

# КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТРАНСТВЕННО АРМИРОВАННЫХ СРЕД

Янковский А. П.

*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

*Предложена структурная модель термоупругого поведения пространственно армированной среды при общей анизотропии компонент композиции. На основе энергетического критерия эквивалентности и кинематических допущений о связи усредненных деформаций такого композита с деформациями в компонентах композиции определены термоупругие характеристики эквивалентного материала. Показано, что на основе полученных уравнений можно определить напряженно-деформированные состояния во всех компонентах композиции, используя известные усредненные деформации и температуру в композите, что имеет принципиальное значение при расчетах конструкций из таких композиционных материалов с использованием структурных теорий прочности.*

## **Введение**

Традиционной структурой композиционных материалов является слоистая, когда траектории армирующих волокон лежат в плоскостях слоев, связь между которыми осуществляется через прослойки связующего. (Критический анализ некоторых структурных моделей упругого поведения таких композитов проведен в [1, 2].) Однако особое внимание к себе привлекают композиционные материалы с пространственным расположением арматуры. Целесообразность пространственного расположения армирующих волокон определяется не только возможностью ликвидировать такой недостаток слоистых композитов как опасность расслоения вследствие слабого сопротивления сдвигу и поперечному отрыву, но и возможностью локализовать в пределах нескольких пространственных ячеек распространение трещин. Этим резко повышается несущая способность материала в толсто-стенных конструкциях, особенно в зонах приложения локализованных нагрузок и концентраторов напряжений при нестационарных термосиловых воздействиях, характерных для современных технических устройств [3]. Кроме того, при эксплуатации гибких тонкостенных волокнистых конструкций типа пластин изначально плоские структуры армирования могут в процессе деформирования трансформироваться в пространственные структуры.

В силу актуальности проблемы определения эффективных упругих характеристик пространственно армированных композитных сред развитию структурных теорий расчета таких материалов был посвящен ряд публикаций [3–7 и др.]. Однако все они не лишены определенных недостатков. Так, в [4] предлагаются две иерархические структурные модели пространственно армированного композита, но со строго ортогонально перекрестными волокнами, что существенно ограничивает область применимости этих моделей. Кроме того, как подчеркивают сами авторы, в рамках построенных в [4] моделей существует определенный произвол в выборе иерархии структуры, что приводит к неоднозначному определению значений эффективных упругих констант композита, причем для некоторых характеристик эквивалентного материала разброс полученных таким образом значений упругих постоянных может быть значительным. Построенные в [4] соотношения во многом базируются на допущении, что модуль упругости арматуры много больше соответствующей величины связующего (в 25 и более раз). Такие ситуации характерны лишь для волокнистых композитов с полимерным связующим [8].

Однако в настоящее время все более широкое применение находят композиты с «жестким» (металлическим) связующим, для которых указанное отношение, как правило, не превышает десяти [8]. Поэтому структурные соотношения, полученные в [4], не могут быть использованы при расчетах армированных сред с металлическим связующим.

В рамках работ [5–7] построены структурные модели пространственно армированных композитов для более общего случая – при произвольной ориентации в пространстве траекторий армирования. К недостатку этих работ относится то, что монолитная в реальности композитная среда представляется в виде отдельных однонаправленно армированных стержней, ориентация которых соответствует заданным направлениям армирования; при этом указанные армированные стержни получаются несвязанными между собой в единое целое (в монолитный материал). Кроме того, при таком подходе существует определенная неоднозначность в распределении всего объема связующего по однонаправленно армированным стержням, что существенно сказывается на значениях эффективных жесткостных характеристиках композита. Так, в [5] исследованы пять разных способов распределения связующего по стержням, приводящих к существенно разным значениям эффективных упругих констант материала.

В рамках указанных моделей определены лишь эффективные упругие [4, 5] или линейно-вязкоупругие [6, 7] характеристики композитных сред, но не определены их термоупругие свойства, такие как эффективные коэффициенты линейного теплового расширения, что не позволяет решать задачи деформирования композитных конструкций при наличии температурных полей. Кроме того, в рамках этих моделей невозможно определить в последующем напряженное состояние в материалах компонент композиции по усредненным напряжениям и деформациям в эквивалентной среде, что не позволяет использовать структурные теории прочности при расчете конструкций с использованием таких моделей, а также рассчитывать нелинейно-упругое и неупругое деформирование пространственно армированных композитных конструкций.

Настоящее исследование посвящено построению модели пространственно армированного гибридного композита, лишенной указанных выше недостатков.

