Белорусский национальный технический университет, Минск

ПРИМЕНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ ИНВАРИАНТНОСТИ К ВЫВОДУ НОВЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЯРКОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ

Роговцов Н.Н.

The new integral equations for brightness coefficients of planeparellel dispersive medium of optical thickness τ_0 are obtained using invariance relations, involving usual Green's functions or their generalization (for example, reduced Green's functions) of radiation transfer equations. It is shown that the structure of these integral equations enables to obtain multiterm asimptotics of brightness coefficients when $\tau_0 \to +\infty$ or $\tau_0 \to +0$. Such kinds of asimptotics of transmission coefficient $\sigma(...)$ when $\tau_0 \to +\infty$ are given to illustrate.

1. При рассмотрении целого ряда проблем, связанных с исследованием свойств атмосфер Земли, Венеры и планет-гигантов, приходится решать следующую краевую задачу:

$$\mu\frac{\partial G_s(\tau,\mu,\xi,\Lambda,\tau_0)}{\partial\tau} = -G_s(\tau,\mu,\xi,\Lambda,\tau_0)+\frac{\Lambda}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}(\mu,\mu')\,G_s(\tau,\mu',\xi,\Lambda,\tau_0)d\mu', \tag{1}$$

$$(\tau,\,\mu)\in[0,\tau_0]\times[-1,1],\ \xi\in(0,1],\ \Lambda\in(0,\,1],\ \tau_0\in R_+;$$

$$G_s(+0,|\mu|,\,\xi,\,\Lambda,\,\tau_0)=\delta(|\mu|-\xi). \tag{2}$$

Здесь $\mathrm{P}(\mu,\,\mu')=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\chi(\mu_0)d\varphi$, где $\mu_0=\left((1-\mu^2)(1-\mu'^2)\right)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi+\mu\mu'$, $\chi(\mu_0)$ неотрицательная вещественная функция, удовлетворяющая условию нормировки $\int_{-1}^{1}\chi(\mu_0)d\mu_0=2$; $G_s(\tau,\,\mu,\,\xi,\,\Lambda,\,\tau_0)$ — поверхностная функция Грина [1] уравнения переноса излучения (RTE), $\delta(...)$ — дельта-функция Дирака.

2. При решении обратных задач теории переноса излучения необходимо не только проанализировать общие качественные свойства решения краевой задачи (1), (2), но и найти само это решение в удобном аналитическом (или хотя бы в полуаналитическом) виде. Формально исследование указанной задачи можно свести к изучению уравнения Фредгольма 2-го рода для случая прямоугольной области $[0,\,\tau_0]\times[-1,\,1]$. Общие методы решения такого рода уравнений в замкнутой форме не разработаны. Однако, краевую задачу (1), (2) с помощью общих соотношений инвариантности [2, 3] возможно переформулировать так, чтобы отыскание $G_s(\tau,\,\mu,\,\xi,\,\Lambda,\,\tau_0)$ сводилось к нахождению коэффициентов яркости $\rho(|\mu|,\,\xi,\,\Lambda,\,\tau_0)$, $\sigma(|\mu|,\,\xi,\,\Lambda,\,\tau_0)$, которые определяются такими выражениями:

$$G_s(0-|\mu|,\,\xi,\,\Lambda,\,\tau_0)=2\xi\rho(|\mu|,\,\xi,\,\Lambda,\,\tau_0),$$

$$G_s(\tau_0,|\mu|,\,\xi,\,\Lambda,\,\tau_0)=\exp(-(\tau_0/\xi))\delta(|\mu|-\xi)+2\xi\sigma(|\mu|,\,\xi,\,\Lambda,\,\tau_0). \tag{3}$$

Кроме того с использованием общих соотношений инвариантности [2, 3] удается сформулировать новые интегральные уравнения для $\rho(...)$ и $\sigma(...)$, структура которых позволяет находить многочленные асимптотики для коэффициентов яркости при $\tau_0\to+0$ и $\tau_0\to+\infty$. В работе будут кратко описаны процедуры получения этих интегральных уравнений и упомянутых асимптотик.

