма близкой к предельной за достаточно небольшое время, а не за время $t = \infty$.

Так при коэффициенте сопротивления $\mu = 25{,}3\ кг/м$ тело достигает значения 99,99% $V_{пр}$ примерно за 2,8 с.

Теперь разобьем путь, проходимый за некоторое принятое общее время, на два участка: первый – участок ускоренного движения и второй – участок равномерного движения с достигнутой на первом участке предельной скоростью.

Расстояние, пройденное телом на первом участке, определим по формуле (8), которую представим в виде

$$x_1 = V_{пр}\left(t_\gamma + \frac{m}{\mu V_{пр}} ln \frac{\left(1+e^{-2\frac{\mu}{m}V_{пр}t_\gamma}\right)}{2}\right). \qquad (14)$$

Расстояние, пройденное на втором участке:

$$x_2 = V_{np}(t_{o6} - t_Y). \tag{15}$$

Тогда общее расстояние

$$x = x_1 + x_2 = V_{np} t_{o6} + \frac{m}{\mu} ln \frac{\left(1 + e^{-2\frac{\mu}{m} V_{np} t_Y}\right)}{2}. \tag{16}$$

Примем за общее время t_{o6} время падения парашютиста с высоты $h = 1000\,м$ с предельной постоянной скоростью $V_{np} = 5{,}567\,м/с$, что составляет примерно 3 мин.

Вычислим расстояние, по формуле (8) предположим, что в течение времени $t_{o6} = 3\,мин$ движение было ускоренным и по формуле (16), как сумму расстояний x_1 при ускоренном движении и x_2 при равномерном, приняв $\mu = 25{,}305\,кг/м$, $V_{np} = 5{,}567\,м/с$, $t_Y = 2{,}812\,с$ и $m = 80\,кг$.

По формуле (8)

$$x = V_{np} t_{o6} + \frac{m}{\mu} ln \frac{\left(1 + e^{-2\frac{\mu}{m} V_{np} t_{o6}}\right)}{2} =$$

$$= 5{,}567 \cdot 180 + \frac{80}{25{,}385} ln \frac{\left(1 + e^{-2 \cdot \frac{25{,}3}{80} \cdot 5{,}567 \cdot 180}\right)}{2} = 999{,}868\,м.$$

По формуле (16)

$$x = 5{,}567 \cdot 180 + \frac{80}{25{,}385} ln \frac{\left(1 + e^{-2 \cdot \frac{25{,}3}{80} \cdot 5{,}567 \cdot 2{,}812}\right)}{2} = 999{,}868\,м.$$

Полученные результаты в точности совпадают. Это объясняется тем, что достижение точного значения предельной скорости теоретически возможно при $t = \infty$. Поэтому в пределах принятого значения t_{o6}, а тем более при больших значениях t_{o6}, движение может рассматриваться ускоренным.

Заметим, что выражение $e^{-2\frac{\mu}{m} V_{np} t}$ с увеличением t достаточно быстро стремится к нулю, начиная даже со значения $t = 3\,сек$, а , именно, при этом значении t и указанных выше значениях μ, m и V_{np} это выражение равно $2{,}58 \cdot 10^{-5}$, которым можно пренебречь.

Тогда для значений $t > 3\,сек$ падение может рассматриваться как равномерное со скоростью V_{np}, а координата x определяется по формуле

$$x = V_{np} t + \frac{m}{\mu} ln 2, \tag{17}$$

что хорошо согласуется с данными табл. 1.

ЛИТЕРАТУРА

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1955. – 416 с.