УДК 535.36 : 539.125.523

Н. Н. Роговцов

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОМ ШАРЕ

В работах [1—6] был предложен один из возможных подходов для аналитического исследования закономерностей многократного рассеяния света в средах любой формы. В [4—8] на его основе был решен ряд конкретных задач теории переноса излучения для случаев объектов как сложной, так и простой конфигурации. Цель данной работы состоит в том, чтобы показать полезность и эффективность применения общих соотношений инвариантности, выведенных в [2—4], к отысканию характеристик полей излучения в оптически толстых однородных рассеивающих средах, имеющих форму шара. Заметим, что модель рассеивающих объектов в виде шара в известной мере применима при изучении процесса переноса излучения в целом ряде реальных сред [9, 10]. К тому же она представляет собой простейший нетривиальный вариант среди моделей рассеивающих тел, имеющих конечную оптическую толщину в любом направлении. В данной работе, в частности, найдены асимптотики интенсивностей излучения, средних интенсивностей излучения и средних длительностей свечения шара.

Пусть V представляет собой невогнутый рассеивающий объект, ограниченный полностью прозрачной для излучения границей σ. Предположим, что внутри V, т. е. в $\mathring{V}=V/\sigma$ ($\mathring{V}$ содержит все точки V, кроме точек, лежащих на границе σ), расположены внутренние источники излучения $g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ (под $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}'$ везде далее будем понимать соответственно радиус-векторы и единичные векторы, задающие направления испускания или распространения излучения). Для простоты будем также считать, что тело V не облучается внешним излучением. Как было показано в работах [2—4], при этих условиях имеет место, в частности, такое общее соотношение инвариантности

$$\theta_V(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, V) = \iiint\limits_{\mathring{V}} dV' \int\limits_{\Omega} G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}', \mathbf{\Omega}')\, g(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}')\, d\Omega' -$$

$$- \iint\limits_{\sigma} d\sigma' \int\limits_{\Omega_+} (\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')\, G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}', \mathbf{\Omega}')\, I(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', V)\, d\Omega'. \tag{1}$$

Здесь $I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, V)$ — интенсивность излучения, реализующегося в V; $\theta_V(\mathbf{r})=1$ и $\theta_V(\mathbf{r})=0$, когда $\mathbf{r}$ задает точки соответственно в V и вне V; $\mathbf{n}'$ — внешняя нормаль к σ в точке $\mathbf{r}'$; $G_\infty(...)$ — функция Грина уравнения переноса излучения для случая бесконечной среды V_∞, имеющей часть, оптические свойства элементарных объемов которой идентичны тем, которые имеют место в V; Ω_+ — полусфера, определяемая условием $(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')>0$.

Предположим теперь, что V — однородный шар, который имеет оптический радиус, равный τ_0. Везде далее для удобства рассмотрения будем считать, что начало декартовой системы координат находится в центре симметрии шара. Положим в (1) $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ — нулевой радиус-вектор, задающий центр шара) и проинтегрируем полученное выражение по полной единичной сфере Ω. Тогда с учетом принципа взаимности [11] получим такое выражение

$$\int\limits_{\Omega} I(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}, V)\, d\Omega = \iiint\limits_{\mathring{V}} dV' \int\limits_{\Omega} G_\infty(|\mathbf{r}'|, -\mu')\, g(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}')\, d\Omega' -$$

$$- \iint\limits_{\sigma} d\sigma' \int\limits_{\Omega_+} \mu' G_\infty(|\mathbf{r}'|, -\mu')\, I(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', V)\, d\Omega', \tag{2}$$

где $G_\infty(|\mathbf{r}'|, -\mu') = \int\limits_\Omega G_\infty(\mathbf{r}', -\mathbf{\Omega}', \mathbf{0}, \mathbf{\Omega})\, d\Omega$; $\mu' = \left(\mathbf{\Omega}' \cdot \dfrac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}\right)$. Из соотношений (1), (2) можно найти асимптотики средней интенсивности излучения в центре шара при $\tau_0 \to \infty$. Это возможно сделать двояким образом, а именно с помощью подстановки в (2) и (1) соответствующих асимптотик функции $G_\infty(|\mathbf{r}'|, -|\mu'|)$ (при $\lambda = 1$) и величины $I(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}', V)$ (при $\mathbf{r}' \in \sigma$ и $\lambda \leqslant 1$) (λ — альбедо однократного рассеяния).

