Известия АН СССР
ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ
И ОКЕАНА
Том 16 • № 3
1980

УДК 551.521.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКАМ НА ГРАНИЦАХ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Н. Н. РОГОВЦОВ

Рассмотрена задача об отыскании поля излучения внутри однородных и неоднородных плоскопараллельных мутных сред, ограниченных подстилающими поверхностями с произвольными отражательными свойствами. Найдены аналитические формулы, выражающие характеристики поля излучения внутри слоя через интенсивности на его границах и функцию G. Величина G — функция Грина интегрального уравнения для функции источников в случае среды, которая не имеет подстилающих поверхностей и содержит в себе внутреннюю часть исследуемого слоя. Показано, что основные формулы, полученные в работе, можно трактовать, как соотношения инвариантности. Сформулирована система уравнений для интенсивностей излучения на внутренних сторонах подстилающих поверхностей рассеивающей среды. Найдена в явном виде нулевая гармоника функции источников внутри слоя, имеющего одну подстилающую поверхность и возбуждаемого внешним излучением. При выводе этого выражения существенных ограничений на свойства коэффициента отражения подстилающей поверхности не налагалось, а индикатриса считалась линейной.

1. Введение. Известно, что решение краевой задачи для уравнения переноса дает распределение поля излучения внутри рассеивающего объекта и на его границах. Однако такой путь не всегда прост и экономичен. К тому же он требует знания свойств подстилающих поверхностей и не позволяет естественным образом использовать данные о поле излучения, которые можно получить из эксперимента. Зачастую бывает также сложно или невозможно экспериментально найти характеристики излучения в любой точке рассеивающей среды. Это, например, имеет место, когда исследуемый объект недоступен для прямого зондирования или нельзя ввести зонд внутрь рассеивающей среды без значительного нарушения ее структуры или самого поля излучения. В таких ситуациях прямые измерения можно проводить только в некоторой части области изменения переменных, от которых зависят искомые величины. Поэтому представляют интерес такие косвенные методы диагностики, которые позволяли бы восстанавливать характеристики поля излучения во всей рассеивающей среде по экспериментальным данным, полученным в областях (в частности, лежащих на границе), малых по сравнению со всем объектом.

В данной статье решен только один вопрос указанного типа. Найдены аналитические формулы, выражающие характеристики поля излучения внутри плоскопараллельной рассеивающей среды (в общем случае неоднородной), ограниченной подстилающими поверхностями, через интенсивности на ее границах, а также получен ряд результатов, вытекающих из этих соотношений. Оптические параметры элементарного объема и первичные источники излучения при этом считались известными. Исследование проведено только для случая плоскопараллельной среды в рамках скалярной теории переноса и при допущении о неизменности частоты кванта при рассеянии. Однако результаты можно обобщить, отказавшись от этих ограничений.

Кратко отметим статьи, имеющие прямое отношение к данной работе. Вопрос о нахождении функции источников внутри плоскопараллельной среды для частного случая изотропного рассеяния подробно изучен ранее в [1—3] и с учетом подстилающих поверхностей в [4]. В [5] интенсивность излучения внутри слоя, возбуждаемого внешними источниками, выражена с помощью метода Кейза через коэффициенты яркости [6] (при наличии внутренних источников аналогичная задача была решена в [4]). В работе [7] на основе метода «сложения слоев» была кратко рассмотрена задача, изученная в [1—3], но уже с учетом анизотропности рассеяния (считалось, что подстилающих поверхностей нет). Результаты, изложенные в [1—5, 7], были получены лишь для случая однородных сред; азимутальная зависимость искомых характеристик учитывалась только в [5].

2. Исходные уравнения и соотношения. Рассмотрим плоскопараллельную рассеивающую среду, характеризуемую вероятностью выживания кванта $\lambda(\tau)$ (τ — оптическая глубина, отсчитываемая от некоторой плоскости), индикатрисой рассеяния $x(\tau, \gamma)$ (γ — угол между направлениями падающего на элементарный объем и рассеянного им излучения). Пусть источники излучения описываются функцией $g(\tau, \mu, \varphi)$, где $\theta = \arccos \mu$ — угол между внешней нормалью к плоскости, задаваемой условием $\tau = c$, и направлением наблюдения, φ — азимутальный угол. Предположим, что среда ограничена подстилающими поверхностями (первая определяется условием $\tau = c$, а вторая $\tau = d$; $c \leqslant d$). Поле излучения, сформировавшееся в таком рассеивающем слое, удовлетворяет уравнению переноса излучения

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu, \varphi)}{\partial \tau} = I(\tau, \mu, \varphi) -$$

$$- \frac{\lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{1} x(\tau, \gamma) I(\tau, \mu', \varphi') d\mu' - g(\tau, \mu, \varphi) = I(\tau, \mu, \varphi) - S(\tau, \mu, \varphi), \tag{1}$$

$$c + 0 \leqslant \tau \leqslant d - 0,$$

$$S(\tau, \mu, \varphi) = \frac{\lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{1} x(\tau, \gamma) I(\tau, \mu', \varphi') d\mu' + g(\tau, \mu, \varphi) \tag{2}$$