**Структурная модель пространственно армированного гибридного композита.** Так как наличие арматуры с различными жесткостью и прочностью значительно расширяет диапазон свойств композиционных материалов с пространственной схемой армирования [3], то в глобальной декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  рассмотрим гибридный композит, армированный в произвольных направлениях  $K$  семействами волокон (возможно, разной физической природы) с интенсивностями  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). Удельное объемное содержание связующего обозначим через  $\omega_0$ , тогда имеет место условие нормировки

$$\omega_0 + \sum_k \omega_k = 1 \quad (\omega_0 > 0, \quad \omega_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K). \quad (1)$$

(Здесь и далее суммирование осуществляется по указанному индексу от 1 до  $K$ , если не указаны пределы.) Кроме условия нормировки (1) должны выполняться и физические условия взаимного непроникновения материалов различных компонент композиции. Эти условия накладывают определенные ограничения на предельно допустимые значения суммарных плотностей армирования (на значение суммы в (1)) при плотной упаковке армирующих элементов. Так, в [3] приведены указанные предельные значения для некоторых структур пространственного ар-

мирования композитной среды, которые меньше единицы. Далее в настоящем исследовании предполагается, что эти ограничения на значения суммарных плотностей армирования выполняются. (При построении модели упругого поведения рассматриваемого композита знание конкретных чисел  $\omega_k$  не обязательно, важным является выполнение условия нормировки (1).)

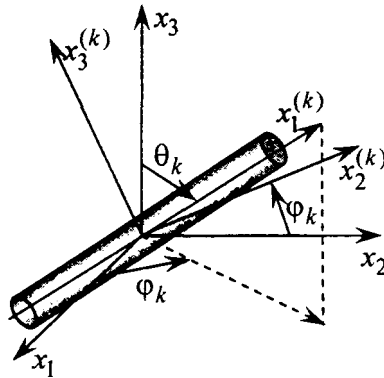


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с волокном  $k$ -го семейства

С каждым  $k$ -м семейством волокон свяжем свою локальную ортогональную систему координат  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) так, чтобы ось  $x_1^{(k)}$  совпадала с направлением траекторий армирования этого семейства, а оси  $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$  были перпендикулярны этим траекториям (см. рисунок). Углы между глобальными и локальными осями определяются таблицей направляющих косинусов.

Все компоненты композиции предполагаются анизотропными материалами, причем для удобства изложения (хотя это и не принципиально) термоупругие характеристики связующего заданы в глобальной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , а арматуры  $k$ -го семейства – в локальной системе  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ ; эффективные характеристики композиции определяются также в глобальной системе координат.

Таблица 1

Направляющие косинусы между глобальной и  $k$ -й локальной системами координат [9]

Оси	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1^{(k)}$	$l_{11}^{(k)}$	$l_{12}^{(k)}$	$l_{13}^{(k)}$
$x_2^{(k)}$	$l_{21}^{(k)}$	$l_{22}^{(k)}$	$l_{23}^{(k)}$
$x_3^{(k)}$	$l_{31}^{(k)}$	$l_{32}^{(k)}$	$l_{33}^{(k)}$

Так как при затвердевании связующего объем его может измениться, то в компонентах композиции, а значит, и в эквивалентном материале в целом могут возникнуть начальные напряжения [10]. (Определение начальных напряженных состояний в компонентах пространственно армированного композита представляет собой самостоятельную задачу, выходящую за рамки настоящего исследования. Далее в данной работе предполагаем, что эти напряжения известны.)

Согласно вышеизложенному, определяющие уравнения для эквивалентной композитной среды и компонент композиции в матричной форме имеют вид [9]

