

РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ОСЛАБЛЕННОЙ ТРУБЫ

Якубовский А.Ч., Якубовский Ч.А., Галуза И.М., Галуза Е.М.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The formulae for account of the inertia moment, inertia radius and resistance moment of dangerous cross-section in an injured round fine-wall tube are received. There is a cross-section in an opened ring form. The truth of derived formulae is determined. It's verified by particular formulae for the closed ring.

В современной технике во многих конструкциях с целью их облегчения при сохранении прочности используют трубные элементы, соединения которых выполняют различными способами. В частности, при соединении сваркой осуществляют подготовку кромок разделкой, а в случае с трубами иногда прибегают к вырезанию в них «окошек», что приводит к фактическому ослаблению трубы.

При проектировании сварных конструкций для обеспечения их безотказной работы проводят расчет на прочность и жесткость конструктивных элементов, что непосредственно связано с определением геометрических характеристик их поперечных сечений [1–4].

Принимая во внимание, что в качестве трубных элементов конструкций наиболее часто используют круглые в сечении трубы (чаще тонкостенные), рассмотрим поперечное сечение в форме кольца (замкнутого тонкостенного контура) со срединным диаметром D и толщиной δ . Тогда в случае ослабления трубы в расчетах следует рассматривать опасное сечение в зоне ослабления — тонкостенный контур незамкнутого кольца ($\beta=2\pi-\alpha$) с той же толщиной δ и срединным радиусом $R=D/2$ (рис. 1).

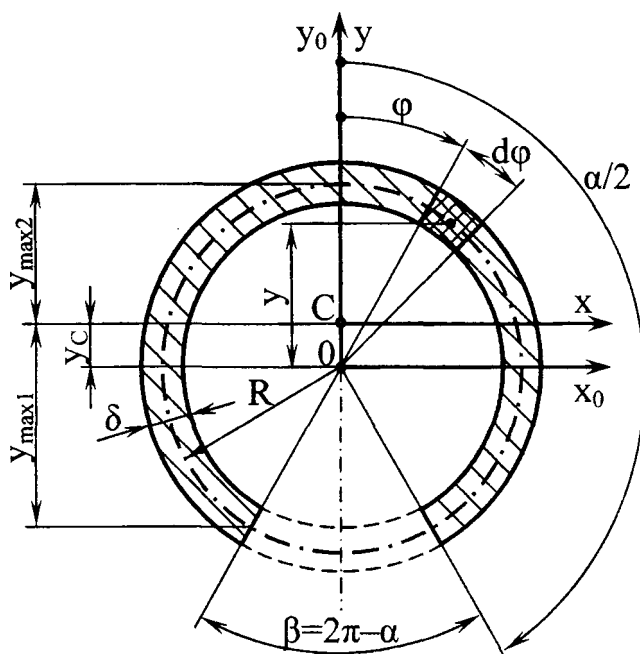


Рис. 1. Расчетная схема поперечного сечения ослабленной трубы.

Выделим из сечения элементарный участок размерами δ и $R \cdot d\phi$ (см. рис. 1), площадь которого

$$dA = \delta \cdot (R \cdot d\phi). \tag{1}$$

Тогда площадь незамкнутого кольца

$$A = \int_A dA = 2 \cdot \delta \cdot R \cdot \int_0^{\alpha/2} d\phi = R \cdot \delta \cdot \alpha. \tag{2}$$

Здесь угол α измеряется в радианах.

В частности, для замкнутого кольца при $\beta=0$ (т.е. при $\alpha=2\pi$) имеем:
 $A = 2\pi \cdot R \cdot \delta$.

Чтобы определить другие геометрические характеристики сечения, необходимо установить положение его центра тяжести (точки С на рис. 1). С этой целью введем систему вспомогательных координатных осей x_0 и y_0 с началом отсчета в точке 0, являющейся центром срединной линии сечения (центром окружности). Очевидно, что точка С будет лежать на оси y_0 , т.е. горизонтальная координата центра тяжести сечения в системе вспомогательных осей равна нулю ($x_C=0$); а вертикальную координату y_C — нужно найти.