и соответствующим граничным условиям, конкретный вид которых зависит от свойств подстилающих поверхностей (в общем случае они не обладают азимутальной симметрией) и типа внешних источников возбуждения. В (1), (2) $I(\tau, \mu, \varphi)$ — интенсивность излучения, идущего на оптической глубине τ в направлении, характеризуемом углами θ, φ, а $S(\tau, \mu, \varphi)$ — функция источников. Решая уравнение (1) совместно с указанными условиями, можно в принципе найти $I(\tau, \mu, \varphi)$, $S(\tau, \mu, \varphi)$ внутри слоя и на его границах $\tau = c + 0$, $\tau = d - 0$ (имеются в виду внутренние стороны подстилающих поверхностей). Однако ниже будет показано, что, не имея решения этой прямой задачи, можно выразить характеристики поля излучения внутри слоя через $I(c+0, \mu, \varphi)$, $I(d-0, \mu, \varphi)$ и функцию Грина интегрального уравнения для функции источников в случае плоскопараллельной среды, не имеющей подстилающих поверхностей, оптическая толщина которой не меньше, чем $(d - c)$.

Получим интегральное соотношение, которое будет исходным для вывода основных результатов этой работы. Функции $g(\tau, \mu, \varphi)$, $I(\tau, \mu, \varphi)$, $S(\tau, \mu, \varphi)$, входящие в (1), (2), продолжим за отрезок $[c, d]$ (пока считаем его конечным) тождественными нулями, т. е. предполагаем, что они финитны (под финитными функциями будем в дальнейшем понимать такие, которые определены при $-\infty < \tau < \infty$, $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и обращаются тождественно в нуль вне некоторого конечного отрезка оси τ). Введем обозначение

$$\bar{F}(\omega, \ldots, a, b) = \int_a^b \exp(-i\omega\tau) F(\tau, \ldots)\, d\tau, \quad a \leqslant c, \quad b \geqslant d, \tag{3}$$

где под $F(\tau, \ldots)$ будем понимать любую из функций от τ. Используя (3), из (1) имеем

$$\bar{I}(\omega, \mu, \varphi, c, d) = \frac{1}{i\omega\mu - 1}\left[U(\omega, \mu, \varphi) - \bar{S}(\omega, \mu, \varphi, c, d)\right], \tag{4}$$

$$U(\omega, \mu, \varphi) = \mu[\exp(-i\omega c) I(c+0, \mu, \varphi) - \exp(-i\omega d) I(d-0, \mu, \varphi)].$$

Так как, по предположению $I(\tau, \mu, \varphi) \equiv 0$ при $\tau < c$, $\tau > d$, то, вычисляя $S(\tau, \mu, \varphi)$ по формуле (2), получим, что функция источников будет тождественно равна нулю при $\tau < c$, $\tau > d$ даже тогда, когда $x(\tau, \gamma)\lambda(\tau) \neq 0$ вне отрезка $[c, d]$. Используя этот факт, продолжим функцию $\lambda(\tau) x(\tau, \gamma)$ за пределы $[c, d]$, причем будем считать, что $\lambda(\tau) x(\tau, \gamma) \equiv 0$ при $\tau < a \leqslant c$, $\tau > b \geqslant d$ $(-\infty < a, b < \infty)$. При этом потребуем, чтобы функциям $\lambda(\tau)$, $x(\tau, \gamma)$ вне $[c, d]$ можно было бы приписать соответственно смысл вероятности выживания кванта и индикатрисы рассеяния. Используя финитность функций, входящих в (2), обобщенное равенство Парсеваля [8, 9] и определение (3), можно получить следующее выражение:

$$\bar{S}(\omega, \mu, \varphi, c, d) = \bar{g}(\omega, \mu, \varphi, c, d) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{1} d\mu' \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega - \omega', \mu, \varphi, \mu', \varphi', a, b)\, \bar{I}(\omega', \mu', \varphi', c, d)\, d\omega', \tag{5}$$

где

$$\bar{X}(\omega, \mu, \varphi, \mu', \varphi', a, b) = \frac{1}{4\pi}\int_a^b e^{-i\omega\tau} \lambda(\tau) x(\tau, \gamma(\mu, \varphi, \mu', \varphi'))\, d\tau. \tag{6}$$

Подставляя (4) в (5), приходим к искомому соотношению

$$\bar{S}(\omega, \mu, \varphi, c, d) = \bar{q}(\omega, \mu, \varphi, a, b, c, d) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{1} d\mu' \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega - \omega', \mu, \varphi, \mu', \varphi', a, b)\, \frac{\bar{S}(\omega', \mu', \varphi', c, d)}{1 - i\omega'\mu'}\, d\omega'. \tag{7}$$

Здесь

$$\bar{q}(\omega, \mu, \varphi, a, b, c, d) = \bar{g}(\omega, \mu, \varphi, c, d) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{1} d\mu' \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\omega - \omega', \mu, \varphi, \mu', \varphi', a, b)\, \frac{U(\omega', \mu', \varphi')}{i\omega'\mu' - 1}\, d\omega'. \tag{8}$$

Учитывая (6) и обобщенное равенство Парсеваля, достаточно легко показать справедливость формулы

$$\bar{q}(\omega, \mu, \varphi, a, b, c, d) = \int_a^b \exp(-i\omega\tau)\, q(\tau, \mu, \varphi, a, b, c, d)\, d\tau, \tag{9}$$