Найдем асимптотическое выражение для функции $G_\infty(|\mathbf{r}'|, \mu') = \alpha^2 \tilde{G}_\infty(\tau', \mu')$ при $\mu' \leqslant 0$, $\lambda = 1$ и $\tau' \to \infty$, где α — коэффициент ослабления, $\tau' = \alpha|\mathbf{r}'|$, а величина $\tilde{G}_\infty(\tau', \mu')$, как нетрудно убедиться, удовлетворяет следующему уравнению переноса излучения (оно записано в сферической системе координат):

$$\mu' \frac{\partial \tilde{G}_\infty(\tau', \mu')}{\partial \tau'} + \frac{1-(\mu')^2}{\tau'} \frac{\partial \tilde{G}_\infty(\tau', \mu')}{\partial \mu'} = -\tilde{G}_\infty(\tau', \mu') + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{1} P(\mu', \mu'')\tilde{G}_\infty(\tau', \mu'')\, d\mu'' + \delta(\boldsymbol{\tau}') = -\tilde{G}_\infty(\tau', \mu') + \tilde{S}_\infty(\tau', \mu'). \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}' = \alpha \mathbf{r}'$; $P(\mu', \mu'') = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\mu') P_i(\mu'')$; $P_i(\mu)$ — полиномы Лежандра; x_i — коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния $x(\gamma)$ по полиномам Лежандра; $\delta(\boldsymbol{\tau}')$ — дельта-функция; $\tilde{S}_\infty(\tau', \mu')$ — функция источников. Нетрудно показать, что $\tilde{G}_\infty(\tau', \mu') = (\tau')^{-2}\exp(-\tau')\,\delta\left(\mathbf{\Omega}' - \dfrac{\boldsymbol{\tau}'}{|\boldsymbol{\tau}'|}\right) + \tilde{I}_1(\tau', \mu')$, где $\tilde{I}_1(\tau', \mu')$ — решение уравнения (3), в котором $\delta(\boldsymbol{\tau}')$ заменено на $\lambda x(\mu')(2\tau'\sqrt{\pi})^{-2}\exp(-\tau')$. С точностью до известного постоянного множителя явное выражение для $\tilde{I}_1(\tau', \mu')$ было найдено в [9]. В свою очередь $\tilde{S}_\infty(\tau', \mu')$ можно представить в виде $\tilde{S}_\infty(\tau', \mu') = \tilde{S}_1(\tau', \mu') + \delta(\boldsymbol{\tau}')$, где

$$\tilde{S}_1(\tau', \mu') = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{1} P(\mu', \mu'')\tilde{I}_1(\tau', \mu'')\, d\mu'' + \lambda(\tau')^{-2}\exp(-\tau')\, x(\mu')\,(4\pi)^{-1}.$$

С учетом этих соотношений из формулы (6) работы [2] нетрудно получить следующее выражение:

$$\tilde{G}_\infty(\tau', -|\mu'|) = \int\limits_0^\infty e^{-\xi'}\tilde{S}_1(|\boldsymbol{\tau}' + \xi'\mathbf{\Omega}'|, -|\mu^*|)\, d\xi', \quad \tau' > 0,$$
$$\mu^* = (\mathbf{\Omega}' \cdot (\boldsymbol{\tau}' + \xi'\mathbf{\Omega}'))(|\boldsymbol{\tau}' + \xi'\mathbf{\Omega}'|)^{-1}. \tag{4}$$

Для отыскания асимптотики функции $\tilde{G}_\infty(\tau', -|\mu'|)$ предположим дополнительно, что $x_i = 0$ при $i > M \geqslant 0$ $(M < \infty)$. При этом величина $\tilde{S}_1(\tau', \mu')$, как видно из ее определения, примет вид

$$\tilde{S}_1(\tau', \mu') = \sum_{i=0}^{M} x_i P_i(\mu')\, \tilde{S}_{1i}(\tau'). \tag{5}$$

Из работы [12] следует, что для величин $x_i\tilde{S}_{1i}(\tau')$ в случае консервативного рассеяния справедливы такие асимптотики

$$x_i\tilde{S}_{1i}(\tau') \sim c\, \frac{i!}{(2i+1)\,\beta_i}(\tau')^{-(i+1)}, \quad \tau' \to \infty, \quad c = \mathrm{const}, \tag{6}$$

$$\beta_0 = 1,\ \beta_i = \prod_{m=1}^{i} \left(1 - \frac{x_m}{2m+1}\right),\ i \geqslant 1.$$