3. Из результатов работ [2, 3] следует справедливость такого соотношения инвариантности

$$\theta_{[0,\tau_0]}(\tau)G_s(\tau,\mu,\xi,\Lambda,\tau_0)=\xi G_{(0,\infty)}(\tau,\mu,0,\xi,\Lambda)-$$
$$-\int_0^1 \mu' G_{(0,\infty)}(\tau,\mu,\tau_0,\mu',\Lambda)G_s(\tau_0,\mu',\xi,\Lambda,\tau_0)d\mu', \qquad (4)$$

где $\theta_{[0,\tau_0]}(\tau)$ — характеристическая функция множества $[0,\tau_0]$ $G_{(0,\infty)}(\tau,\mu,\tau',\mu',\Lambda)$ — «объемная» функция Грина [1] для *RTE* для случая полубесконечной дисперсной среды $V_{(0,\infty)}$, содержащей «источник» $\delta(\tau-\tau')\,\delta(\mu-\mu')$. Так как к настоящему времени разработаны эффективные алгоритмы отыскания функции $G_{(0,\infty)}(\tau,\mu,\tau',\mu,\Lambda)$, то будем считать ее известной. Заметим, что соотношение (4) получено посредством погружения слоя "$[0,\tau_0]$" в полубесконечную среду "$[0,+\infty)$" и учета всех изменений в решениях краевых задач для *RTE*, которые при этом в них возникают (см. подробные разъяснения в [3]). Из (3), (4) следует, что верно выражение

$$\rho\,(|\mu|,\xi,\Lambda,\tau_0)=2^{-1}G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,0,\xi,\Lambda)-2^{-1}\exp(-(\tau_0/\xi))G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\xi,\Lambda)-$$
$$-\int_0^1 \mu' G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)\sigma(\mu',\xi,\Lambda,\tau_0)d\mu'. \qquad (5)$$

Используя (3) и соотношение инвариантности, родственное (4), можно показать, что имеет место

$$\sigma(|\mu|,\xi,\Lambda,\tau_0)=2^{-1}\,(G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,-\xi,\Lambda)-(2\xi)^{-1}\exp(-(\tau_0/\xi))\,\delta(\xi-|\mu|))-$$
$$-\int_0^1 \mu' G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)\,\rho(\mu',\xi,\Lambda,\tau_0)d\mu'. \qquad (6)$$

Выражения (5), (6) образуют систему интегральных уравнений, которую можно использовать для определения коэффициентов яркости. Система (5), (6) расщепляется на два отдельных интегральных уравнения для данных коэффициентов. Эти интегральные уравнения имеют следующий вид:

$$\rho(|\mu|,\xi,\Lambda,\tau_0)=2^{-1}G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,0,\xi,\Lambda)-2^{-1}\int_0^1 \mu' G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)\times$$
$$\times G_{(0,\infty)}(0,-\mu',\tau_0,-\xi,\Lambda)d\mu'+\int_0^1 \mu''[\int_0^1 \mu' G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)\times$$
$$\times G_{(0,\infty)}(0,-\mu',\tau_0,\mu'',\Lambda)d\mu']\,\rho(\mu'',\xi,\Lambda,\tau_0)d\mu''; \qquad (7)$$
$$\sigma(|\mu|,\xi,\Lambda,\tau_0)=2^{-1}\,(G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,-\xi,\Lambda)-\xi^{-1}\exp(-(\tau_0/\xi))\,\delta(\xi-|\mu|))-$$
$$-2^{-1}\int_0^1 \mu' G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)\,G_{(0,\infty)}(0,-\mu',0,\xi,\Lambda)d\mu'+$$
$$+2^{-1}\exp(-(\tau_0/\xi))\int_0^1 \mu' G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)\,G_{(0,\infty)}(0,-\mu',\tau_0,\xi,\Lambda)d\mu'+$$
$$+\int_0^1 \mu''[\int_0^1 \mu' G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)\,G_{(0,\infty)}(0,-\mu',\tau_0,\mu'',\Lambda)d\mu']\,\sigma(\mu'',\xi,\Lambda,\tau_0)d\mu''. \qquad (8)$$

Заметим, что интегральные уравнения (7), (8) имеют одинаковые ядра и отличаются только свободными членами. Эти ядра выражаются через обычные «объемные» функции Грина *RTE* для случая полупространства (точнее полубесконечной плоскопараллельной дисперсной среды $V_{(0,\infty)}$). Интегральные уравнения (7) и (8) можно использовать для получения асимптотик функций $\rho(|\mu|,\xi,\Lambda,\tau_0)$, $\sigma(|\mu|,\xi,\Lambda,\tau_0)$, но только тогда, когда $\tau_0\to+\infty$.