в которой $q(\tau, \mu, \varphi, a, b, c, d)$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, равна

$$q(\tau, \mu, \varphi, a, b, c, d) = g(\tau, \mu, \varphi) + \frac{\lambda(\tau)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 x(\tau, \gamma) \times\right.$$
$$\times (\zeta_1(\tau, \mu', d) I(d-0, \mu', \varphi') - \zeta_1(\tau, \mu', c) I(c+0, \mu', \varphi'))\, d\mu' +$$

$$+\int_{-1}^{0} x(\tau,\gamma)\,(\zeta_2(\tau,\mu',c)I(c+0,\mu',\varphi')-\zeta_2(\tau,\mu',d)I(d-0,\mu',\varphi'))\,d\mu'\Big]\,d\varphi' \tag{10}$$

причем функция $g(\tau,\mu,\varphi)$, как и ранее, считается тождественно равной нулю вне $[c,d]$, $\gamma=\gamma(\mu,\varphi,\mu',\varphi')$, а величины ζ_i даются следующими соотношениями:

$$\zeta_1(\tau,\mu,y)=\theta(y-\tau)\exp\left(\frac{\tau-y}{|\mu|}\right), \tag{11}$$

$$\zeta_2(\tau,\mu,y)=\theta(\tau-y)\exp\left(\frac{y-\tau}{|\mu|}\right), \tag{12}$$

где $\theta(x)=1$ при $x\geqslant0$ и $\theta(x)=0$ при $x<0$.

Если $a=c$, $b=d$ и слой $[c,d]$ не имеет подстилающих поверхностей, то из (9)–(12) следует, что $\bar q(\ldots)\equiv\bar g(\ldots)$. Следовательно, (7) представляет собой в такой ситуации фактически уравнение для функции $\bar S(\omega,\mu,\varphi,c,d)$. Это уравнение для случая изотропного рассеяния использовалось в работах [10, 11] при исследовании переноса излучения в неоднородной среде (в частности, «квазиконечной»), а в статье [12] был предложен метод его решения, когда $\lambda(\tau)\equiv\mathrm{const}$ и слой имеет конечную оптическую толщину.

3. Связь функции источников и интенсивности излучения внутри среды с характеристиками светового поля на границах слоя. Рассмотрим плоскопараллельный слой, ограниченный плоскостями $\tau=a$, $\tau=b$ ($a\leqslant c$, $b\geqslant d$). Пусть в нем распределены источники излучения, описываемые функцией $q(\tau,\mu,\varphi,a,b,c,d)$, извне на его границы не падает излучение и отсутствуют подстилающие поверхности. При этом будем считать, что $\lambda(\tau)x(\tau,\gamma)$ совпадает при $c+0\leqslant\tau\leqslant d-0$ с истинным выражением этой функции в слое $[c,d]$, а вне его продолжена в согласии со сделанным после формулы (4) замечанием. Обозначим функцию источников, характеризующую поле излучения в такой среде, через $S_1(\tau,\mu,\varphi)$ ($a\leqslant\tau\leqslant b$); $S_1(\tau,\mu,\varphi)\equiv0$ при $\tau<a$, $\tau>b$. Она удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$S_1(\tau,\mu,\varphi)=q(\tau,\mu,\varphi,a,b,c,d)+$$

$$+\frac{\lambda(\tau)}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau,\gamma)}{|\mu'|}\,d\mu'\int_a^b\theta[(\tau'-\tau)\mu']\times$$

$$\times\exp\left(-\left|\frac{\tau'-\tau}{\mu'}\right|\right)S_1(\tau',\mu',\varphi')\,d\tau',\qquad a\leqslant\tau\leqslant b, \tag{13}$$

которое несложно получить из уравнения переноса, если учесть сформулированные в начале этого пункта условия.

Проведем теперь сравнение функции источников $S_1(\tau,\mu,\varphi)$ для введенной выше вспомогательной задачи с величиной $S(\tau,\mu,\varphi)$. Учитывая (11), (12) и то, что $\lambda(\tau)x(\tau,\gamma)\equiv0$ вне отрезка $[a,b]$, по аналогии с выводом выражения для $\bar S(\omega,\mu,\varphi,c,d)$ можно получить соотношение для $\bar S_1(\omega,\mu,\varphi,a,b)$. Оно имеет вид формулы (7), в которой надо только вместо $\bar S(\omega,\mu,\varphi,c,d)$ подставить $\bar S_1(\omega,\mu,\varphi,a,b)$, т. е. при заданных значениях $I(c+0,\mu,\varphi)$ и $I(d-0,\mu,\varphi)$ эти функции удовлетворяют одному и тому же уравнению. Нетрудно заметить, что разность $(\bar S(\omega,\mu,\varphi,c,d)-\bar S_1(\omega,\mu,\varphi,a,b))=\bar S_*(\omega,\mu,\varphi)$ будет удовлетворять однородному уравнению, а именно выражению (7) при $\bar q(\ldots)\equiv0$. Принимая теперь во внимание финитность $S(\tau,\mu,\varphi)$, $S_1(\tau,\mu,\varphi)$, $\lambda(\tau)x(\tau,\gamma)$, полноту тригонометрических функций и используя теорию преобразования Фурье [8, 9], получим из (7) при $\bar q(\ldots)\equiv0$, что при почти всех τ, μ, φ функция $S_*(\tau,\mu,\varphi)$ будет удовлетворять однородному интегральному уравнению, соответствующему (13). Но это уравнение в свою очередь имеет только тривиальное решение при выполнении одного из условий: $\lambda(\tau)\leqslant 1\,(b-a<\infty)$, $\lambda(\tau)\leqslant \mathrm{const}<1\,(b-a=\infty)$, которые будем считать выполненными. В итоге имеем

$$S_1(\tau,\mu,\varphi)\equiv S(\tau,\mu,\varphi),\quad a\leqslant\tau\leqslant b. \tag{14}$$