$$\begin{aligned}
\sigma &= \mathbf{p} + A(\varepsilon - \alpha T) = \partial F / \partial \varepsilon, \\
\sigma_0 &= \mathbf{p}_0 + A_0(\varepsilon_0 - \alpha_0 T_0) = \partial F_0 / \partial \varepsilon_0, \\
\bar{\sigma}_k &= \bar{\mathbf{p}}_k + \bar{A}_k(\bar{\varepsilon}_k - \bar{\alpha}_k T_k) = \partial F_k / \partial \bar{\varepsilon}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K,
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma^* &= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} \equiv \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}, \\
\mathbf{p}^* &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\} \equiv \{p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{23}, p_{31}, p_{12}\}, \\
\varepsilon^* &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\} \equiv \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}\}, \\
\alpha^* &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \equiv \{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{12}\}, \\
\sigma_0^* &= \{\sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, \sigma_4^{(0)}, \sigma_5^{(0)}, \sigma_6^{(0)}\} \equiv \{\sigma_{11}^{(0)}, \sigma_{22}^{(0)}, \sigma_{33}^{(0)}, \sigma_{23}^{(0)}, \sigma_{31}^{(0)}, \sigma_{12}^{(0)}\}, \\
\mathbf{p}_0^* &= \{p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}, p_4^{(0)}, p_5^{(0)}, p_6^{(0)}\} \equiv \{p_{11}^{(0)}, p_{22}^{(0)}, p_{33}^{(0)}, p_{23}^{(0)}, p_{31}^{(0)}, p_{12}^{(0)}\}, \\
\varepsilon_0^* &= \{\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}, \varepsilon_3^{(0)}, \varepsilon_4^{(0)}, \varepsilon_5^{(0)}, \varepsilon_6^{(0)}\} \equiv \{\varepsilon_{11}^{(0)}, \varepsilon_{22}^{(0)}, \varepsilon_{33}^{(0)}, \varepsilon_{23}^{(0)}, \varepsilon_{31}^{(0)}, \varepsilon_{12}^{(0)}\}, \\
\alpha_0^* &= \{\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}, \alpha_4^{(0)}, \alpha_5^{(0)}, \alpha_6^{(0)}\} \equiv \{\alpha_{11}^{(0)}, \alpha_{22}^{(0)}, \alpha_{33}^{(0)}, \alpha_{23}^{(0)}, \alpha_{31}^{(0)}, \alpha_{12}^{(0)}\}, \\
\bar{\sigma}_k^* &= \{\bar{\sigma}_1^{(k)}, \bar{\sigma}_2^{(k)}, \bar{\sigma}_3^{(k)}, \bar{\sigma}_4^{(k)}, \bar{\sigma}_5^{(k)}, \bar{\sigma}_6^{(k)}\} \equiv \{\bar{\sigma}_{11}^{(k)}, \bar{\sigma}_{22}^{(k)}, \bar{\sigma}_{33}^{(k)}, \bar{\sigma}_{23}^{(k)}, \bar{\sigma}_{31}^{(k)}, \bar{\sigma}_{12}^{(k)}\}, \\
\bar{\mathbf{p}}_k^* &= \{\bar{p}_1^{(k)}, \bar{p}_2^{(k)}, \bar{p}_3^{(k)}, \bar{p}_4^{(k)}, \bar{p}_5^{(k)}, \bar{p}_6^{(k)}\} \equiv \{\bar{p}_{11}^{(k)}, \bar{p}_{22}^{(k)}, \bar{p}_{33}^{(k)}, \bar{p}_{23}^{(k)}, \bar{p}_{31}^{(k)}, \bar{p}_{12}^{(k)}\}, \\
\bar{\varepsilon}_k^* &= \{\bar{\varepsilon}_1^{(k)}, \bar{\varepsilon}_2^{(k)}, \bar{\varepsilon}_3^{(k)}, \bar{\varepsilon}_4^{(k)}, \bar{\varepsilon}_5^{(k)}, \bar{\varepsilon}_6^{(k)}\} \equiv \{\bar{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{33}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{23}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{31}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{12}^{(k)}\}, \\
\bar{\alpha}_k^* &= \{\bar{\alpha}_1^{(k)}, \bar{\alpha}_2^{(k)}, \bar{\alpha}_3^{(k)}, \bar{\alpha}_4^{(k)}, \bar{\alpha}_5^{(k)}, \bar{\alpha}_6^{(k)}\} \equiv \{\bar{\alpha}_{11}^{(k)}, \bar{\alpha}_{22}^{(k)}, \bar{\alpha}_{33}^{(k)}, \bar{\alpha}_{23}^{(k)}, \bar{\alpha}_{31}^{(k)}, \bar{\alpha}_{12}^{(k)}\};
\end{aligned} \tag{3}$$

$A = (A_{ij})$ ,  $A_0 = (A_{ij}^{(0)})$ ,  $\bar{A}_k = (\bar{A}_{ij}^{(k)})$  –  $6 \times 6$  симметричные матрицы жесткостей фиктивного материала, связующего и арматуры  $k$ -го семейства соответственно;  $\sigma$ ,  $\sigma_0$ ,  $\bar{\sigma}_k$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_0$ ,  $\bar{\mathbf{p}}_k$  – векторы-столбцы напряжений и начальных напряжений в тех же материалах соответственно;  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\bar{\varepsilon}_k$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_0$ ,  $\bar{\alpha}_k$  – векторы-столбцы деформаций и коэффициентов теплового расширения тех же материалов соответственно (здесь в отличие от [9] для удобства изложения под  $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$  и т. п. понимаются не полные сдвиговые деформации, а их половины, равные соответствующим компонентам тензоров деформаций  $\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}$  и т. п.);  $T, T_0, T_k$  – отклонение температуры композита, связующего и арматуры  $k$ -го семейства от температуры естественного состояния  $\theta$ ;  $F, F_0, F_k$  – удельные свободные энергии Гельмгольца (инварианты) эквивалентной среды, связующего материала и арматуры  $k$ -го семейства, имеющие выражения [11]

$$\begin{aligned}
F &= \varepsilon^* \mathbf{p} + \varepsilon^* A \varepsilon / 2 - \varepsilon^* A \alpha T - \zeta T - c^\varepsilon T^2 / (2\theta), \\
F_0 &= \varepsilon_0^* \mathbf{p}_0 + \varepsilon_0^* A_0 \varepsilon_0 / 2 - \varepsilon_0^* A_0 \alpha_0 T_0 - c_0^\varepsilon T_0^2 / (2\theta), \\
F_k &= \bar{\varepsilon}_k^* \bar{\mathbf{p}}_k + \bar{\varepsilon}_k^* \bar{A}_k \bar{\varepsilon}_k / 2 - \bar{\varepsilon}_k^* \bar{A}_k \bar{\alpha}_k T_k - c_k^\varepsilon T_k^2 / (2\theta), \quad 1 \leq k \leq K;
\end{aligned} \tag{4}$$

