*Белорусский национальный технический университет, Минск*

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

**Дубровина О.В.**

*Results of the investigation integral wavelet transforms are given. Acting and boundedness conditions for the integral wavelet transforms with compact support are obtained. Theorems of an inversion of the integral wavelet transform in the space of square-summable functions and the pointwise convergence of the inverse wavelet transform under Dini condition are stated.*

Теория вейвлет-преобразований является интенсивно развивающейся отраслью математики благодаря, в первую очередь, широкому спектру ее приложений. Вейвлет-анализ как отдельное научное направление сформировался в середине 80-х годов XX столетия. Математическая ветвь этой дисциплины представляет собой сплав результатов теории операторов, гармонического анализа, теории гильбертовых и банаховых пространств, дифференциальных уравнений, теории аппроксимации, линейной алгебры и т.д. (см., например, [1, 2]). Вейвлет-преобразования находят широкое применение в различных областях научных и прикладных исследованиях, например, при моделировании жидкостей, финансовом анализе, медицине, геофизике, обработке различного рода сигналов, компьютерной графике.

**Определение.** *Вейвлетом* называется функция $\psi : R \to R$, удовлетворяющая следующим условиям

1. $E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < +\infty$ (конечность энергии вейвлета).

2. Условию согласованности:

$$C_\psi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|}{|f|} df < +\infty, \tag{1}$$

где $\hat{\psi}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{(2i\pi f)t} df < +\infty$ – преобразование Фурье функции $\psi$.

Из условия конечности константы $C_\psi$ следует ограничение на функции, которые могут быть использованы в качестве базисных вейвлетов.

Примерами вейвлет-функций являются вейвлет Хаара $\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \le t < 1, \\ 0, & t < 0, t \ge 1 \end{cases}$ вейвлет "Французская шляпа" (French Hat, FHAT) $\psi_F(t) = \begin{cases} 1, & 0 < |t| < 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |t| < 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$ Вещественные базисы часто конструируются на основе производных функций Гаусса: $\psi_m(t) = (-1)^m \partial_t^m \left( \exp(-\frac{t^2}{2}) \right)$ (при $m = 1$ вейвлет называют WAVE-вейвлетом, при $m = 2$ – MHAT-вейвлетом или вейвлетом "Мексиканская шляпа"). Из комплексных вейвлетов можно выделить хорошо локализованный как во временном, так и в частотном пространствах, вейвлет Морле

$\psi(r)=\exp(i\omega_0 t)\exp(-\frac{r^2}{2})$. Для построения дискретных базисов часто используется семейство биортогональных вейвлетов Добеши [2], не имеющих аналитического представления.

Интегральное вейвлет-преобразование имеет вид

$$(W_\psi x)(a,b)=c_0(a)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}x(t)dt. \qquad (2)$$

Это преобразование определено для каждой функции $\psi: R\to R(C)$ некоторого семейства из $L_2(R)$ обладающих нулевым средним. Данное преобразование ставит в соответствие каждой функции $x\in L_2(R)$ (сигналу) функцию двух переменных $(a,b)$, играющих роль масштабирующего параметра и параметра сдвига (по времени) соответственно.

Формула (2) задает целое семейство преобразований (свое для каждого фиксированного вейвлета $\psi$), что позволяет получить определенные свойства $W_\psi$, подбирая соответствующий вейвлет. Величина $c_0(a)$ играет роль нормирующего параметра. Стандартными значениями этого параметра являются $c_0(a)=\frac{1}{a}$ или $c_0(a)=\frac{1}{\sqrt{a}}$. Второе из этих значений позволяет удовлетворять условию сохранения энергии вейвлета при его масштабировании. Другими словами, если положить $\psi_{ab}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, то $\|\psi_{ab}\|_{L_2(R)}=\text{const}\ \ a,b\in R$.

Обратное вейвлет-преобразование в пространстве $L_2(R)$ записывается в терминах того же вейвлета, что и прямое:

$$x(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi x)(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}, \qquad (3)$$

где константа $C_\psi$ в определена условием согласованности вейвлета (1).

Следующие свойства вейвлет-преобразования могут быть проверены непосредственно:

1. Линейность $W_\psi(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t))=W_\psi(\alpha x_1(t))+W_\psi(\beta x_2(t))$.
2. Инвариантность относительно сдвига $(W_\psi x)(a,b)(\cdot-b_0)=(W_\psi x)(a,b-b_0)(\cdot)$.
3. Инвариантность относительно сжатия (растяжения) $(W_\psi x)(a,b)\left(\frac{\cdot}{a_0}\right)=(W_\psi x)\left(\frac{a}{a_0},\frac{b}{a_0}\right)(\cdot)$.
4. Частотно-временная локализация и наличие частотно-временного окна и угла влияния.
5. Нулевое среднее $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt=0$. В приложениях бывает важно, чтобы нулю равнялись первые $k$ моментов $\int_{-\infty}^{\infty}t^k\psi(t)dt=0$, $k=0,1,2,\ldots$.
6. Дифференцируемость $W(\partial_t^m x)=(-1)^m\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\partial_t^m(\overline{\psi}_{a,b})dt$.
7. Аналог равенства Парсеваля

$$\langle x_1,x_2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)\overline{x_2(t)}dt=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi x_1)(a,b)\overline{(W_\psi x_2)(a,b)}\frac{dadb}{a^2}.$$