Обозначим через $G(\tau,\mu,\varphi,\tau',\mu',\varphi',a,b)$ функцию Грина интегрального уравнения (13) (она будет решением этого уравнения, если заменить $q(\tau,\mu,\varphi,a,b,c,d)$ на $\delta(\mu-\mu')\delta(\varphi-\varphi')\delta(\tau-\tau')$). Тогда с учетом (13), (14) находим

$$S(\tau,\mu,\varphi)=\int_0^{2\pi} d\varphi'\int_{-1}^{1} d\mu'\int_a^b G(\tau,\mu,\varphi,\tau',\mu',\varphi',a,b)\,q(\tau',\mu',\varphi',a,b,c,d)\,d\tau' \tag{15}$$

$$a\leqslant\tau\leqslant b.$$

Заметим, что резольвента $\Gamma(\tau,\mu,\varphi,\tau',\mu',\varphi',a,b)$ интегрального уравнения (13) удовлетворяет ему же самому, если в нем заменить $q(\tau,\mu,\varphi,a,b,c,d)$ на $\dfrac{\lambda(\tau)}{4\pi|\mu'|}\theta[(\tau'-\tau)\mu']x(\tau,\gamma)\exp\left[-\left|\dfrac{\tau'-\tau}{\mu'}\right|\right]$. Принимая во внимание этот факт, линейность уравнения (13) и выражение (10), из (15) получим следующее существенно более простое соотношение:

$$\begin{aligned}S(\tau,\mu,\varphi)={}&\int_0^{2\pi} d\varphi'\int_{-1}^{1} d\mu'\int_c^d G(\tau,\mu,\varphi,\tau',\mu',\varphi',a,b)\,g(\tau',\mu',\varphi')\,d\tau'+\\&+\int_0^{2\pi} d\varphi'\int_{-1}^{1}\mu'\Gamma(\tau,\mu,\varphi,d,\mu',\varphi',a,b)\,I(d-0',\mu',\varphi')\,d\mu'-\\&-\int_0^{2\pi} d\varphi'\int_{-1}^{1}\mu'\Gamma(\tau,\mu,\varphi,c,\mu',\varphi',a,b)\,I(c+0,\mu',\varphi')\,d\mu',\quad a\leqslant\tau\leqslant b.\end{aligned} \tag{16}$$

Из выражения (16) с учетом соотношений, связывающих интенсивность излучения с функцией источников и следующих прямо из уравнения переноса(1), а также из того, что $S(\tau,\mu,\varphi)\equiv 0$ вне $[c,d]$, нетрудно вывести выражения для $I(\tau,\mu,\varphi)$ внутри исследуемого слоя $[c,d]$. Они имеют вид

$$\begin{aligned}I(\tau,\mu,\varphi)={}&\int_0^{2\pi} d\varphi'\int_{-1}^{1} d\mu'\int_c^d G_*(\tau,\mu,\varphi,\tau',\mu',\varphi',a,b,\alpha)\,g(\tau',\mu',\varphi')\,d\tau'+\\&+\int_0^{2\pi} d\varphi'\int_{-1}^{1}\mu' G_*(\tau,\mu,\varphi,d,\mu',\varphi',a,b,\alpha)\,I(d-0,\mu',\varphi')\,d\mu'-\\&-\int_0^{2\pi} d\varphi'\int_{-1}^{1}\mu' G_*(\tau,\mu,\varphi,c,\mu',\varphi',a,b,\alpha)\,I(c+0,\mu',\varphi')\,d\mu',\end{aligned} \tag{17}$$

$$c+0\leqslant\tau\leqslant d-0.$$

Здесь

$$G_*(\tau,\mu,\varphi,\tau',\mu',\varphi',a,b,\alpha)=$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_\tau^\alpha \exp\left[-\left|\frac{\tau''-\tau}{\mu}\right|\right]G(\tau'',\mu,\varphi,\tau',\mu',\varphi',a,b)\,d\tau'',$$

причем $\alpha=m$ $(d\leqslant m\leqslant b)$ при $\mu>0$ и $\alpha=n$ $(a\leqslant n\leqslant c)$ при $\mu<0$. Если $m=b$ и $n=a$, то последнее выражение представляет собой функцию Грина $G_*(\tau,\mu,\varphi,\tau',\mu',\varphi',a,b)$ уравнения переноса для тех же условий, которые принимались при выводе (13).

Основные выражения (16), (17) и дают в явной форме результат, сформулированный в начале работы. Они, в частности, показывают, что поле излучения внутри исследуемой плоскопараллельной среды $[c,d]$ можно в аналитическом виде выразить через значения $I(\tau,\mu,\varphi)$ на границах и функцию Грина (или резольвенту) для задачи о многократном рассеянии света в слое, не имеющем подстилающих поверхностей и внутри которого находится область с оптическими параметрами, идентичными реализующимся в $[c,d]$. Соотношения (15)—(17) прямо или косвенно содержат в себе в качестве частных случаев все полученные ранее в [1—5, 7] результаты по данному вопросу.

