Доклады Национальной академии наук Беларуси

1999 сентябрь—октябрь Том 43 № 5

УДК 621.391.3.052

Г. В. СИНИЦЫН, М. А. ХОДАСЕВИЧ, А. С. ЯСЮКЕВИЧ

ЭЛЕКТРОННЫЙ КОММУНИКАЦИОННЫЙ КАНАЛ В МОДЕЛИ СВОБОДНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ФЕРМИ-ГАЗА

(Представлено академиком А. М. Гончаренко)

Развитие новых технологий в области обработки и передачи информации стимулирует интерес к изучению свойств каналов при передаче предельно больших информационных потоков, когда классические подходы оказываются несправедливыми. В этом случае существенную роль начинает играть квантовая статистика, которой подчиняются носители информации в том или ином канале. В настоящее время довольно подробно исследованы фотонные каналы, свойства которых при больших мощностях сигнала определяются статистикой Бозе—Эйнштейна [1—3]. Каналы с такой статистикой носителей обладают свойством аддитивности, которое позволило авторам работ [2, 3] применить негэнтропийный принцип Бриллюэна [4] для исследования характеристик канала при больших потоках информации.

Для каналов, где носителями являются электроны, подчиняющиеся статистике Ферми—Дирака, сигнал и шум, вообще говоря, не аддитивны. Лишь при малых числах заполнения состояний, когда квантово-статистические свойства носителей информации можно не учитывать (классический случай), шум в электронном канале может рассматриваться как аддитивный. Поэтому в общем случае негэнтропийный принцип дает верхнюю оценку пропускной способности электронного канала [5].

В данной работе мы используем подход, предложенный в работах [2, 3], для изучения пропускной способности канала, где носителями информации являются электроны, образующие свободный ферми-газ.

Модель одномерного электронного канала. Рассмотрим электронный коммуникационный канал, представляющий собой одномерное распределение N свободных электронов на длине L, находящихся в равновесном состоянии при температуре T_0. Будем считать, что энергия сигнала E_s вводится в канал со скоростью света c, которая определяет длительность $\tau = L/c$ и мощность $P_s = E_s/\tau$ передаваемого сигнала. Приемник не вносит ограничений в процесс передачи информации.

Согласно негэнтропийному принципу Бриллюэна, максимальное количество информации, которое может быть передано по каналу, равно [2]

$$I_{\max} = \frac{1}{\ln 2}\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{kT}\frac{dE(T)}{dT}dT. \qquad (1)$$

Здесь единица измерения информации — бит, k — постоянная Больцмана, $E(T)$ — полная энергия электронов канала при некоторой равновесной температуре T:

$$E(T) = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon, T)D(\varepsilon)d\varepsilon, \qquad (2)$$

где ε — энергия одноэлектронного состояния; $f(\varepsilon, T)$ — функция распределения Ферми—Дирака; $D(\varepsilon)$ — плотность одноэлектронных состояний.

Максимальное количество информации $I_{\max}$ в электронном канале, передаваемое сигналом с энергией E_s, достигается на распределении микросостояний, соответствующем термодинамическому равновесию при температуре T_1, которую можно определить из условия [2]

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dE}{dT} dT = E_s. \tag{3}$$

Наиболее интересным является изучение свойств электронного канала при температурах, близких к комнатным. Для типичных проводников при таких температурах ($T \ll T_F$, T_F — температура Ферми) электроны ведут себя как вырожденный ферми-газ. Теплоемкость c_e свободного вырожденного электронного газа может быть представлена в виде [6]

$$c_e(T) \doteq \frac{dE}{dT} \approx D(\varepsilon_F) \int_0^{\infty} d\varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_F) \frac{1}{3} \pi^2 D(\varepsilon_F) k^2 T, \tag{4}$$

где $\varepsilon_F = kT_F$ — энергия Ферми.

С помощью (3) и (4) найдем связь между энергией сигнала и соответствующей температурой T_1 некоего равновесного состояния коммуникационного канала

$$E_s = \int_{T_0}^{T_1} c_e dT = \frac{1}{6} \pi^2 D(\varepsilon_F) k^2 \left(T_1^2 - T_0^2\right). \tag{5}$$

Тепловая энергия $E(T_0)$ движения электронов при температуре T_0 определяется следующим образом:

$$E(T_0) = \int_0^{T_0} c_e dT = \frac{1}{6} \pi^2 D(\varepsilon_F)(kT_0)^2. \tag{6}$$