Рассмотрим интегральное вейвлет-преобразование (2) в случае, когда вейвлет $\psi$ имеет компактный носитель. Тогда интегральное вейвлет-преобразование можно записать в виде

$$(W_\psi x)(a,b)=c_0(a)\int_A^B \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)x(t)dt,\ a\in[\alpha,\beta],\ b\in[\gamma,\delta],\ \alpha>0. \qquad (4)$$

В этом случае оператор $W_\psi$ является интегральным оператором по конечному промежутку, а преобразование (4) имеет вид свертки Дюамеля (сужение свертки Фурье на конечный промежуток) по переменной $b$ и свертки Меллина по переменной $a$.

Из общих теорем о действии оператора типа свертки Фурье (см. [3]) вытекают следующие свойства оператора $W_\psi$:

**Теорема 1.** *1) Пусть* $x\in L_1(A,B)$ *и* $\psi\in L_p([\gamma,\delta])$, $p\in[1,\infty]$, *тогда интегральное вейвлет-преобразование* $W_\psi(\cdot,b)\in L^p([\alpha,\beta])$ *по переменной* $b$ *при любом фиксированном* $a\in[\alpha,\beta]$.

*2)* $x\in L_1(A,B)$ *и* $\psi$ *– измеримая по Борелю ограниченная функция по переменной* $b$, *тогда функция* $W_\psi(\cdot,b)$ *является соответственно измеримой по Борелю ограниченной функцией при любом фиксированном* $a\in[\alpha,\beta]$.

*3)* $x\in L_1(A,B)$ *и* $\psi$ *– ограниченная непрерывная функция по переменной* $b$, *тогда функция* $W_\psi(\cdot,b)$ *является ограниченной непрерывной функцией при любом фиксированном* $a\in[\alpha,\beta]$.

*4)* $x\in L_1(A,B)$ *и* $\psi$ *– ограниченная равномерно непрерывная функция по переменной* $b$, *тогда функция* $W_\psi(\cdot,b)$ *является ограниченной равномерно непрерывной функцией при любом фиксированном* $a\in[\alpha,\beta]$.

*5)* $x\in L_1(A,B)$ *и* $\psi$ *– функция ограниченной вариации, тогда функция* $W_\psi(\cdot,b)$ *является функцией ограниченной вариации при любом фиксированном* $a\in[\alpha,\beta]$.

**Теорема 2.** *Пусть* $x(t)$ *измерима на* $R$, $a\in[\alpha,\beta]$, *фиксировано и выполняется одно из условий:*

*1)* $W_\psi(\cdot,b)\in L([A,B])$ *для любой функции* $\psi\in L_\infty([A,B])$,

*2)* $W_\psi(\cdot,b)\in L_\infty([A,B])$ *для любой ограниченной непрерывной функции* $\psi$, *для которой* $\lim\limits_{t\to\infty}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)=0$,

*3)* $W_\psi(\cdot,b)\in L_1([A,B])$ *для любой функции.*

*Тогда* $x\in L_1([c,d])$.

С точки зрения приложений важным является изучение свойств интегрального вейвлет-преобразования в пространствах непрерывных функций.

Рассмотрим действие оператора, соответствующего интегральному вейвлет-преобразованию, в пространствах $C^{1,\lambda}[c,d]$ ($C^{1,\lambda}(\rho^{(j)})([c,d])$) непрерывно-дифференцируемых функций, производные которых удовлетворяют условию Гёльдера (соответственно весовому условию Гёльдера (см. [4])). Норма в пространстве $C^{1,\lambda}$

определяется равенством $\|\psi\|_{C^{1,\lambda}} = \sup\limits_{u\in[A_1,B_1]}|\psi(u)| + \sup\limits_{u\in[A_1,B_1]}|\psi'(u)| + \sup\limits_{u_1,u_2\in[A_1,B_1]}\dfrac{|\psi(u_1)-\psi(u_2)|}{|u_1-u_2|^{\lambda}}$, а в пространстве $C^{1,\lambda}\left(\rho^{(j)}\right)$ – равенством $\|\psi\|_{C^{1,\lambda}} = \sup\limits_{u\in[A_1,B_1]}\left|\psi(u)\left(\rho^{(0)}(u)\right)^{\mu}\right| + \sup\limits_{u\in[A_1,B_1]}\left|\psi'(u)\left(\rho^{(1)}(u)\right)^{\mu}\right| +$
$+ \sup\limits_{u_1,u_2\in[A_1,B_1]}\dfrac{\left|\psi(u_1)\left(\rho^{(0)}(u_1)\right)^{\mu} - \psi(u_2)\left(\rho^{(0)}(u_2)\right)^{\mu}\right|}{|u_1-u_2|^{\lambda}}$, где $\rho^{(j)}(t)=\left[\left(\dfrac{t-b}{a}-A\right)\left(B-\dfrac{t-b}{a}\right)\right]^{j+\mu}$, при этом $\psi(t)\in C_0^{1,\lambda}\left(\rho^{(0)}([c,d])\right)$, $\psi'(t)\in C_0^{0,\lambda}\left(\rho^{(1)}([c,d])\right)$, $\psi(c)=\psi(d)=0$.