4. Интерпретация основных выражений и их следствия. Формулы (17) соответственно при $\tau=c+0$ и $\tau=d-0$ вместе с граничными условиями, связывающими между собой $I(c+0,-|\mu|,\varphi)$ и $I(c+0,|\mu|,\varphi)$, а также $I(d-0,|\mu|,\varphi)$ и $I(d-0,-|\mu|,\varphi)$, представляют собой по существу систему из четырех уравнений (для каждой пары значений m и n) для интенсивностей излучения на границах слоя $[c,d]$. Для случая изотропного рассеяния и однородной среды (при $c=n=0$, $d=m=\tau_0$) в работах [3, 4] была показана эффективность использования этих уравнений для отыскания интенсивностей излучения на границах слоя (считалось, что границы отражают падающее на них излучение по закону Ламберта либо не задерживают его вовсе).

Соотношения (16), (17) обладают двумя весьма важными с точки зрения приложений свойствами. Во-первых, при расчете $S(\tau,\mu,\varphi)$ и $I(\tau,\mu,\varphi)$ внутри слоя по этим формулам, когда $I(c+0,\mu,\varphi)$ и $I(d-0,\mu,\varphi)$ находятся экспериментально, не надо проводить отдельного исследования оптических характеристик подстилающих поверхностей. Во-вторых, выражения (16), (17) при весьма общих предположениях относительно оптических свойств элементарного объема рассеивающей среды оказываются устойчивыми по отношению к отклонениям $I(c+0,\mu,\varphi)$, $I(d-0,\mu,\varphi)$ от своих точных значений, что позволяет эффективно использовать данные эксперимента при расчете $I(\tau,\mu,\varphi)$ и $S(\tau,\mu,\varphi)$.

Отметим, что при $\lambda(\tau)\leqslant\text{const}<1$ выражения (16), (17) остаются справедливыми и тогда, когда некоторые из величин a, b,c,d не являются конечными. Строгое обоснование этого утверждения сводится к доказательству единственности решения уравнения (13), когда в нем не все параметры a, b, c, d конечны, в классе функций, содержащем в себе тот, которому принадлежит функция источников $S(\tau,\mu,\varphi)$ для слоя $[c,d]$. В частности, при $\lambda(\tau)\leqslant\text{const}<1$ и $|g(\tau,\mu,\varphi)|<\infty$ решение уравнения (13) удовлетворяет этим условиям.

Выражения (16), (17) сильно упрощаются, если $\lambda(\tau)x(\tau,\gamma)$ не зависит от τ, а слой $[a,b]$ бесконечен или полубесконечен (именно такая ситуация при $a=c=0$ или $b=d=0$ и рассматривалась в [7]). Если при этом индикатриса рассеяния представима конечной суммой полиномов Лежандра, то функции Грина $G(\ldots)$ и $G_*(\ldots)$ можно найти в аналитическом виде (причем различными способами) и результат, выраженный формулами (16), (17), является законченным общим аналитическим решением поставленной в начале работы задачи. Отметим еще один важный частный случай, когда функции Грина возможно задать в явной форме. Это имеет место для двухслойной среды, когда $\lambda(\tau)x(\tau,\gamma)$ принимает внутри $[c,d]$ относительно τ только два значения ($x(\tau,\gamma)$ задается опять конечной суммой полиномов Лежандра). Если в (16), (17) положить $a=-\infty$, $b=\infty$ и продолжить $\lambda(\tau)x(\tau,\gamma)$ за пределы $[c,d]$ соответственно теми же значениями, которые реализуются в первом и втором слоях исследуемой двухслойной среды, то $G(\ldots)$, $G_*(\ldots)$ и $\Gamma(\ldots)$ представляют собой функции Грина и резольвенту для случая переноса излучения в среде, состоящей из двух прилегающих друг к другу однородных полупространств. Функция Грина $G_*(\ldots)$ уравнения переноса для такой ситуации была найдена в [13]. Поскольку через нее выражаются $G(\ldots)$ и $\Gamma(\ldots)$, то сказанное выше становится очевидным.