Тогда значение равновесной температуры T_1 находим из (5) и (6):

$$T_1 = T_0 \sqrt{1 + \frac{E_s}{E(T_0)}}. \tag{7}$$

Следуя определению (1), максимальную информацию I_{max}, передаваемую электронной системой, можно представить в виде

$$I_{max} = \frac{2E(T_0)}{\ln 2\, kT_0} \left(\sqrt{1 + \frac{E_s}{E(T_0)}} - 1 \right). \tag{8}$$

И пропускная способность C_{1D} рассматриваемой модели определяется как

$$C_{1D} = \frac{I_{max}}{\tau} = \frac{2P_n(T_0)}{\ln 2\, k\, T_0} \left(\sqrt{1 + \frac{P_s}{P_n(T_0)}} - 1 \right), \tag{9}$$

где $P_n(T_0) = E(T_0)/\tau$ по отношению к мощности сигнала P_s в процессе передачи информации является шумовой мощностью в канале.

Выражение (9) для пропускной способности электронного коммуникационного канала в рамках модели одномерного свободного вырожденного ферми-газа аналогично выражению для пропускной способности одномерного бозонного коммуникационного канала [2].

При малых скоростях передачи информации, когда мощность сигнала мала по сравнению с шумовой мощностью, выражение (9) переходит в классическое соотношение [7]

$$C_{class} = \frac{P_s}{\ln 2\, kT_0}. \tag{10}$$

Область применимости модели. Из условия вырожденности ферми-газа $T \ll T_F$ найдем область применимости рассматриваемой модели. Температура Ферми для одномерного распределения электронов определяется соотношением [6]

$$T_F = \frac{\pi^2 \hbar^2 n_e^2}{8km_e}, \tag{11}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка; $n_e = N/L$ — линейная концентрация электронов; m_e — масса электрона. Для хороших проводников (серебро, золото) $n_e \approx 4 \cdot 10^9$ м$^{-1}$ и $T_F \approx 16000$ К, т. е.

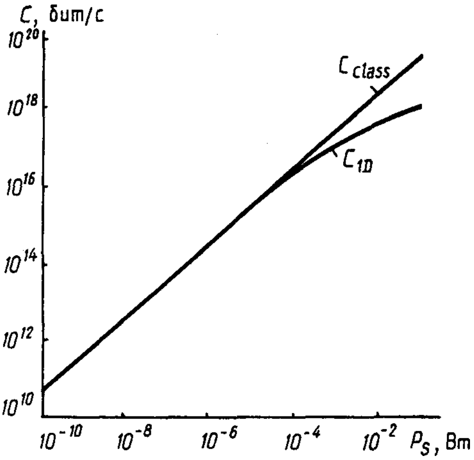
при комнатных температурах электронный ферми-газ вырожден и предлагаемая модель применима. Это справедливо также для двух- и трехмерных распределений электронов [6].

Оценим ограничение на мощность сигнала в рассматриваемой модели коммуникационного канала. Условие вырожденности электронного ферми-газа с помощью (7), (11) и выражения для плотности одноэлектронных состояний при энергии Ферми [6] можно преобразовать к виду

$$E_s \ll E_s^{\lim} = \frac{\pi^4 c\hbar^2 n_e^3}{96 m_e} = \frac{\pi^2}{12}\varepsilon_F N. \tag{12}$$

Из этого неравенства видно, что средняя энергия сигнала, приходящаяся на один электрон канала, должна быть много меньше энергии Ферми. Численная оценка предельной мощности сигнала дает для хороших проводников величину $P_s^{\lim} \approx 0{,}2$ Вт.

Как видно из рисунка, для рассматриваемой модели одномерного электронного канала нелинейные эффекты, обусловленные квантово-статистическими свойствами электронов, начинают проявляться уже при мощностях сигнала $\le 10^{-4}$ Вт и скоростях передачи информации $\le 10^{16}$ бит/с.



Пропускные способности классического (C_{class}) и одномерного электронного (C_{1D}) коммуникационных каналов при температуре 300 K

Модель многомерного электронного канала. При одномерном распределении электронов каждому энергетическому уровню соответствует единственное квантовое состояние. При переходе к двух- и трехмерным распределениям электронов появляется вырождение энергетических уровней, т. е. электроны в разных квантовых состояниях могут обладать одинаковой энергией. Определив энергию электрона, мы можем указать лишь совокупность его микросостояний, одно из которых реализуется. Следовательно, в любом макросостоянии система характеризуется некоторой неопределенностью («нереализуемой» информацией I_u). Это означает, что в рассматриваемом случае негэнтропийный принцип Бриллюэна может быть записан в следующем виде:

$$C = C_\Sigma - \frac{1}{\tau}(I_u(T_1) - I_u(T_0)), \tag{13}$$

где C_Σ — пропускная способность без учета вырождения энергетических уровней.