$\zeta$  – некоторая термомеханическая характеристика композита, смысл которой будет выяснен ниже;  $c^\varepsilon, c_0^\varepsilon, c_k^\varepsilon$  – теплоемкость (при постоянной деформации) фиктивного материала, связующего и арматуры  $k$ -го семейства соответственно; «звез-

дочка» означает операцию транспонирования. В соотношениях (2)–(4) и далее чертой сверху будем обозначать величины, определенные в локальной системе координат  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ , связанной с  $k$ -м семейством волокон, а те же величины, определенные в глобальной системе  $x_1, x_2, x_3$ , будем обозначать теми же символами, но без черты. Равенства (3) задают соответствия между шестью компонентами  $f_i, f_i^{(0)}, \bar{f}_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) некоторых векторов  $\mathbf{f}, \mathbf{f}_0, \bar{\mathbf{f}}_k$  и компонентами соответствующих симметричных тензоров второго ранга  $f_{ij}, f_{ij}^{(0)}, \bar{f}_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = 1, 2, 3; 1 \leq k \leq K$ ).

В случаях, когда волокна изготовлены из изотропных или моноотропных (с главной осью анизотропии, совпадающей с направлением армирования) материалов, направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  (см. таблицу) можно однозначно определить с помощью двух углов сферической системы координат (см. рисунок): полярного расстояния  $\theta_k$  и долготы  $\varphi_k$ . При этом ось  $x_2^{(k)}$  удобно получить поворотом оси  $x_2$  на угол  $\varphi_k$  вокруг оси  $x_3$  (именно этот случай изображен на рисунке), а направление оси  $x_3^{(k)}$  определяется векторным произведением ортов, задающих направления  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ . Направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  при таком задании локальной системы координат вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k, \quad l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \\ l_{23}^{(k)} = 0, \quad l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (5)$$

(Соотношения (5) могут быть использованы и в случае общей анизотропии материалов арматуры, но тогда все характеристики материала волокон  $k$ -го семейства обязательно должны быть заданы именно в этой системе координат.)

Так как установить фактическое распределение напряжений и деформаций в композитной среде, где основной материал имеет многочисленные более жесткие включения, весьма затруднительно [9], то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения всех независимых термоупругих постоянных пространственно армированного материала необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок, аналогичных принятым в [1, 2, 9].

1. Армированный материал представляет собой сплошное макроскопически квазиоднородное анизотропное тело. (При достаточно густом равномерном насыщении связующего арматурными стержнями или волокнами это предположение вполне допустимо. К этому выводу приходят все исследователи, изучающие механические свойства дисперсно-армированных сред [9].)
2. Между связующим и арматурой существует полное сцепление (идеальный термомеханический контакт).
3. В пределах представительного элемента, выделенного из композита на миниуровне, деформации, напряжения и температуры во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей деформаций, напряжений и температур на микроуровне в малых окрестностях границ контакта связующего и волокон, пренебрегаем.
4. Усредненные поля деформаций и температуры в композиции определяются по правилу простой смеси – пропорционально объемному содержанию каждого составляющего (кинематическая гипотеза).

5. Все фазовые материалы линейно упруги и однородны; связь между деформациями, напряжениями и температурой в них определяется соотношениями Дюамеля – Неймана, записанными в матричной форме (2).
6. В качестве условия эквивалентности выступает равенство свободной энергии фиктивного однородного анизотропного материала свободной энергии рассматриваемого композита.

При переходе от глобальной системы координат  $x_1, x_2, x_3$  к локальной системе

$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$  имеют место преобразования векторов (3):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k &= G_k \sigma_k \quad (\bar{\sigma}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)}), \quad \bar{p}_k = G_k p_k \quad (\bar{p}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} p_j^{(k)}), \\ \bar{\varepsilon}_k &= G_k \varepsilon_k \quad (\bar{\varepsilon}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)}, \quad i = \overline{1, 6}) \end{aligned} \quad (6)$$

и обратные им преобразования

$$\sigma_k = G_k^{-1} \bar{\sigma}_k, \quad p_k = G_k^{-1} \bar{p}_k, \quad \varepsilon_k = G_k^{-1} \bar{\varepsilon}_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (7)$$

где  $G_k^{-1}$  – матрица, обратная невырожденной  $6 \times 6$  матрице  $G_k = (g_{ij}^{(k)})$  с компонентами (см. табл. (21.40) в [9]):