Общеизвестна та большая роль, которую играют при исследовании различных физических процессов (и уравнений, их описывающих) свойства инвариантности по отношению к различного рода операциям (физического или математического характера). Впервые проблемы переноса под этим углом зрения были рассмотрены Амбарцумяном [14], который ввел в теорию метод «сложения слоев» (см., например, [15]), являющийся важным конструктивным элементом данного подхода. Дальнейшее существенное развитие теории в этом направлении было выполнено в работах [6, 7, 16—22]. Покажем, что формулы (16), (17) можно трактовать, как соотношения инвариантности. Физически достаточно очевидно, что поле излучения внутри слоя будет инвариантным по отношению к замене подстилающих поверхностей «фиктивными» источниками с распределением интенсивностей по углам, равным соответственно $\theta(-\mu)I(c+0, -|\mu|, \varphi)$ для левой границы и $\theta(\mu)I(d-0, |\mu|, \varphi)$ — для правой. При этом надо считать, что «новые границы» не оказывают никакого влияния на проходящее через них излучение (реальные подстилающие поверхности этому условию не удовлетворяют). Рассмотрим слой $[a, b]$, внутри которого при $c<\tau<d$ $(a\leqslant c,\ d\leqslant b)$ имеются источники $g(\tau, \mu, \varphi)$, а при $\tau=c$ и $\tau=d$ — указанные выше «фиктивные» излучатели. Предполагаем также, что $[a, b]$ не ограничен подстилающими поверхностями и функция $\lambda(\tau)x(\tau, \gamma)$ совпадает при $c<\tau<d$ с ее истинным значением в слое $[c, d]$. Вне $[c, d]$ функция $\lambda(\tau)x(\tau, \gamma)$ может принимать любые физически допустимые значения. Проводя мысленно в такой среде разрезы при $\tau=c$, $\tau=d$ и учитывая инвариантность поля излучения к такой операции (в методе «сложения слоев» проводят обычно один разрез), можно представить, например, функцию источников $\tilde{S}(\tau, \mu, \varphi)$ $(a\leqslant\tau\leqslant b)$ для данной задачи в виде суммы двух слагаемых $S(\tau, \mu, \varphi)+S_2(\tau, \mu, \varphi)$. Первое определяет поле излучения, сформировавшееся исключительно за счет многократного рассеяния в слое $[c, d]$ фотонов, испущенных в нем ($S(\tau, \mu, \varphi)\equiv0$ при $\tau<c$, $\tau>d$). Второе слагаемое дает вклад в $\tilde{S}(\tau, \mu, \varphi)$ за счет возбуждения внешних слоев $[a, c]$, $[d, b]$ выходящим из $[c, d]$ излучением с интенсивностями $I(c+0, |\mu|, \varphi)$, $I(d-0, -|\mu|, \varphi)$ и последующего случайного блуждания фотонов в $[a, b]$. Записывая (с помощью формальных выкладок или вероятностной трактовки теории переноса [6]) выражения $\tilde{S}(\tau, \mu, \varphi)$, $S_2(\tau, \mu, \varphi)$ в явной форме, придем к формуле (16), а затем и к (17). В случае однородных сред и при отсутствии подстилающих поверхностей формула (17), когда $n=a$, $m=b$, $g(\tau, \mu, \varphi)=\delta(\tau-\tau')\delta(\mu-\mu')\delta(\varphi-\varphi')$ и $c=0$, $a=-t$, $d=b=\tau_0$ или $a=c=0$, $b=\tau_0+t$, $d=\tau_0$ $(t\geqslant0)$, аналогична соотношениям инвариантности (24), (25) работы [22]. Отметим, что неоднородность среды и наличие подстилающих поверхностей вносят принципиальные усложнения в соотношения инвариантности (в качестве которых выступают выражения (16), (17)), поскольку, за исключением частных ситуаций (слои $[c, d]$ и $[a, b]$ однородны и границы $\tau=c$, $\tau=d$ не задерживают вовсе падающее на них излучение или отражают его по закону Ламберта), они не связывают между собой однотипные функции Грина для слоев различных оптических толщин.

5. Определение поля излучения внутри однородной рассеивающей среды при возбуждении ее внешними источниками. Здесь будет найдена функция источников внутри однородного плоскопараллельного рассеивающего слоя $[c, d]$, имеющего только одну подстилающую поверхность (при $\tau=c$) и возбуждаемого внешним излучением, проходящим через нее (считаем, что $g(\tau, \mu, \varphi)\equiv0$). При этом конечная формула, выражающая функцию источников через интенсивности излучения, падающего на подстилающую поверхность, идущего от нее и выходящего через границу $\tau=d$, будет получена прямо из соотношения (7), минуя рассуждения п. 3. Отметим, что принятая выше модель применима для исследования многократного рассеяния света в море, внешним источником для которого является излучение, идущее из атмосферы, а в качестве подстилающей поверхности выступает граница вода — атмосфера. Положим в (7) $a=-\infty$, $b=\infty$, $\lambda(\tau)x(\tau,\gamma)=\lambda x(\gamma)$ (т. е. $\lambda(\tau)$, $x(\tau,\gamma)$ не зависят от τ при $-\infty<\tau<<\infty$). При таком способе продолжения функции $\lambda(\tau)x(\tau,\gamma)$ за пределы однородного слоя $[c,d]$ выражение (7) представляет собой фактически характеристическое уравнение теории переноса излучения. Его качественная теория подробно развита в [23, 24]. Решив это уравнение относительно $\bar{S}(\omega,\mu,\varphi,c,d)$ и применяя обратное преобразование Фурье, можно найти $S(\tau,\mu,\varphi)$. В частности, таким способом возможно рассчитать функцию Грина уравнения (13) для случая однородного бесконечного плоскопараллельного слоя.