**Теорема 3.** *1) Пусть сигнал* $x\in C[A,B]$, *вейвлет* $\psi\in C^{1,\lambda}[c,d]$. *Тогда интегральное вейвлет-преобразование (4) принадлежит пространству* $C^{1,\lambda}$ *как функция двух переменных:* $(W_\psi x)(a,b)\in C^{1,\lambda}([\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta])$.

*2) Пусть сигнал* $x\in C[A,B]$, *вейвлет* $\psi\in {C_0}^{1,\lambda}\left(\rho^{(j)}\right)([c,d])$, $\rho^{(j)}(t)=\left[\left(\dfrac{t-b}{a}-A\right)\left(B-\dfrac{t-b}{a}\right)\right]^{j+\mu}$, $j=0,1$, $0<\mu<1$, $\mu<1-\lambda$. *Тогда интегральное вейвлет-преобразование (4) принадлежит пространству* $C_0^{1,\lambda}$, *т.е.*

$$(W_\psi x)(a,b)\in C^{1,\lambda}\left(\rho_1^{(j)}(a),\rho_2^{(j)}(b)\right)([\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]),$$

*где* $\rho_1^{(j)}(a)=[(a-\alpha)(\beta-1)]^{j+\mu}$, $\rho_2^{(j)}(a)=[(b-\gamma)(\delta-b)]^{j+\mu}$, $j=0,1$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству ограниченности оператора типа свертки в указанных пространствах (см. [4])) и установлено в [5].

Интегральное вейвлет-преобразование может быть применено, например, при решении интегральных уравнений. В этом случае важным является нахождение условий, при которых в соответствующих пространствах определено обратное вейвлет-преобразование.

Существование обратного вейвлет-преобразования в смысле сходимости в пространстве $L_2(R)$ установлена различными способами (см., например, [1, 2]).

**Теорема 4.** *Пусть* $\psi\in L_2(R)$ – *базовый вейвлет, удовлетворяющий условию согласованности (1).* $C_\psi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{|\hat{\psi}(f)|^2}{|f|}df<\infty$. *Тогда для любой функций* $x\in L_2(R)$ *выполняется включение* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(W_\psi x)(a,b)\psi_{a,b}(t)\dfrac{dadb}{a^2}\in L_2(R)$, *и, кроме того, справедлива формула обращения в смысле сходимости в пространстве* $L_2(R)$

$$x(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(W_\psi x)(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2}.$$

Исследование поточечной сходимости обратного интегрального вейвлет-преобразования (3), как правило проводится при дополнительных условиях на базовый вейвлет $\psi$ ([1, 2]). Однако в прикладных исследованиях бывает необходимо использовать вейвлет-функции, удовлетворяющие только условиям определения вейвлета 1-2 при некоторых дополнительных условиях на анализируемую функцию (сигнал) $x(t)$. Установленное ниже утверждение является аналогом соответствующего классического результата для интегрального преобразования Фурье [1, с. 116] и дается в естественных предположениях на функцию $x$.

**Теорема 5.** *Если функция $x \in L_2(R)$ удовлетворяет в некоторой точке $t_0 \in R$ условию Дини, т.е. при некотором $\delta > 0$ интеграл $\int_0^{\delta} \frac{|x(t_0+h)-x(t_0)|}{h} dh < \infty$ конечен, то обратное интегральное вейвлет-преобразование (3) сходится в точке $t_0$ и имеет место равенство*

$$x(t_0) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a,b) \overline{\psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right)} \frac{dadb}{a^2},$$

*где преобразование $W_\psi$ определено формулой (2).*

Доказательство теоремы проводится с использованием условия согласованности (1), аналога равенства Парсеваля (свойство 7) и свойства инвариантности экспоненциальной функции относительно преобразования (1) (см. [6]).

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Фундаментальных исследований Республики Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pinsky M. Introduction to Fourier Analysis and Wavelets. – Brooks/Cole, Pasific Grove, CA, 2002. – 376 p.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.-Ижевск: РХД, 2001. – 463 с.
3. Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O. Volterra Integral Equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. V. 34. – Cambridge-London-New York: Cambridge University Press, 1990. – 684 p.
4. Castro L.P., Duduchava R., Speck F.-O. Singular Integral Equation on Piecewise Curves in Spaces of Smooth Functions. – Basel: Birkhäuser – Oper. Theory, Adv. Appl. – 2002. V. 135. – P. 107-144.
5. Дубровина О.В. Интегральное вейвлет-преобразование для функций с компактным носителем и его свойства// Труды института математики. Минск. – 2004. Т. 12, № 1. – С. 59-63.
6. Дубровина О.В. Поточечная сходимость обратного интегрального вейвлет-преобразования в условиях Дини // Вестник БНТУ – 2006. № 2. – С. 68-72.