Рассмотрим скоростные характеристики системы, представляющей собой двухмерное пространственное распределение свободного ферми-газа из N электронов на площади L^2, находящихся при равновесной температуре T_0.

Найдем величину I_u. Пусть $g(\varepsilon)$ —вырождение уровня с энергией ε. Способы размещения фермионов по одноэлектронным состояниям считаем равновероятными в окрестности энергии Ферми, следовательно, «нереализуемая» информация равна

$$I_u = \sum_{\{\varepsilon\}} \log_2 \frac{g(\varepsilon)!}{[g(\varepsilon)\cdot f(\varepsilon)]![g(\varepsilon)\cdot(1-f(\varepsilon))]!}, \tag{14}$$

где суммирование производится по всем энергетическим уровням. Поскольку в рассматриваемой модели электронного канала перенос информации осуществляется посредством «тепловых» фермионов с энергией в интервале порядка $\pm kT_1$ от ε_F, то величина «нереализуемой» информации может быть найдена для $\varepsilon \approx \varepsilon_F$ в виде

$$I_u(T) = \frac{2kTm_eL^2}{\hbar^2\pi g(\varepsilon_F)}\log_2\frac{g(\varepsilon_F)!}{\left[\left(\frac{g(\varepsilon_F)}{2}\right)!\right]^2}. \qquad (15)$$

Так как для двухмерного канала $D(\varepsilon_F) = \frac{m_eL^2}{\pi\hbar^2}$ и $g(\varepsilon_F) \gg 1$ [6], то $\log_2\frac{g(\varepsilon_F)!}{\left[\left(\frac{g(\varepsilon_F)}{2}\right)!\right]^2} \approx g(\varepsilon_F)$

и разность «нереализуемых» информаций $I_u(T_1)$ и $I_u(T_0)$ может быть представлена в виде

$$I_u(T_1) - I_u(T_0) \approx \frac{12P_n(T_0)\tau}{\pi^2kT_0}\left(\sqrt{1+\frac{P_s}{P_n(T_0)}} - 1\right). \qquad (16)$$

Тогда пропускная способность коммуникационного канала с двухмерным распределением электронов равна

$$C_{2D} = \frac{2P_n(T_0)}{\ln 2kT_0}\left(1-\frac{6\ln 2}{\pi^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{P_s}{P_n(T_0)}} - 1\right). \qquad (17)$$

Нетрудно показать, что для канала с трехмерным распределением электронов выражение, описывающее зависимость пропускной способности C_{3D} от мощности сигнала, полностью совпадает с (17). Следовательно, коммуникационные каналы с многомерными распределениями электронов вследствие вырожденности энергетических уровней теряют почти половину своей пропускной способности по сравнению с одномерными каналами.

Итак, в результате проведенных исследований показано, что в рамках модели свободного вырожденного ферми-газа квантово-статистические свойства электронов начнут играть существенную роль в одномерных каналах при скоростях передачи информации порядка 10^{16} бит/с и даже, возможно, ниже. Это означает, что при таких скоростях передача единицы информации принципиально возможна лишь при энергетических затратах, превышающих $kT_0 \ln 2$ Дж. Для электронных каналов с многомерными распределениями электронного ферми-газа учтено вырождение энергетических уровней таких систем. Показано, что коммуникационные каналы с размерностью пространственного распределения электронного газа, превышающей единицу, энергетически менее выгодны для передачи информации по сравнению с каналами с одномерным распределением электронов.

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (проект B-129).

Summary

On the base of the negentropy principle the influence of quantum statistics of information carriers on the information rate limit of an electronic communication channel is investigated.

It is shown that in the model of free degenerate Fermi-gas the quantum-statistical properties of electrons begin to influence the capacity of one-dimensional channel at information transmission rates of the order of 10^{16} bit/s and perhaps even at lower rates. Quantum communication channels with two- and three-dimensional distributions of electrons are energetically less favourable for information transmission in comparison with one-dimensional channels. This is caused by degeneration of power levels of two- and three-dimensional channels.

Литература

1. Caves C. M. and Drummond P. D. // Rev. Mod. Phys. 1994. Vol. 66, N 2. P. 481—537.
2. Lebedev D. S. and Levitin L. B. // Information and Control. 1966. N 9. P. 1—22.
3. Лебедев Д. С., Левитин Л. Б. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 6. С. 1299—1302.
4. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М., 1960.
5. Karpushko F. V. and Khodasevich M. A. // Optical Computing: Inst. Phys. Conf. Ser. London, 1994. Part 1, N 139. P. 3—6.
6. Киттель Ч. Статистическая термодинамика. М., 1977.
7. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М., 1963.

Отдел оптических проблем информатики НАН Беларуси

Поступило 10.11.98