К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Якубовский Ч.А., Якубовский А.Ч., Гурин А.Н.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The account of torsion bars with a non-round cross-section is presented. It's a practical interesting method as most simply account. The approximation of geometrical reinforce with 8 per. miscalculation is received. The particular cases of non-round cross-sections (there are ellipse, triangle and rectangle) are considered.

Большой практический интерес представляет собой вопрос о кручении стержней некруглого поперечного сечения, применяемых в различных конструкциях. В таких стержнях при кручении поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются (депланируют). Это связано с тем, что точки поперечного сечения получают перемещения, направленные вдоль оси стержня.

Если на стержень не наложены связи, препятствующие свободной деформации его поперечных сечений, то такое кручение называется свободным. При свободном кручении в стержне возникают лишь касательные напряжения.

Таким образом, при кручении стержней некруглого поперечного сечения нарушается одна из основных гипотез сопротивления материалов — гипотеза плоских сечений. Поэтому при решении таких задач необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но также их депланацию. Эта задача усложняется еще и тем, что напряжения в стержне определяются функцией не одной переменной (ρ) полярной системы координат, как в стержнях круглого сечения, а двух переменных (x,y) декартовой системы координат. Следовательно, определение напряжений в стержнях некруглого поперечного сечения представляет собой довольно сложную задачу, которая решается методами теории упругости [1].

При кручении стержней произвольного поперечного сечения основными параметрами, представляющими практический интерес, являются наибольшие касательные напряжения τ_{max}, возникающие в стержне, и относительный угол закручивания θ (угол закручивания на единицу длины стержня). При этом независимо от формы сечения значения этих величин могут быть записаны в виде

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_k}; \qquad \theta = \frac{T}{GI_k}; \qquad \theta = \frac{d\varphi}{dz}, \tag{1}$$

где T — крутящий момент, приложенный к стержню; G — модуль сдвига материала стержня; $d\varphi$ — взаимный поворот поперечных сечений стержня на участке dz; W_k и I_k — геометрические характеристики сечений некруглой формы при кручении — соответственно геометрическая характеристика прочности (момент сопротивления кручению) и жесткости (геометрическая жесткость).

Задачу о кручении стержней впервые решил знаменитый французский ученый Б. Сен-Венан (1797–1886). Однако, точное решение, предложенное Сен-Венаном и заключающееся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений равновесия совместно с заданными краевыми условиями, является довольно сложным, даже для простых сечений. Немецкий ученый Л. Прандтль (1875–1953) впервые предложил решение этой задачи путем введения понятия функции напряжений $\Phi(x,y)$, что значительно упрощает расчет.

Эта функция дифференцируема и связана с касательными напряжениями следующим образом [2, 3]:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{2}$$

Функция Φ должна удовлетворять уравнениям равновесия, уравнениям сплошности и краевым условиям. Подставляя соотношения (2) в уравнения равновесия и применяя формулы закона Гука при кручении, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} = -2G\theta. \tag{3}$$

При свободном кручении краевые условия на торцах принимают вид (рис.1):

$$\int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y)dA = T. \tag{4}$$

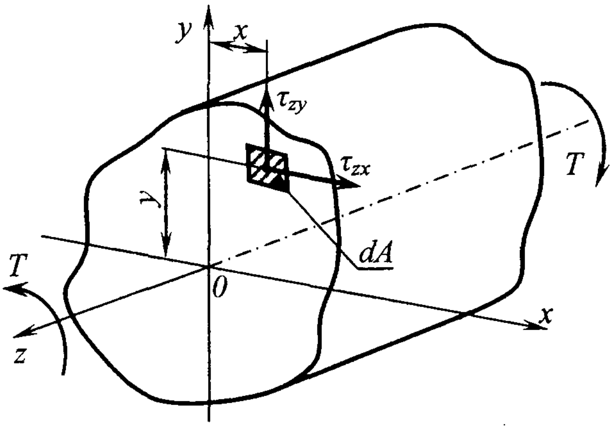

Рис. 1. К определению краевых условий на торцевой поверхности стержня

Учитывая выражения (2), а также, применяя теорему Грина при интегрировании [3], условие (4) может быть записано в следующем виде:

$$T = 2\int_A \Phi dA. \tag{5}$$

Но, так как $T=G\theta I_k$, то формула для определения геометрической жесткости односвязных (сплошных, без внутренних полостей) сечений принимает вид:

$$I_k = \frac{2}{G\theta}\int_A \Phi dA. \tag{6}$$

Функция напряжений может быть определена следующим образом [3]:

$$\Phi = C \cdot f(x, y), \tag{7}$$

где $f(x,y)$ — уравнение контура сечения; C — постоянная, определяемая из уравнения (3).

При этом для точек контура

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим некоторые простейшие сечения.

Эллиптическое сечение. Уравнение контура (рис. 2) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b — полуоси эллипса.