Статический момент сечения относительно оси x_0 с учетом (1)

$$S_{x_0} = \int_A y \cdot dA = R^2 \cdot \delta \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \varphi \cdot d\varphi = R^2 \cdot \delta \cdot \sin \varphi \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = 2 \cdot R^2 \cdot \delta \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

где $y=R \cdot \cos \varphi$ — вертикальная координата выделенного из сечения элементарного участка в системе вспомогательных осей x_0 и y_0 .

Тогда из выражения (3) с учетом (2) вертикальная координата центра тяжести сечения

$$y_C = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{2 \cdot R}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

В частности, для замкнутого кольца ($\alpha=2\pi$) получим: $y_C = 0$.

Осевой момент инерции сечения относительно вспомогательной оси x_0 с учетом (1)

$$J_{x_0} = \int_A y^2 \cdot dA = R^3 \cdot \delta \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (1 + \cos 2\varphi) \cdot d\varphi = \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (\alpha + \sin \alpha). \quad (5)$$

Здесь приняли: $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$; $\int \cos 2\varphi \cdot d\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$.

Тогда с учетом выражений (2), (4) и (5) осевой момент инерции сечения относительно центральной оси x

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_0} - y_C^2 \cdot A = \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (\alpha + \sin \alpha) - \left(\frac{2 \cdot R}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot R \cdot \delta \cdot \alpha = \\ &= \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} - 8 \cdot \frac{\sin^2(\alpha/2)}{\alpha^2} \right) = \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 + a - 2 \cdot b^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь приняли $a = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$; $b = \frac{2}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$.

Осевой момент инерции сечения относительно другой центральной оси y (ось y_0) с учетом (1) равен:

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_0} = \int_A x^2 \cdot dA = R^3 \cdot \delta \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (1 - \cos 2\varphi) \cdot d\varphi = \\ &= \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (\alpha - \sin \alpha) = \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 - a). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняли $x = R \cdot \sin \varphi$; $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$.

В частности, для замкнутого кольца функции $a=0$ и $b=0$, тогда получим: $J_x = J_y = \pi \cdot R^3 \cdot \delta$.

Радиусы инерции сечения с учетом (2), (6) и (7)

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 + a - 2 \cdot b^2)}{R \cdot \delta \cdot \alpha}} = R \cdot \sqrt{\frac{1 + a - 2 \cdot b^2}{2}}; \quad (8)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 - a)}{R \cdot \delta \cdot \alpha}} = R \cdot \sqrt{\frac{1 - a}{2}}. \quad (9)$$

Для замкнутого кольца $i_x = i_y = R/\sqrt{2}$.

Моменты сопротивления сечения с учетом (6) и (7), а также с учетом координат точек на срединной линии тонкостенного контура, наиболее удаленных от центральных осей x и y (см. рис. 1), $x_{\max} = R$;

$$\begin{aligned} |y_{\max 1}| &= \left| -R \cdot \cos \frac{\beta}{2} - y_c \right| = R \cdot \cos \left(\pi - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{2 \cdot R}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = R \cdot \left(\frac{2}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= R \cdot \left(\frac{2}{\alpha} \cdot \sin(\alpha/2) - \frac{\sin \alpha}{2 \cdot \sin(\alpha/2)} \right) = R \cdot \left(b - \frac{a}{b} \right); \end{aligned}$$

$$y_{\max 2} = R - y_c = R - \frac{2 \cdot R}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = R \cdot \left(1 - \frac{2}{\alpha} \cdot \sin(\alpha/2) \right) = R \cdot (1 - b),$$

где всегда $|y_{\max 1}| \geq y_{\max 2}$ (рис. 2), определяются следующим образом:

$$W_{x1} = \frac{J_x}{|y_{\max 1}|} = \frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 + a - 2 \cdot b^2)}{R \cdot (b - a/b)} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot \frac{1 + a - 2 \cdot b^2}{b - a/b}; \quad (10)$$

$$W_{x2} = \frac{J_x}{y_{\max 2}} = \frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 + a - 2 \cdot b^2)}{R \cdot (1 - b)} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot \frac{1 + a - 2 \cdot b^2}{1 - b}; \quad (11)$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 - a)}{R} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot (1 - a). \quad (12)$$