4. В работах [2, 4] впервые были получены соотношения инвариантности, содержащие усеченные функции Грина. Такого рода соотношения позволяют получать интегральные уравнения для коэффициентов яркости, которые можно использовать для отыскания асимптотик функций $\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$, $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$ как при $\tau_0 \to +\infty$, так и при $\tau_0 \to +0$. Для вывода соотношений инвариантности, которые содержат усеченные функции Грина или их обобщения, достаточно воспользоваться обычными соотношениями инвариантности [2, 3], к которым относится и выражение (4), и учесть определение характеристической функции множества [5].

Положим в (4) $\tau = \tau_0 + 0$ и $\mu = -|\mu|$. Затем полученное выражение умножим на функцию $\eta_1(\tau_0, |\mu|)$, а результат вычтем из соотношения (4), в котором предварительно положим $\tau_0 = +0$, $\mu = -|\mu|$. В итоге получим одно из искомых соотношений инвариантности. Оно имеет вид

$$\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = 2^{-1}[G_{(0,\infty)}(0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda) - \eta_1(\tau_0, |\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0, -|\mu|, 0, -\xi, \Lambda)] -$$
$$- 2^{-1}[G_{(0,\infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \xi, \Lambda) - \eta_1(\tau_0, |\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \xi, \Lambda)]\exp(-(\tau_0/\xi)) -$$
$$- \int_0^1 \mu' [G_{(0,\infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) - \eta_1(\tau_0, |\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda)] \times$$
$$\times \sigma(\mu', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu' \qquad (9)$$

Аналогичным образом можно получить второе искомое соотношение инвариантности

$$\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = -(2\xi)^{-1}\exp(-(\tau_0/\xi))\delta(\xi - |\mu|) + 2^{-1}[G_{(0,\infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda) -$$
$$\eta_2(\tau_0, |\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda)] -$$
$$- \int_0^1 \mu' [G_{(0,\infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) - \eta_2(\tau_0, |\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda)] \times \qquad (10)$$
$$\times \rho(\mu', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu'.$$

Заметим, что если положить $\eta_1(\tau_0, |\mu|) = \eta_2(\tau_0, |\mu|) = \exp(-(\tau_0/|\mu|))$, то ядра интегральных уравнений (9), (10) будут одинаковыми и будут выражаться через усеченные функции Грина [2, 4].

Из системы интегральных уравнений (9), (10) несложно получить отдельные уравнения для коэффициентов яркости. Выпишем эти уравнения только для того частного случая, когда $\eta_1(\tau_0, |\mu|) = \eta_2(\tau_0, |\mu|) = \eta(\tau_0, |\mu|)$. Представим эти уравнения в такой форме:

$$\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = g_1(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) + \int_0^1 K(|\mu|, \mu'', \tau_0, \Lambda)\, \rho(\mu'', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu'', \qquad (11)$$

$$\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = g_2(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) + \int_0^1 K(|\mu|, \mu'', \tau_0, \Lambda)\, \sigma(\mu'', \xi, \Lambda, \tau_0) d\mu'', \qquad (12)$$

$$g_1(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = 2^{-1}[G_{(0,\infty)}(0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda) - \eta(\tau_0, |\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0, -|\mu|, 0, \xi, \Lambda)] -$$
$$- 2^{-1}\int_0^1 \mu' [G_{(0,\infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda) - \eta(\tau_0, |\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, \mu', \Lambda)] \times$$
$$\times [G_{(0,\infty)}(0, -\mu', \tau_0, -\xi, \Lambda) - \eta(\tau_0, \mu')G_{(0,\infty)}(\tau_0 + 0, -\mu', \tau_0, -\xi, \Lambda)] d\mu', \qquad (13)$$

$$g_2(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0) = -(2\xi)^{-1}\exp(-(\tau_0/\xi))\delta(\xi - |\mu|) + 2^{-1}[G_{(0,\infty)}(0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda) -$$
$$\eta(\tau_0, |\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0 + 0, -|\mu|, \tau_0, -\xi, \Lambda)] -$$