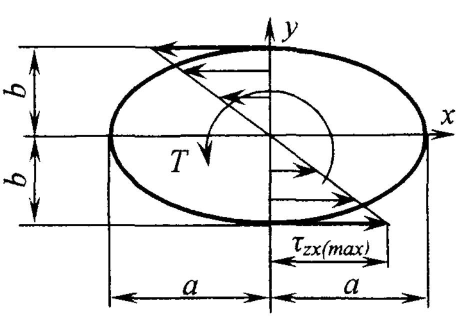

Рис. 2. Распределение касательных напряжений в эллиптическом сечении

С учетом условия (8) функцию Φ записываем в следующем виде:

$$\Phi(x, y) = C\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

Подставляя в уравнение (3), находим постоянную C:

$$C = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}G\theta.$$

По формуле (6) находим геометрическую жесткость:

$$I_k = \frac{2}{G\theta}\int\limits_A C\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)dA = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\left(A-\frac{1}{a^2}I_y-\frac{1}{b^2}I_x\right),$$

где A, I_x, I_y — соответственно площадь и осевые моменты инерции сечения.

После интегрирования и упрощения получим

$$I_k = \frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

Тогда

$$T = G\theta\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

Функция Φ принимает вид

$$\Phi = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}G\theta\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) = -\frac{T}{\pi ab}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

По уравнениям (2) находим

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{2T}{\pi ab^3}y; \qquad \tau_{zy} = \frac{2T}{\pi a^3b}x.$$

Наибольшие напряжения возникают в точках пересечения контура с малой осью эллипса:

$$\tau_{\max} = \tau_{zx(\max)} = \frac{T}{W_k}, \text{ где } W_k = \frac{\pi ab^2}{2}.$$

Для кругового сечения $\left(a=b=\frac{d}{2}\right)$ получим

$$I_k = \frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^3} = \frac{\pi d^4}{32} = I_p; \qquad W_k = \frac{\pi ab^2}{2} = \frac{\pi d^3}{16} = W_p.$$

где I_p и W_p — соответственно полярный момент инерции и полярный момент сопротивления сечения круглой формы.

Треугольное сечение (треугольник равносторонний). Запишем уравнения сторон треугольника в центральных осях x,y (рис. 3):

сторона AB: $y+\frac{h}{3}=0$;

сторона AC: $y-\sqrt{3}x-\frac{2}{3}h=0$;

сторона BC: $y+\sqrt{3}x-\frac{2}{3}h=0$.

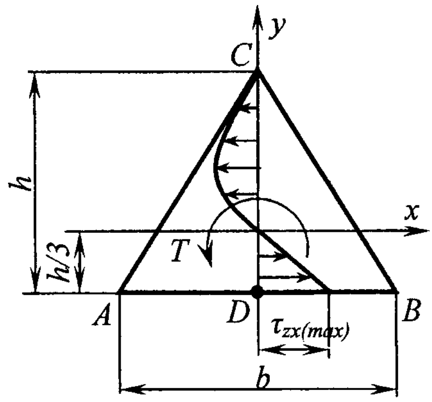

Рис. 3. Распределение касательных напряжений в треугольном сечении

Функция напряжений запишется в виде:

$$\Phi(x,y) = C\left[\left(y+\frac{h}{3}\right)\left(y-\sqrt{3}x-\frac{2}{3}h\right)\left(y+\sqrt{3}x-\frac{2}{3}h\right)\right].$$

Используя (3), находим постоянную C:

$$C = -G\theta.$$

Находим геометрическую жесткость по формуле (6)

$$I_k = \frac{2}{G\theta}\int\limits_A \Phi dA.$$

Подставляя значение Φ, раскрывая скобки и интегрируя в пределах изменения переменных x и y, окончательно получим

$$I_k = \frac{h^4}{15\sqrt{3}} = \frac{b^4\sqrt{3}}{80}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в т. D основания AB:

$$\tau_{zx(\max)} = \frac{T}{W_k}, \text{ где } \quad W_k = \frac{2\cdot h^3}{15\cdot\sqrt{3}} = \frac{b^3}{20}.$$

Принимая $T = G\theta I_k$, можно записать

$$\tau_{zx(\max)} = \frac{T}{W_k} = G\theta\frac{I_k}{W_k} = G\theta\frac{h}{2}.$$

Прямоугольное сечение. Вышеизложенный метод не позволяет получить решение для прямоугольных сечений. В этом случае функция напряжений представляется в виде ряда Фурье:

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} f(y)\cdot\cos\frac{n\pi x}{b}, \tag{9}$$

где $f(y)$ — функция, подлежащая определению.

Так как на контуре $\Phi(x,y)=0$, то в формуле (9) используются только нечетные значения n (n=1, 3, 5, …).