Из (4) — (6) и условия $M < \infty$ получаем

$$\tilde{G}_\infty(\tau',\ -|\mu'|) = \int_0^\infty e^{-\xi'} [\tilde{S}_{10}(|\boldsymbol{\tau}' + \xi'\boldsymbol{\Omega}'|) - |\mu^*|\, x_1 \tilde{S}_{11}(|\boldsymbol{\tau}' + \xi'\boldsymbol{\Omega}'|)]\, d\xi' +$$

$$+ O(1/(\tau')^3),\ \tau' \to \infty,\ \lambda = 1. \tag{7}$$

Величины $\tilde{S}_{10}(\tau')$ и $\tilde{S}_{11}(\tau')$ в свою очередь легко найти в явном виде. Для этого используем следующие выражения:

$$\tilde{S}_{10}(\tau') = (\lambda/4\pi) \int_\Omega \tilde{G}_\infty(\tau',\ \mu')\, d\Omega',\ \tilde{S}_{11}(\tau') = (\lambda/4\pi) \int_\Omega \mu' \tilde{G}_\infty(\tau',\ \mu')\, d\Omega', \tag{8}$$

$$\int_\Omega \tilde{G}_\infty(\tau',\ \mu')\, d\Omega' = -\frac{1}{\tau'} \frac{d}{dy} \int_{-1}^{1} G_\infty^{pl}(y,\ \mu')\, d\mu' \Big|_{y=\tau'}, \tag{9}$$

где $G_\infty^{pl}(\cdots)$ — функция Грина уравнения переноса излучения для случая однородной бесконечной плоскопараллельной среды, имеющей источник $\delta(\tau')$. Формула (9) является классическим результатом теории переноса (см., напр., [11]). Используя результаты работ [13, 14], относящиеся к определению функции Грина, и (9), нетрудно показать, что имеет место асимптотика

$$\int_\Omega \tilde{G}_\infty(\tau',\ \mu')\, d\Omega' = \frac{3 - x_1}{\tau'} + O\left(\frac{\exp(-a\tau')}{\tau'}\right), \tag{10}$$

$$\tau' \to \infty,\ \lambda = 1,\ 0 < a \leqslant 1.$$

С другой стороны, из закона сохранения энергии следует, что при $\lambda = 1$

$$\int_\Omega \mu' \tilde{G}_\infty(\tau',\ \mu')\, d\Omega' = (\tau')^{-2}. \tag{11}$$

Учитывая теперь формулы (8), (10), (11), с помощью метода Лапласа [15] получим из (7) искомую асимптотику для $\tilde{G}_\infty(\ldots)$ при $\lambda = 1$:

$$\tilde{G}_\infty(\tau',\ -|\mu'|) = \frac{3 - x_1}{4\pi\tau'} - \frac{3|\mu'|}{4\pi(\tau')^2} + O(1/(\tau')^3),\ \tau' \to \infty. \tag{12}$$

Первый член асимптотики (12) был найден в [12].

Если умножить (12) на α^2 и подставить полученную таким образом асимптотику для $G_\infty(|\mathbf{r}'|, -|\mu'|)$ в (2), то получим асимптотическую формулу для средней интенсивности излучения в центре шара для случая консервативного рассеяния. Она имеет вид

$$I_{\text{ср}}(\mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega I(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Omega},\ V)\, d\Omega = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathring{V}} dV' \int_\Omega G_\infty(|\mathbf{r}'|,\ -\mu')\, g(\mathbf{r}',\ \boldsymbol{\Omega}')\, d\Omega' -$$

$$- \frac{\alpha^2(3 - x_1)}{(4\pi)^2 \tau_0} \iiint_{\mathring{V}} dV' \int_\Omega g(\mathbf{r}',\ \boldsymbol{\Omega}')\, d\Omega' +$$

$$+ 3\alpha^2 (4\pi\tau_0)^{-2} \iint_\sigma d\sigma' \int_{\Omega_+} (\mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\Omega}')^2 I(\mathbf{r}',\ \boldsymbol{\Omega}',\ V)\, d\Omega' +$$

$$+ O\left(\alpha^2 \tau_0^{-3} \iiint_{\mathring{V}} dV' \int_\Omega g(\mathbf{r}',\ \boldsymbol{\Omega}')\, d\Omega'\right),\ \tau_0 \to \infty. \tag{13}$$

При выводе (13) было также принято во внимание такое соотношение

$$\iint\limits_{\sigma} d\sigma' \int\limits_{\Omega_+} (\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')\, I(\mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}',\ V)\, d\Omega' = \iiint\limits_{\mathring{V}} dV' \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}')\, d\Omega', \tag{14}$$

вытекающее из закона сохранения энергии при $\lambda = 1$. Частный случай выражения (13) при $x(\gamma) \equiv 1$ был получен ранее в [8].