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad g_{13}^{(k)} = l_{13}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \quad g_{14}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \quad g_{15}^{(k)} = 2l_{13}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \\ g_{16}^{(k)} &= 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{21}^{(k)} = l_{21}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{22}^{(k)} = l_{22}^{(k)} l_{22}^{(k)}, \quad g_{23}^{(k)} = l_{23}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{24}^{(k)} = 2l_{23}^{(k)} l_{22}^{(k)}, \\ g_{25}^{(k)} &= 2l_{23}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{26}^{(k)} = 2l_{22}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{31}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{31}^{(k)}, \quad g_{32}^{(k)} = l_{32}^{(k)} l_{32}^{(k)}, \quad g_{33}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{33}^{(k)}, \\ g_{34}^{(k)} &= 2l_{33}^{(k)} l_{32}^{(k)}, \quad g_{35}^{(k)} = 2l_{33}^{(k)} l_{31}^{(k)}, \quad g_{36}^{(k)} = 2l_{32}^{(k)} l_{31}^{(k)}, \quad g_{41}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{42}^{(k)} = l_{32}^{(k)} l_{22}^{(k)}, \\ g_{43}^{(k)} &= l_{33}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{44}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{32}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{45}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{21}^{(k)} + l_{31}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{46}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{22}^{(k)} + \\ &+ l_{32}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{51}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{52}^{(k)} = l_{32}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad g_{53}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \quad g_{54}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{12}^{(k)} + l_{32}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \\ g_{55}^{(k)} &= l_{33}^{(k)} l_{11}^{(k)} + l_{31}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \quad g_{56}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{12}^{(k)} + l_{32}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{61}^{(k)} = l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{62}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{22}^{(k)}, \\ g_{63}^{(k)} &= l_{13}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{64}^{(k)} = l_{13}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{65}^{(k)} = l_{13}^{(k)} l_{21}^{(k)} + l_{11}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \\ g_{66}^{(k)} &= l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $l_{ij}^{(k)}$  – направляющие косинусы (см. таблицу и (5)); матрица  $G_k^{-1}$  совпадает с транспонированной матрицей (21.44) в [9].

В силу второго и третьего допущений и условий сопряжения полей напряжений, перемещений и температур на границах контакта волокон со связующим с учетом соотношений, аналогичных (6), получим

$$T_k = T_0 \quad (1 \leq k \leq K); \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_i^{(k)} = \bar{\sigma}_i^{(0,k)} = \sum_{j=1}^6 q_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(0)} \quad (i = \overline{2, 6}, \quad 1 \leq k \leq K); \quad (10)$$

$$\bar{p}_i^{(k)} = \bar{p}_i^{(0,k)} = \sum_{j=1}^6 q_{ij}^{(k)} p_j^{(0)} \quad (i = \overline{2, 6}, \quad 1 \leq k \leq K); \quad (11)$$

$$\bar{\varepsilon}_1^{(k)} = \bar{\varepsilon}_1^{(0,k)} = \sum_{j=1}^6 q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(0)} \quad (1 \leq k \leq K), \quad (12)$$

где  $\bar{\sigma}_i^{(0,k)}$ ,  $\bar{p}_i^{(0,k)}$ ,  $\bar{\varepsilon}_1^{(0,k)}$  – напряжения и деформации в связующем, определенные в локальной системе координат  $x_1^{(k)}$ ,  $x_2^{(k)}$ ,  $x_3^{(k)}$ . (Кроме того, из тех же допущений помимо равенств (9) в пределах представительного элемента с учетом закона теплопроводности Фурье тождественно выполняются и условия сопряжения по тепловым потокам на границах контакта связующего и волокон.)

Согласно четвертому допущению, усредненные поля температуры и деформаций в композиции определяются так:

$$T = \omega_0 T_0 + \sum_k \omega_k T_k; \quad (13)$$

$$\varepsilon = \omega_0 \varepsilon_0 + \sum_k \omega_k \varepsilon_k; \quad (14)$$

(Здесь соотношение (14) записано в глобальной системе координат  $x_i$ .)

Из равенства (13) с учетом (9), (1) следует

$$T = T_k = T_0 \quad (1 \leq k \leq K), \quad (15)$$

т.е. средняя температура композиции в пределах представительного элемента равна температуре каждой компоненты.

Из равенств (10), (12) с учетом (2), (11), (15) и пятого допущения вытекает

$$\bar{\varepsilon}_1^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(0)}, \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^6 \left( \bar{A}_{ij}^{(k)} \bar{\varepsilon}_j^{(k)} - \bar{A}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} T \right) = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sum_{l=1}^6 \left( A_{jl}^{(0)} \varepsilon_l^{(0)} - A_{jl}^{(0)} \alpha_l^{(0)} T \right), \quad i = \overline{2, 6}, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Эту систему запишем в следующей матричной форме

$$B_k \bar{\varepsilon}_k = C_k \varepsilon_0 + D_k T, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (17)$$