$$-2^{-1}\int_0^1 \mu' [G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)-\eta(\tau_0,|\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0+0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)]\times$$
$$\times[G_{(0,\infty)}(0,-\mu',0,\xi,\Lambda)-\eta(\tau_0,\mu')G_{(0,\infty)}(\tau_0,-\mu',0,\xi,\Lambda)-(G_{(0,\infty)}(0,-\mu',\tau_0,\xi,\Lambda)-$$
$$\eta(\tau_0,\mu')G_{(0,\infty)}(\tau_0+0,-\mu',\tau_0,\xi,\Lambda))\exp(-(\tau_0/\xi))]\,d\mu',$$
$$\mathrm{K}(|\mu|,\mu'',\tau_0,\Lambda)=\mu''\int_0^1\mu'[G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)-\eta(\tau_0,|\mu|)G_{(0,\infty)}(\tau_0+0,-|\mu|,\tau_0,\mu',\Lambda)]\times$$
$$\times[G_{(0,\infty)}(0,-\mu',\tau_0,\mu'',\Lambda)-\eta(\tau_0,\mu')G_{(0,\infty)}(\tau_0+0,-\mu',\tau_0,\mu'',\Lambda)]d\mu'.$$

В отличие от (7), (8) интегральные уравнения (11), (12) позволяют посредством соответствующего выбора функций $\eta(\tau_0,\mu)$ отыскивать асимптотики коэффициентов яркости не только при $\tau_0\to+\infty$, но и при $\tau_0\to+0$.

5. Перейдем к краткому описанию процедуры получения асимптотик коэффициентов яркости, когда $\tau_0\to+\infty$. Для отыскания этих асимптотик, во-первых, следует принять во внимание принцип взаимности [1], согласно которому
$G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,0,\xi,\Lambda)=|\mu|^{-1}G_s(0,-\xi,|\mu|,\Lambda;V_{(0,\infty)})$,
$G_{(0,\infty)}(\tau_0,-|\mu|,0,\xi,\Lambda)=G_{(0,\infty)}(0,-\xi,\tau_0,|\mu|,\Lambda)=\xi^{-1}G_s(\tau_0,-|\mu|,\xi,\Lambda;V_{(0,\infty)})$,
$G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,\xi,\Lambda)=|\mu|^{-1}G_s(\tau_0,-\xi,|\mu|,\Lambda;V_{(0,\infty)})$,
$G_{(0,\infty)}(0,-|\mu|,\tau_0,-\xi,\Lambda)=|\mu|^{-1}G_s(\tau_0,\xi,|\mu|,\Lambda;V_{(0,\infty)})$, где $G_s(\tau,\mu,\xi,\Lambda;V_{(0,\infty)})$ — поверхностная функция Грина *RTE* для случая среды $V_{(0,\infty)}$. Во-вторых, надо учесть соотношение инвариантности (см. [2, 3]), связывающее функции $G_s(...)$ и $G_\infty(...)$, где $G_\infty(\tau,\mu,\tau',\mu',\Lambda)$ — функция Грина *RTE* для бесконечной плоскопараллельной среды V_∞, содержащей «источник» $\delta(\tau-\tau')\,\delta(\mu-\mu')$. Оно имеет вид

$$G_s(\tau,\mu,\mu_1,\Lambda;V_{(0,\infty)})=\int_{-1}^{1}\mu' G_\infty(\tau,\mu,0,\mu',\Lambda)\,G_s(+0,\mu',\mu_1,\Lambda;V_{(0,\infty)})d\mu', \tag{14}$$

где $\tau>0$, $\mu_1\in(0,1]$, $\mu\in[-1,1]$. В-третьих, необходимо воспользоваться такими представлениями для функции $G_\infty(...)$ [6, 7]:

$$G_\infty(\tau,\mu,\tau',\mu',\Lambda)=G_\infty(\tau-\tau',\mu,\mu',\Lambda)=\sum_{l=1}^{p}C_\ell\,\varphi_{\ell+}(\mu,\Lambda)\varphi_{\ell+}(\mu',\Lambda)\exp(-k_\ell(\tau-\tau))+$$
$$+G_\infty^{**}(\tau-\tau',\mu,\mu',\Lambda)=C_1\,\varphi_{1+}(\mu,\Lambda)\varphi_{1+}(\mu',\Lambda)\exp(-k_1(\tau-\tau'))+G_\infty^{*}(\tau-\tau',\mu,\mu',\Lambda),$$
$$\tau-\tau'>0 \tag{15}$$