Рассмотрим ряд частных случаев формулы (13). Пусть источники в шаре распределены равномерно ($g(\mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}') \equiv C = \mathrm{const}$). Тогда из (13) с учетом неравенства $(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')^2 \leqslant |(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{\Omega}')|$ и соотношения (14) получим

$$I_{\text{ср}}(0) = \frac{C}{4\pi} \iiint\limits_{V} dV' \int\limits_{\Omega} G_\infty(|\mathbf{r}'|,\ -\mu')\, d\Omega' -$$

$$-C\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\frac{\tau_0^2}{\alpha} + C\,\frac{\varkappa(\tau_0)\,\tau_0}{\alpha} + O(C/\alpha), \tag{15}$$

$$\tau_0 \to \infty,\ 0 \leqslant \varkappa(\tau_0) \leqslant 1,\ \lambda = 1.$$

Заметим, что величина $C\alpha^{-1}\tau_0\varkappa(\tau_0)$ равна третьему члену в правой части (13) при $g(\ldots) \equiv C$. Принимая во внимание формулы (9), (10), из (15) получим более простую асимптотику

$$I_{\text{ср}}(0) = \alpha^{-1}C\left(\frac{3 - x_1}{6}\,\tau_0 + \varkappa(\tau_0)\right)\tau_0 + O(C/\alpha),\ \tau_0 \to \infty,\ \lambda = 1. \tag{16}$$

Если умножить выражение (16) на $(1/Cv)$ (v—скорость света в среде), то получим асимптотическую формулу для среднего времени t^* выхода энергии излучения из шара (среднее время свечения), в центре которого находится импульсный точечный изотропный источник. Это следует из (16) и общей формулы для t^*, полученной в работе [8].

Предположим теперь, что в шаре находится точечный изотропный стационарный источник вида $g(\mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}') = C_1\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)$ ($C_1 = \mathrm{const}$). В этом случае из (13) с учетом (10), (14) находим

$$I_{\text{ср}}(0) = \frac{\alpha^2 C_1}{4\pi}\left(\frac{3 - x_1}{\tau_0}\,\frac{1-\eta}{\eta} + \frac{3\varkappa_1(\tau_0)}{\tau_0^2} + O(1/\tau_0^3)\right),$$

$$\eta\tau_0 \to \infty,\ 0 \leqslant \varkappa_1(\tau_0) \leqslant 1, \tag{17}$$

где $\eta\tau_0 = \tau_1 = \alpha|\mathbf{r}_1|$; $0 < \eta \leqslant 1$. Из принципа взаимности [11] в свою очередь следует, что (17) является также асимптотикой для средней интенсивности излучения в точке, определяемой $\boldsymbol{\tau}_1 = \alpha\mathbf{r}_1$, при наличии в центре шара точечного изотропного источника мощности $4\pi C_1$.

Допустим, что в шаре находится точечный мононаправленный источник вида $g(\mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}') = C_2\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1)\,\delta(\mathbf{\Omega}' - \mathbf{\Omega}_1)$, причем пусть выполняется условие $\mu_1 = (\mathbf{\Omega}_1\cdot(\mathbf{r}_1/|\mathbf{r}_1|)) \geqslant 0$ ($C_2 = \mathrm{const}$). Тогда, учитывая формулы (12), (14), из (13) получаем

$$I_{\text{ср}}(0) = C_2\alpha^2(4\pi)^{-2}\left[\frac{1-\eta}{\eta\tau_0}(3 - x_1) + 3\tau_0^{-2}(\varkappa_2(\tau_0) - \mu_1\eta^{-2}) + \right.$$

$$\left. + O(1/(\eta\tau_0)^3)\right],\ \eta\tau_0 \to \infty,\ 0 \leqslant \varkappa_2(\tau_0) \leqslant 1,\ 0 < \eta \leqslant 1. \tag{18}$$

Согласно принципу взаимности [11], выражение (18) представляет собой к тому же асимптотику интенсивности излучения в направлении $(-\mathbf{\Omega}_1)$ в точке, заданной $\boldsymbol{\tau}_1 = \alpha\mathbf{r}_1$, при наличии в центре шара точечного изотропного источника. Из (13) легко найти в явном виде также асимптотику интенсивности излучения и в направлении $\mathbf{\Omega}_1$, если учесть результаты работы [12]. Заметим, что если шар ограничен ламбертовской подстилающей

поверхностью σ с постоянным альбедо A и содержит сферически симметричные источники $g(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}')$, то для получения асимптотики $I_{\text{ср}}(0)$ достаточно в правую часть (13) добавить слагаемое $\alpha^2 A(4\pi^2(1-A)\tau_0^2)^{-1} \times$
$\times \iiint\limits_{\mathring{V}} dV' \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}')\, d\Omega'$.