Для упрощения выкладок ограничимся учетом только двух членов в разложении индикатрисы $x(\gamma)$ по полиномам Лежандра $P_\beta(\cos\gamma)$ ($x_0=1$ и x_1 — соответствующие коэффициенты) и вычислим лишь нулевую азимутальную гармонику (т. е. $S_0(\tau,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(\tau,\mu,\varphi)\,d\varphi$) функции источников. Положим также $c=0$, $d=\tau_0$. При сделанных в этом пункте предположениях из (7) находим

$$\bar{S}_0(\omega,\mu)\,|_{\lambda<1}=\frac{\lambda}{2T(\omega,\lambda)}\sum_{\beta=1}^{2}x_{\beta-1}P_{\beta-1}(\mu)\sum_{\sigma=1}^{2}(-1)^{\sigma+\beta}\times$$

$$\times A_{\sigma\beta}(i\omega,\lambda)\int\limits_{-1}^{1}\frac{I_0(+0,\mu)-\theta(-\mu)\exp(-i\omega\tau_0)I_0(\tau_0,\mu)}{i\omega\mu-1}\,\mu P_{\sigma-1}(\mu)\,d\mu,$$

$$T(\omega,\lambda)=1-\frac{\lambda(1-\lambda)x_1}{\omega^2}-\frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{x_1(1-\lambda)}{\omega^2}\right)\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\mu}{1-i\omega\mu}, \tag{18}$$

$$A_{\sigma\beta}(i\omega,\lambda)=\delta_{\sigma\beta}-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{a_{\sigma\beta}(\mu)}{1-i\omega\mu}\,d\mu,$$

$$a_{11}(\mu)=x_1\mu^2,\quad a_{12}(\mu)=\mu,\quad a_{21}(\mu)=x_1\mu,\quad a_{22}(\mu)=1, \tag{19}$$

где $I_0(+0,\mu)$, $I_0(\tau_0,-|\mu|)$, $\bar{S}_0(\omega,\mu)$ — соответственно нулевые азимутальные гармоники $I(+0,\mu,\varphi)$, $I(\tau_0,-|\mu|,\varphi)$, $\bar{S}(\omega,\mu,\varphi,0,\tau_0)$. Из (3) видно, что для вычисления нулевой гармоники $S_0(\tau,\mu)$ самой функции источников нужно к (18) применить обратное преобразование Фурье и умножить полученное соотношение на $(\sqrt{2\pi})^{-1}$. Найденное таким образом интегральное выражение можно вычислить с помощью элементарных преобразований и контурного интегрирования только в верхней полуплоскости, если учесть (18), (19) и формулы Сохоцкого — Племели [25]. Проделывая соответствующие вычисления, в итоге находим

$$S_0(\tau,\mu)=\frac{\lambda}{2}\sum_{\beta=1}^{2}x_{\beta-1}P_{\beta-1}(\mu)\sum_{\sigma=1}^{2}(-1)^{\sigma+\beta}(Q_{\sigma\beta}(\tau,\lambda)+H_{\sigma\beta}(\tau,\lambda)-E_{\sigma\beta}(\tau,k)), \tag{20}$$

$$Q_{\sigma\beta}(\tau,\lambda)=\int_0^1 \frac{\exp(-\tau/r)}{T_1(r,\lambda)}\left(D_{\sigma\beta}(r,\lambda)I_0(+0,-r)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{2}B_{\sigma\beta}(r,\lambda)\int_{-1}^{1}\frac{\mu P_{\sigma-1}(\mu)I_0(+0,\mu)}{r+\mu}d\mu\right)dr,$$

$$H_{\sigma\beta}(\tau,\lambda)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \mu P_{\sigma-1}(-\mu)\left(\int_0^1 \frac{\exp[-(\tau_0-\tau)/r]C_{\sigma\beta}(r,\lambda)}{(\mu+r)T_1(r,\lambda)}dr\right)I_0(\tau_0,-\mu)d\mu,$$

$$E_{\sigma\beta}(\tau,k)=\frac{1}{T_2(k)}\int_{-1}^{1}\frac{\mu P_{\sigma-1}(\mu)}{\mu k+1}L_{\sigma\beta}(\tau,\mu,k)d\mu,$$

$$L_{\sigma\beta}(\tau,\mu,k)=\exp(-k\tau)A_{\sigma\beta}(-k,\lambda)I_0(+0,\mu)+$$
$$+(-1)^{\sigma-1}\theta(\mu)\exp(-k(\tau_0-\tau))A_{\sigma\beta}(k,\lambda)I_0(\tau_0,-\mu),$$

$$T_1(r,\lambda)=l^2(r,\lambda)+\frac{\pi^2\lambda^2r^2}{4}n^2(r,\lambda),$$

$$n(r,\lambda)=1+x_1(1-\lambda)r^2,\quad l(r,\lambda)=b(r,\lambda)-\frac{\lambda}{2}rn(r,\lambda)\ln\frac{1+r}{1-r},$$

$$b(r,\lambda)=1+\lambda x_1(1-\lambda)r^2,$$

$$T_2(k)=-i\left.\frac{dT(\omega,\lambda)}{d\omega}\right|_{\omega=ik},\quad C_{\sigma\beta}(r,\lambda)=a_{\sigma\beta}(r)l(r,\lambda)-n(r,\lambda)A_{\sigma\beta}\left(\frac{1}{r},\lambda\right),$$

$$B_{\sigma\beta}(r,\lambda)=-n(r,\lambda)A_{\sigma\beta}\left(-\frac{1}{r},\lambda\right)+a_{\sigma\beta}(-r)l(r,\lambda),$$

$$D_{\sigma\beta}(r,\lambda)=P_{\sigma-1}(r)(-1)^{\sigma-1}\left[\frac{\lambda^2\pi^2r^2}{4}a_{\sigma\beta}(-r)n(r,\lambda)+l(r,\lambda)A_{\sigma\beta}\left(-\frac{1}{r},\lambda\right)\right],$$

где k — корень приведенного характеристического уравнения (для нулевой азимутальной гармоники) в случае линейной индикатрисы рассеяния. Расчет $S_0(\tau,\mu)$ по формуле (20) несложен, если свойства подстилающей поверхности $\tau=0$ таковы, что $|\mu|I_0(+0,-|\mu|)$ удовлетворяет условию Гельдера [25] (при выполнении последнего не возникает затруднений при расчете квадратур, входящих в (20)). В противном случае лучше пользоваться общими формулами (16), (17). Когда индикатриса рассеяния представлена конечной суммой полиномов Лежандра и имеются две подстилающие поверхности, получаются результаты, сходные с тем, который дается формулой (20).