Здесь C_ℓ — нормировочные константы: $\varphi_{\ell+}(\mu,\Lambda)$ — собственные функции, соответствующие дискретному спектру характеристического уравнения для *RTE*; p — число учитываемых в явном виде дискретных неотрицательных корней $k_1, k_2, ...$ этого характеристического уравнения (если существует только один неотрицательный корень k_1, то $p=1$); $G_\infty^{*}(...)$ и $G_\infty^{**}(...)$ — функции, учитывающие часть вклада в $G_\infty(...)$, которая порождается дискретным и непрерывными спектрами характеристического уравнения и не входит в первые слагаемые в правых частях (15). В-четвертых, надо иметь ввиду, что неотрицательные собственные значения $k_1, k_2, ...$ принадлежат полуинтервалу $[0,1)$ и функции $\int_0^1 G_\infty^{*}(\tau-\tau',\mu,\mu',\Lambda)d\mu'$ и

$\int_0^1 G_\infty^{**}(\tau-\tau', \mu, \mu', \Lambda)d\mu'$ допускают соответственно оценки $O(\exp(-k_2(\tau-\tau')))$ и $O(\exp(-k_{p+1}(\tau-\tau')))$ при $(\tau-\tau')\to+\infty$ (при этом следует полагать $k_2=1$ и $k_{p+1}=1$, если корни R_2 и R_{p+1} не существуют. В-пятых, следует использовать то, что ядра интегральных уравнений (7), (9) с учетом сказанного выше в этом пункте допускают представление в виде суммы вырожденного ядра и остатка, порядок убывания которого при $\tau_0\to+\infty$ известен. Посредством учета указанной информации о свойствах функций $G_{(0,\infty)}(\ldots)$, $G_\infty(\ldots)$, $G_\infty^*(\ldots)$, $G_\infty^{**}(\ldots)$ из (7), (8), (14), (15) с помощью достаточно трудоемких преобразований и оценок можно получить искомые асимптотики для коэффициентов яркости $\rho(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$ и $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$ при $\tau_0\to+\infty$. Выпишем для иллюстрации только наиболее простую асимптотику для $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$, когда $\Lambda\in(0,1)$. Она имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)=(8/\Lambda^2 C_1 w(\Lambda,\tau_0))\exp(-k_1\tau_0)\{u_1(|\mu|, \Lambda)[u_1(\xi,\Lambda)+\\
&+\exp(-k_1\tau_0)[C_1 a_{11}(\Lambda)\sum_{\ell=2}^{r_0}(a_{1\ell}(\Lambda)/C_\ell)u_\ell(\xi, \Lambda)\exp(-k_\ell\tau_0)+\\
&+(w(\Lambda, \tau_0))^{-1}u_1(\xi, \Lambda)(\tilde g_{r_0}(\Lambda, \tau_0)\Im(\tau_0, \Lambda)+\theta(A)a_{11}^2(\Lambda)\tilde g_{r_1}(\Lambda, \tau_0)\exp(-2k_1\tau_0))]]+\\
&+a_{11}(\Lambda)u_1(\xi, \Lambda)\sum_{\ell=2}^{r_0}a_{\ell 1}(\Lambda)u_\ell(|\mu|, \Lambda)\exp(-(k_1+k_\ell)\tau_0)\}+ \qquad (16)\\
&+\sum_{\ell=2}^{r_0}(8/\Lambda^2 C_\ell)u_\ell(|\mu|, \Lambda)u_\ell(\xi, \Lambda)\exp(-k_\ell\tau_0)+O(\exp(-(k_1+2k_2)\tau_0))\\
&\tau_0\to+\infty\ (\Lambda\in(0, 1)).
\end{aligned}$$

Асимптотика (16) получена в предположении существования корня k_2 и выполнения условия $k_1+2k_2<1$. Функции, входящие в (16) имеют следующий смысл:

$$u_\ell(|\mu|, \Lambda)=(\Lambda C_\ell/4)\left[\varphi_{\ell+}(|\mu|, \Lambda)-2\int_0^1\mu'\varphi_\ell(-\mu', \Lambda)\rho_0^{(0,\infty)}(|\mu|, \mu', \Lambda)d\mu'\right],$$