Выше был найден ряд асимптотических решений уравнения переноса излучения для случая консервативного рассеяния. Получим теперь асимптотику $I_{\text{ср}}(0)$ при $\lambda<1$ и $\tau_0 \to \infty$. Для этого воспользуемся результатами работы [10], в которой было найдено асимптотическое выражение для интенсивности излучения, выходящего из однородного оптически толстого шара, содержащего в центре точечный изотропный источник светимости L. Используя данную асимптотику и принцип взаимности, с помощью ряда элементарных преобразований из (1) получим асимптотическую формулу

$$I_{\text{ср}}(0) \sim \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} I_{\infty}(0, \mathbf{\Omega}')\, d\Omega' - \alpha^2 \chi(\tau_0) \times$$
$$\times \iint\limits_{\sigma} d\sigma' \int\limits_{\Omega_+} \mu' u(\mu')\, I_{\infty}(\mathbf{r}', -\mathbf{\Omega}')\, d\Omega', \quad \tau_0 \to \infty, \ \lambda < 1. \qquad (19)$$

Здесь $I_{\text{ср}}(0)$ — средняя интенсивность излучения в центре шара при наличии в нем произвольных источников $g(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}')$; $I_{\infty}(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}')$ — интенсивность излучения в однородной бесконечной среде V_{∞}, в которой на месте ее части $\mathring{V}$ распределены источники $g(\mathbf{r}', \mathbf{\Omega}')$; $\chi(\tau_0) = (k/8\pi^3\lambda\tau_0)\exp(-k\tau_0) \times$ $\times (1 - N\exp(-2k\tau_0))$, где k, N, $u(\mu)$ — известные величины теории переноса излучения, явные выражения которых приведены в [16].

В заключение подчеркнем, что с помощью общих соотношений инвариантности, полученных в [2—4, 7], возможно исследовать асимптотические свойства полей излучения и в средах, имеющих существенно более сложную конфигурацию по сравнению с шаром.

Summary

A number of asymptotic formulas for radiation fields characteristics in an optically thick sphere is obtained. In particular, the binomial asymptotic expressions are found for average radiation intensities, radiation intensities, average luminosity durations involving in the centre the conservative scattering sphere of the point isotropic source. It is shown what changes should be introduced into the formulas when the sphere is restricted by the lambert underlying surface with the constant albedo.

Литература

1. **Роговцов Н. Н.**— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, т. 16, № 3, с. 244—253.
2. **Роговцов Н. Н.**— ЖПС, 1981, т. 34, № 2, с. 335—342.
3. **Роговцов Н. Н.**— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 5, с. 420—423.
4. **Роговцов Н. Н.**— ЖПС, 1981, т. 35, № 6, с. 1044—1050.
5. **Роговцов Н. Н.**— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 10, с. 901—903.
6. **Роговцов Н. Н.**— ЖПС, 1985, т. 43, № 1, с. 142—148.
7. **Роговцов Н. Н.**—Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 1, с. 34—37.
8. **Роговцов Н. Н.**— ЖПС, 1985, т. 42, № 5, с. 839—843.
9. **Колесов А. К.**— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 1, с. 53—56.
10. **Соболев В. В.**— Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 3, с. 573—576.
11. **Кейз К., Цвайфель П.** Линейная теория переноса.— М.: Мир, 1972.—384 с.
12. **Колесов А. К.**— Астрофизика, 1984, т. 20, № 1, с. 133—147.
13. **Mika J. R.**— Nucl. Sci. Eng., 1961, v. 11, N 4, p. 415—427.
14. **Иванов В. В., Волков Е. В.**— Ученые записки ЛГУ, 1978, № 400, вып. 57, с. 3—30.
15. **Олвер Ф.** Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Физматгиз, 1978.—375 с.
16. **Соболев В. В.** Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Физматгиз, 1972.— 335 с.

Поступило в редакцию 25.12.84.