В заключение автор выражает свою признательность Ф. Д. Гахову, Л. М. Самсону и Н. В. Коновалову за обсуждение ряда вопросов, рассмотренных в данной работе.

Академия наук БССР
Институт физики

Поступила в редакцию
4 августа 1978 г.,
после доработки
31 октября 1978 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роговцов Н. Н. Определение пространственных моментов функции источников в плоскопараллельной и сферически-симметричной рассеивающих средах.— Ж. прикл. спектр., 1974, 21, № 3.
2. Роговцов Н. Н., Самсон А. М. Интегральные соотношения и величины в теории многократного рассеяния света в однородных и неоднородных средах. Препринт № 91, ИФ АН БССР, 1975.
3. Роговцов Н. Н., Самсон А. М. Об отыскании функции источников внутри плоскопараллельного рассеивающего слоя по интенсивности излучения, выходящего из него.— Ж. прикл. спектр., 1976, 25, № 3.

4. Роговцов Н. Н. Применение интегральных соотношений и величин к исследованию закономерностей переноса излучения в однородных и неоднородных средах. Канд. дис., ИФ АН БССР, 1976.
5. Коновалов Н. В. Асимптотические свойства решения односкоростного уравнения переноса в однородном плоском слое. Задача с азимутальной зависимостью. Препринт № 65, ИПМ АН СССР, 1974.
6. Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. ГИТТЛ, 1956.
7. Мнацаканян М. А. Квазиасимптотические решения задачи о переносе излучения в слое конечной толщины. II. Неконсервативное рассеяние.– Астрофизика, 1976, **12**, № 3.
8. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.
9. Князев П. Н. Интегральные преобразования. Минск, «Вышэйшая школа», 1969.
10. Роговцов Н. Н. Излучение неоднородного плоскопараллельного рассеивающего слоя, содержащего внутренние источники возбуждения.– Ж. прикл. спектр., 1976, **25**, № 4.
11. Роговцов Н. Н., Котомцева Л. А. Многократное рассеяние света в неоднородной плоскопараллельной среде.– Ж. прикл. спектр., 1977, **27**, № 2.
12. Boffi V. C., Santarelli F., Stramigioli C. Integral transform method in radiative transfer.— J. Quant. Spectrosc. Rad. Trans., 1977, **18**, No. 2.
13. Mika J. R. Neutron transport with anisotropic scattering.— Nucl. Sci. Engng, 1961, **11**, No. 4.
14. Амбарцумян В. А. К вопросу о диффузном отражении света мутной средой.– Докл. АН СССР, 1943, 38, № 8.
15. Амбарцумян В. А. Научные труды, т. 1. Изд-во АН АрмССР, 1960.
16. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. ИЛ, 1953.
17. Иванов В. В. Принципы инвариантности и внутренние поля излучения в полубесконечных атмосферах.– Астрон. ж., 1975, **52**, № 2.
18. Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А. О линейных задачах переноса.– Докл. АН СССР, 1974, **217**, № 3.
19. Яновицкий Э. Г. Поле излучения в полубесконечной атмосфере при анизотропном рассеянии.– Атрон. ж., 1976, **53**, № 5.
20. Романова Л. М. Принципы инвариантности для горизонтально-неоднородных мутных сред.– Изв. АН СССР. ФАО, 1976, **12**, № 8.
21. Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. «Мир», 1976.
22. Пикичян О. В. О функции Грина плоского слоя при некогерентном неизотропном рассеянии.– Астрофизика, 1978, **14**, № 1.
23. Масленников М. В. Проблема Милна с анизотропным рассеянием.– Тр. МИАН, «Наука», 1968, **97**.
24. Гермогенова Т. А., Шулая Д. А. О характеристическом уравнении теории переноса излучения.– Докл. АН СССР, 1976, **231**, № 4.
25. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1977.

RESTORATING THE INTERNAL RADIATION FIELD BY ITS CHARACTERISTICS AT SCATTERING MEDIUM BOUNDARIES

N. N. ROGOVTSOV

The problem is considered of radiation field restoration within homogeneous and inhomogeneous plane-parallel turbid media bounded by surfaces with arbitrary reflection laws. Analytical formulae relating the radiation field characteristics within the layer and intensities at its boundaries and the Green's function are found. The Green's function of the integral equation for the sources function is studied in the case of medium which does not have the reflection surface and contains in itself an internal part of the layer. It is shown that the basic formulae obtained in the paper can be interpreted as the invariance relations. The equations for radiation intensities on insides of the reflection surfaces of scattering medium is formulated. An explicit zero harmonic of the sources function within the layer having one reflection surface and excited by the outer radiation is found. At deriving the given expression there were no considerable limitations to the properties of reflection coefficient from this surface and the phase function was considered to be linear.