где ненулевые элементы  $6 \times 6$  матриц  $B_k = (b_{ij}^{(k)})$ ,  $C_k = (c_{ij}^{(k)})$  и вектора  $D_k = \{d_i^{(k)}\}$  согласно (16) определяются так:

$$\begin{aligned} B_{11}^{(k)} &= 1, \quad B_{1j}^{(k)} = 0 \quad (j = \overline{2, 6}), \quad B_{ij}^{(k)} = \bar{A}_{ij}^{(k)} \quad (i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}), \\ C_{1j}^{(k)} &= g_{1j}^{(k)} \quad (j = \overline{1, 6}), \quad C_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} A_{lj}^{(0)} \quad (i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}), \\ D_1^{(k)} &= 0, \quad D_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 \left( \bar{A}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} - g_{ij}^{(k)} \sum_{l=1}^6 A_{jl}^{(0)} \alpha_l^{(0)} \right) \quad (i = \overline{2, 6}). \end{aligned} \quad (18)$$

В частном случае изотропных материалов компонент композиции в (2) и (18) нужно учесть, что ненулевые элементы матриц  $\bar{A}_k$ ,  $A_0$  и векторов  $\bar{\alpha}_k$ ,  $\alpha_0$  имеют вид [9]:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ii}^{(k)} &= A_{ii}^{(k)} = 2G^{(k)} (1 - \nu^{(k)}) / (1 - 2\nu^{(k)}), \quad \bar{A}_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)} \nu^{(k)} / (1 - 2\nu^{(k)}), \\ \bar{A}_{ll}^{(k)} &= A_{ll}^{(k)} = 2G^{(k)} = E^{(k)} / (1 + \nu^{(k)}) \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad j \neq i, \quad l = 4, 5, 6), \\ \bar{\alpha}_i^{(k)} &= \alpha_i^{(k)} = \alpha^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq K), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $E^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$ ,  $\alpha^{(k)}$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного теплового расширения  $k$ -й компоненты композиции.

В силу (18)  $\det B_k \neq 0$ , поэтому из (17) получаем

$$\bar{\varepsilon}_k = E_k \varepsilon_0 + \mathbf{F}_k T, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (20)$$

где

$$E_k = B_k^{-1} C_k, \quad \mathbf{F}_k = B_k^{-1} \mathbf{D}_k; \quad (21)$$

$B_k^{-1}$  – матрица, обратная  $B_k$ .

Соотношение (20) определяет деформации  $\bar{\varepsilon}_k$   $k$ -го семейства арматуры (заданные в локальной системе координат  $x_i^{(k)}$ ) через температуру  $T$  и деформации  $\varepsilon_0$  связующего (заданные в глобальной системе  $x_i$ ).

Преобразуем равенство (14) с учетом (7), (20), тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega_0 \varepsilon_0 + \sum_k \omega_k G_k^{-1} \bar{\varepsilon}_k = \omega_0 \varepsilon_0 + \sum_k \omega_k G_k^{-1} (E_k \varepsilon_0 + \mathbf{F}_k T) = \\ &= \left( \omega_0 I + \sum_k \omega_k G_k^{-1} E_k \right) \varepsilon_0 + \sum_k \omega_k G_k^{-1} \mathbf{F}_k, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $I$  –  $6 \times 6$  единичная матрица. Из соотношения (22) следует

$$\varepsilon_0 = H \varepsilon - H \mathbf{f} T, \quad (23)$$

где  $H$  –  $6 \times 6$  матрица,  $\mathbf{f}$  – вектор-столбец вида

$$H = \left( \omega_0 I + \sum_k \omega_k G_k^{-1} E_k \right)^{-1}, \quad \mathbf{f} = \sum_k \omega_k G_k^{-1} \mathbf{F}_k. \quad (24)$$

Соотношение (23) определяет деформации в связующем  $\varepsilon_0$  через усредненные деформации композиции  $\varepsilon$  и температуру  $T$ .