Геометрическая жесткость в этом случае определяется следующим образом:

$$I_k = k_1\frac{bh^3}{3} = k_1 I_{x_1},$$

где I_{x_1} — момент инерции сечения относительно оси x_1, проходящей через бóльшую сторону сечения (рис. 4).

Значение коэффициента k_1 определяется по формуле [3]:

$$k_1 = 1 - \frac{192}{\pi^5}\cdot\frac{h}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{th(k_n b)}{(2n+1)^2} \approx 1 - \frac{192}{\pi^5}\cdot\frac{h}{b}\cdot th\left(\frac{\pi b}{2h}\right), \quad \text{где} \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h}.$$

Максимальные касательные напряжения, которые возникают посредине длинных сторон (точки A и A_1 на рис.4), равны:

$$\tau_{\max} = \tau_{zx(\max)} = k_2\frac{T}{W_k}, \qquad \text{где} \qquad W_k = \frac{I_k}{h}.$$

Значение коэффициента k_2 определяется по формуле [3]

$$k_2 = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2\cdot ch(k_n b)}.$$

По вышеперечисленным формулам можно вычислить значения коэффициентов k_1 и k_2 при любых соотношениях сторон прямоугольного сечения.

Следует отметить, что в отечественной литературе по сопротивлению материалов приводятся следующие формулы для определения W_k и I_k [5, 6]:

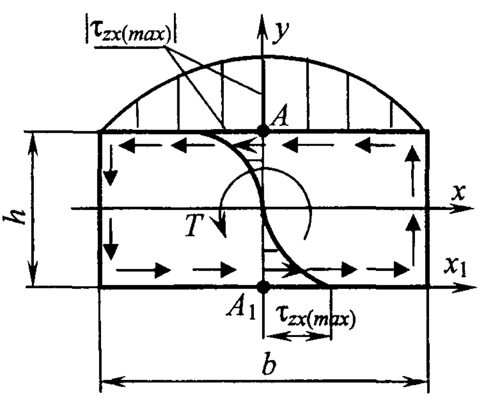

Рис. 4. Распределение касательных напряжений в прямоугольном сечении

$$W_k = \alpha bh^2; \quad I_k = \beta bh^3.$$

При этом для сечений, у которых $b \gg h$, $\alpha=\beta=1/3\approx0{,}333$. Такому значению коэффициентов α и β нет логического объяснения.

В то же время, согласно формулам, предлагаемым в настоящей статье, в предельном случае ($b \gg h$) получим: $k_1=k_2=1$. И тогда

$$I_k = I_{x_1} = \frac{bh^3}{3}; \qquad W_k = \frac{I_{x_1}}{h} = \frac{bh^2}{3} = 2W_x,$$

где W_x — осевой момент сопротивления прямоугольного сечения.

Такой подход к решению задачи о кручении стержня прямоугольного сечения является, на наш взгляд, более логичным.

В [2] приведены приближённые формулы для определения коэффициентов α и β:

$$\alpha \approx \frac{1}{3 + 1{,}8\dfrac{h}{b}}; \qquad \beta \approx \frac{1}{3 + 2\left(\dfrac{h}{b} + \dfrac{h^2}{b^2}\right)}.$$

Применяя эти формулы, можно получить приближенные выражения для вычисления коэффициентов k_1 и k_2:

$$k_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{h}{b} + \dfrac{h^2}{b^2}\right)}; \qquad k_2 = \frac{1 + 0{,}6\dfrac{h}{b}}{1 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{h}{b} + \dfrac{h^2}{b^2}\right)}.$$

Расчет I_k по приближенной формуле Сен-Венана. Для определения геометрической жесткости сплошных сечений произвольной формы Б. Сен-Венаном была предложена следующая приближённая формула [4]:

$$I_k = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p}. \tag{10}$$

Учитывая то, что величины A и I_p можно легко определить, формула (10) представляет собой хорошую аппроксимацию величины I_k для любых односвязных сечений. При этом погрешность вычислений составляет не более 8%. В то же время в отечественной литературе по сопротивлению материалов эта формула нигде не встречается.

Таким образом, приведенные в статье формулы позволяют значительно упростить решения, связанные с кручением стержней некруглого односвязного поперечного сечения. Предложенная методика представляет практический интерес в инженерных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян.— М.: Ассоц. строит. ВУЗов, 1995.— 572 с.
2. Биргер, И.А. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов.— М.: Наука, 1986.— 560 с.
3. André Bazergui, Thang Bui-Quoc, André Biron, Georgus Mclnure, Charles Laberge. Résistanse des matériaux. — Ecole Polytechnique de Montréal, 2003. — 466 p.
4. Pierre Agati, Frédéric Lerouge, Marc Rosseto. Résistanse des matériaux. — Paris: Dunod, 2004.— 454 p.
5. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов: учебник / Э.И. Старовойтов.— Гомель: БелГУТ, 2004.— 376 с.
6. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин.— М.: Физматлит, 2002.— 544 с.