где $\rho_0^{(0,\infty)}(|\mu|, \mu', \Lambda)$ — нулевая азимутальная гармоника коэффициента отражения от полубесконечной дисперсной среды [8]; $a_{j\ell}(\Lambda)=(4/\Lambda)\int_0^1\mu'\varphi_{j+}(-\mu', \Lambda)u_\ell(\mu', \Lambda)d\mu'$,

$$w(\Lambda, \tau_0)=1-a_{11}^2(\Lambda)\exp(-2k_1\tau_0);\ \tilde g_s(\Lambda, \tau_0)=\sum_{\ell=2}^{s}a_{\ell 1}(\Lambda)\,a_{1\ell}(\Lambda)\exp(-k_\ell\tau_0);$$

$$\begin{aligned}
&(\Im(\tau_0, \Lambda))^{-1}=1-(4/\Lambda)\exp(-k_1\tau_0)(w(\Lambda,\tau_0))^{-1}\int_0^1\mu'' u_1(\mu'',\Lambda)d\mu''\int_0^1\mu'\varphi_{1+}(-\mu',\Lambda)\times\\
&\times\left[G_\infty^*(\tau_0, -\mu'', 0, \mu', \Lambda)-2\int_0^1\mu''' G_\infty^*(\tau_0, -\mu''', 0, -\mu''',\Lambda)\,\rho_0^{(0,\infty)}(\mu''', \mu', \Lambda)d\mu'''\right]d\mu';
\end{aligned}$$

A — множество решений системы неравенств $3k_1+k_\ell<2k_2$, где $\ell=2,3,\ldots$, а r_1 — максимальное значение ℓ, для которого A не пусто; $\theta(A)$ — характеристическая функция множества A (если $A=\varnothing$, то $\theta(\varnothing)=0$); r_0 — наибольшее натуральное число, для которого выполняется неравенство $k_1+k_{r_0}<2k_2$, где $r_0\geq 2$; r — максимальное натуральное число ℓ, для которого верно неравенство $k_\ell<k_1+2k_2$.

Все входящие в (16) величины и функции могут быть найдены по алгоритмам, изложенным в работах [6—9]. Асимптотика (16) обобщает известные асимптотические выражения для $\sigma(|\mu|, \xi, \Lambda, \tau_0)$ [8] и может использоваться для решения обратных задач теории переноса излучения, когда $\Lambda\in(0, 1)$ и $\tau_0>>1$. На основе приведенных выше интегральных уравнений и соотношений инвариантности возможно найти асимптотики коэффициентов яркости и для случая консервативного рассеяния (т.е. тогда, когда $\Lambda=1$ и в среде отсутствует поглощение излучения). Посредством итерационной процедуры из полученных интегральных уравнений можно вывести и асимптотики с остаточными членами более высокого порядка по сравнению с $O(\exp(-(k_1+2k_2)\tau_0))$. Заметим еще, что при $\tau_0\to+0$ нормы ядер (в пространствах ограниченных или суммируемых на [0, 1] функций) интегральных уравнений (11), (12) стремятся к нулю, когда $\forall\mu\in[0, 1]$ $\lim\limits_{\tau_0\to+0}\eta(\tau_0,|\mu|)=1$. Именно это обстоятельство и позволяет найти асимптотики коэффициентов яркости при $\tau_0\to+0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., 1972. – 384 с.
2. Роговцов Н.Н. // Изв. СССР. ФАО. 1980. Т. 16, №3. С. 244 – 253.
3. Роговцов Н.Н. Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению задач математической физики. Ч. 1. Минск. 1999. –384 с.
4. Роговцов Н.Н. // Ж. прикл. спектр. 1981. Т. 34, №2. –С. 335–342.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1971. – 512 с.
6. Роговцов Н.Н., Боровик Ф.Н. // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, №6. – С. 39–44.
7. Роговцов Н.Н., Самсон А.М. // Астрофизика. 1985. Т. 23, №1. – С.163—176.
8. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972. –336 с.
9. Роговцов Н.Н. / Труды междун. конфер. «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление». Минск, Беларусь, 10–20 февраля 1996. – С. 305—312.