Согласно первому и шестому допущениям имеем

$$F = \omega_0 F_0 + \sum_k \omega_k F_k.$$

Из этого соотношения с учетом (4), (15) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^* \mathbf{p} + \varepsilon^* A \varepsilon / 2 - \varepsilon^* A \alpha T - \zeta T - c^\varepsilon T^2 / (2\theta) &= \\ = \omega_0 \left[ \varepsilon_0^* \mathbf{p}_0 + \varepsilon_0^* A_0 \varepsilon_0 / 2 - \varepsilon_0^* A_0 \alpha_0 T - c_0^\varepsilon T^2 / (2\theta) \right] &+ \\ + \sum_k \omega_k \left[ \bar{\varepsilon}_k^* \bar{\mathbf{p}}_k + \bar{\varepsilon}_k^* \bar{A}_k \bar{\varepsilon}_k / 2 - \bar{\varepsilon}_k^* \bar{A}_k \bar{\alpha}_k T - c_k^\varepsilon T^2 / (2\theta) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Выразим в (25) за счет (20) деформации  $\bar{\varepsilon}_k$  через  $\varepsilon_0$ , а затем, используя (23), исключим из правой части этого равенства вектор  $\varepsilon_0$ , тогда после элементарных преобразований с учетом симметрии матриц  $\bar{A}_k$ ,  $A_0$  будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon^* \mathbf{p} + \varepsilon^* A \varepsilon / 2 - \varepsilon^* A \alpha T - \zeta T - c^\varepsilon T^2 / (2\theta) &= \omega_0 \left\{ \varepsilon^* H^* \mathbf{p}_0 - \mathbf{f}^* H^* \mathbf{p}_0 T + \varepsilon^* H^* A_0 H \varepsilon / 2 - \right. \\ &- \varepsilon^* H^* A_0 (\alpha_0 + H \mathbf{f}) T + \left[ \mathbf{f}^* H^* A_0 (2\alpha_0 + H \mathbf{f}) - c_0^\varepsilon / \theta \right] T^2 / 2 \left. \right\} + \sum_k \omega_k \left\{ \varepsilon^* H^* E_k^* \bar{\mathbf{p}}_k + \right. \\ &+ \left( \mathbf{F}_k^* - \mathbf{f}^* H^* E_k^* \right) \bar{\mathbf{p}}_k T + \varepsilon^* H^* E_k^* \bar{A}_k E_k H \varepsilon / 2 - \varepsilon^* H^* E_k^* \bar{A}_k (\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k + E_k H \mathbf{f}) T + \\ &+ \left. \left[ \mathbf{f}^* H^* E_k^* \bar{A}_k (E_k H \mathbf{f} - 2\mathbf{F}_k + 2\bar{\alpha}_k) - \mathbf{F}_k^* \bar{A}_k (2\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k) - c_k^\varepsilon / \theta \right] T^2 / 2 \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как равенство в (26) должно выполняться при любых  $\varepsilon$ ,  $T$ , то из него вытекают следующие соотношения:



$$\begin{aligned}
A &= H^* \left( \omega_0 A_0 + \sum_k \omega_k E_k^* \bar{A}_k E_k \right) H, \\
\mathbf{p} &= H^* \left( \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_k \omega_k E_k^* \bar{\mathbf{p}}_k \right), \\
c^\varepsilon / \theta &= \omega_0 \left[ c_0^\varepsilon / \theta - \mathbf{f}^* H^* A_0 (2\alpha_0 + H\mathbf{f}) \right] + \sum_k \omega_k \left[ c_k^\varepsilon / \theta - \mathbf{f}^* H^* E_k^* \bar{A}_k \times \right. \\
&\quad \left. \times (E_k H\mathbf{f} - 2\mathbf{F}_k + 2\bar{\alpha}_k) + \mathbf{F}_k^* \bar{A}_k (2\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k) \right], \\
\zeta &= \omega_0 \mathbf{f}^* H^* \mathbf{p}_0 - \sum_k \omega_k \left( \mathbf{F}_k^* - \mathbf{f}^* H^* E_k^* \right) \bar{\mathbf{p}}_k; \\
A\alpha &= H^* \left[ \omega_0 A_0 (\alpha_0 + H\mathbf{f}) + \sum_k \omega_k E_k^* \bar{A}_k (\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k + E_k H\mathbf{f}) \right], \tag{28}
\end{aligned}$$

где нужно учесть выражения для матриц и векторов (21), (24), (18), (8).

Из равенства (28) следует

$$\alpha = A^{-1} H^* \left[ \omega_0 A_0 (\alpha_0 + H\mathbf{f}) + \sum_k \omega_k E_k^* \bar{A}_k (\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k + E_k H\mathbf{f}) \right], \tag{29}$$

где  $A^{-1} = (a_{ij})$  – матрица, обратная  $A$  (см. (27)), – матрица эффективных коэффициентов податливости композиции  $a_{ij}$ .

Первое равенство (27) определяет в матричной форме эффективные механические жесткости рассматриваемой композиции; соотношение (28) – эффективные температурные жесткости; равенство (29) – эффективные коэффициенты линейного теплового расширения; второе соотношение (27) – усредненное начальное напряженное состояние в композиции; третье равенство (27) – эффективную теплоемкость композиции; четвертое соотношение (27) – эффективную постоянную  $\zeta$ .

Помимо первого соотношения (2) на основании первого равенства (4) дополнительно получим [11]

$$S = -\partial F / \partial T = \varepsilon^* A\alpha + \zeta + c^\varepsilon T / \theta,$$

где  $S$  – удельная энтропия рассматриваемой композиции. Следовательно, постоянная  $\zeta$  определяет удельную энтропию композита в естественном состоянии ( $\varepsilon = 0$ ,  $T = 0$ ), вызванную наличием начального напряженного состояния во всех компонентах композиции.

**З а м е ч а н и е 1.** В настоящем исследовании метод определения эффективных характеристик рассматриваемого композита назван кинематическим, так как в качестве одной из гипотез (четвертой) использовались кинематические равенства (14), связывающие между собой средние деформации композиции с деформациями фазовых материалов. При этом никаких допущений о связи средних напряжений  $\sigma$  в композите с напряжениями  $\sigma_0$ ,  $\bar{\sigma}_k$  в фазовых материалах не делалось. Определить эффективные характеристики рассматриваемого композита можно было бы, введя соответствующую гипотезу, позволяющую связать  $\sigma$  с  $\sigma_0$ ,  $\bar{\sigma}_k$ , и не делая никаких допущений о связи  $\varepsilon$  с  $\varepsilon_0$ ,  $\bar{\varepsilon}_k$  ( $1 \leq k \leq K$ ). Такой подход целесообразно назвать статическим методом определения эффективных характеристик пространственно армированного композита. Изложение этого метода выходит за рамки настоящего исследования в силу ограниченности объема статьи.