Для замкнутого кольца при $x_{\max} = y_{\max} = R$ и $J_x = J_y = \pi \cdot R^3 \cdot \delta$ получим:

$$W_x = W_y = \pi \cdot R^2 \cdot \delta.$$

Выведенные выражения (2) и (6) – (12) в полной мере описывают геометрические характеристики опасного сечения ослабленной круглой тонкостенной трубы. Объединив входящие в них соотношения тригонометрических функций a и b в коэффициенты

$$k_1 = 1 + a - 2 \cdot b^2; \quad k_2 = 1 - a; \quad k_3 = b - a/b; \quad k_4 = 1 - b,$$

эти формулы можно представить в виде

$$J_x = \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot k_1; \quad J_y = \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot k_2; \quad i_x = R \cdot \sqrt{\frac{k_1}{2}}; \quad i_y = R \cdot \sqrt{\frac{k_2}{2}};$$

$$W_{x1} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot \frac{k_1}{k_3}; \quad W_{x2} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot \frac{k_1}{k_4}; \quad W_y = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot k_2.$$

Графическое изображение зависимостей введенных коэффициентов и тригонометрических функций от целостности контура сечения трубы (рис. 2) наглядно отображает закономерность их изменения. Очевидно, что с увеличением угла ($\beta = 2\pi - \alpha$) разделки трубы в зоне ее ослабления, особенно при $\beta > \pi$, все геометриче-

ские характеристики сечения ослабленной трубы значительно уменьшаются. Также из диаграммы видно, что геометрические характеристики сечения ослабленной трубы относительно оси, параллельной разделки, всегда меньше характеристик относительно оси, перпендикулярной разделки. Кроме того, геометрические характеристики сечения ослабленной трубы при $\beta \rightarrow 0$, когда коэффициенты $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 \rightarrow 1$, приближаются к характеристикам сечения цельной трубы.

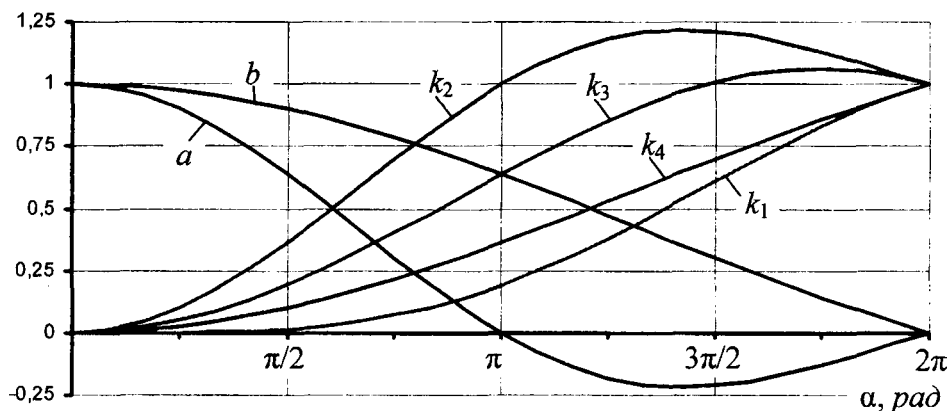


Рис. 2. Графические зависимости коэффициентов k_1 , k_2 , k_3 и k_4 и тригонометрических функций a и b от угла α .

Таким образом, достоверность приведенных выкладок подтверждается их полным соответствием известным формулам [1–4]

$A = 2\pi \cdot R \cdot \delta$; $J_x = J_y = \pi \cdot R^3 \cdot \delta$; $i_x = i_y = R/\sqrt{2}$; $W_x = W_y = \pi \cdot R^2 \cdot \delta$
 для частного случая круглого тонкостенного сечения — сечения цельной трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев.— М.: МГТУ, 1999.— 591 с.
2. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашин.— М.: Физматлит, 2002.— 544 с.
3. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов: учебник / Э.И. Старовойтов.— Гомель: БелГУТ, 2004.— 376 с.
4. Работнов, Ю.Н. Сопротивление материалов / Ю.Н. Работнов.— М.: Физматгиз, 1962.— 456 с.