**З а м е ч а н и е 2.** Важной особенностью предложенной модели рассматриваемого композита является возможность определения напряжений  $\sigma_0, \bar{\sigma}_k$  и деформаций  $\epsilon_0, \bar{\epsilon}_k$  в компонентах композиции по известным средним деформациям  $\epsilon$ . Действительно, пусть известны деформации  $\epsilon$  и температура  $T$ , тогда из (23), (20), (15) можно определить  $\epsilon_0, \bar{\epsilon}_k, T_0, T_k$ , а из второго и третьего соотношений (2) можно получить напряжения  $\sigma_0, \bar{\sigma}_k$ . Знание напряжений  $\sigma_0, \bar{\sigma}_k$  и деформаций  $\epsilon_0, \bar{\epsilon}_k$  ( $1 \leq k \leq K$ ) имеет принципиальное значение при использовании в дальнейшем структурных теорий прочности, и кроме того, для изотропных материалов компонент композиции позволяет построить структурные формулы для эффективных характеристик композита при нелинейно-упругом или упругопластическом деформировании материалов компонент композиции, так как реальные материалы часто имеют нелинейные зависимости  $\sigma \sim \epsilon$  [12]. Для этого можно использовать деформационную теорию пластичности и метод переменных параметров упругости [12], причем на каждой итерации этого метода приближения для эффективных характеристик исследуемого композита можно определить по изложенной выше схеме, заменив лишь  $G^{(k)}, \nu^{(k)}$  в (19) на значения (при  $T = 0, \bar{p}_k = 0, p_0 = 0$ )

$$\tilde{G}^{(k)} = \frac{\sigma_i^{(k)}}{3\epsilon_i^{(k)}}, \quad \tilde{\nu}^{(k)} = \frac{1/2 - (1 - 2\nu^{(k)})\sigma_i^{(k)} / (3E^{(k)}\epsilon_i^{(k)})}{1 + (1 - 2\nu^{(k)})\sigma_i^{(k)} / (3E^{(k)}\epsilon_i^{(k)})}, \quad 0 \leq k \leq K,$$

где  $\sigma_i^{(k)}, \epsilon_i^{(k)}$  – интенсивности напряжений и деформаций в  $k$ -й компоненте композиции, известные из решения на предыдущей итерации (на первой итерации все материалы предполагаются линейно-упругими с характеристиками  $E^{(k)}, \nu^{(k)}, G^{(k)}$ ).

**З а м е ч а н и е 3.** Полученные в настоящем исследовании соотношения (27)–(29) могут быть использованы для определения эффективных характеристик композитов, армированных волокнами с покрытиями (типа борных [8]), а также при учете переходных зон [10], возникающих в силу химического взаимодействия волокон со связующим на границах их контактов (зоны интерметаллидов в металлокомпозитах и т. п.) или частичного разрушения компонент композиции на этих границах. Для этого указанные покрытия или зоны нужно рассматривать как дополнительные фиктивные семейства арматуры, удельное объемное содержание и физико-механические характеристики которых известны.

### **Заключение**

Предложенная структурная модель позволяет определить все эффективные термоупругие характеристики пространственно армированного в произвольных направлениях композита при общей анизотропии материалов компонент композиции. Кроме того, в рамках этой модели можно определить напряженное состояние во все компонентах композиции, что является важным обстоятельством для использования в последующем структурных теорий прочности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-90402-Укр\_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 72).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Эффективные физико-механические характеристики композитов, однонаправлено армированных моноотропными волокнами. Сообщение 1: модель армированной среды // Известия вузов. Строительство. – 2006. – № 5. – С. 16–24.
2. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 1. – С. 3–32.
3. Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
4. Тарнопольский Ю.М., Поляков В.А., Жигун И.Г. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // Механика полимеров. – 1973. – № 5. – С. 853–860.
5. Крегер А.Ф., Мелбардис Ю.Г. Определение деформируемости пространственно армированных композитов методом усреднения жесткостей // Механика полимеров. – 1978. – № 1. – С. 3–8.
6. Крегер А.Ф., Тетерс Г.А. Применение методов усреднения для определения вязкоупругих свойств пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1979. – № 4. – С. 617–624.
7. Крегерс А.Ф., Тетерс Г.А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1982. – № 1. – С. 14–22.
8. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
9. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Соппротивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1972. – 500 с.
10. Каримбаев Т.Д., Мыктыбеков Б.М., Панова И.М. Математические модели нелинейного деформирования однонаправленно-армированных композиционных материалов. – М.: Труды ЦИАМ № 1334, 2005. – 160 с.
11. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
12. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.