Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕОДНОРОДНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Гладков П.А.

By using the asymptotic approach the solution of the Timoschenko-like equations governing the wave processes in the infinitely long elastic cylindrical shell lying on the non-homogeneous visco-elastic foundation has been constructed in the form of the wave packets traveling in the longitudinal direction. The solution represents the superposition of the bending and longitudinal waves.

Введение

Рассматривается задача о распространении осесимметричных локализованных волн в длинной цилиндрической оболочке. В работах [1,2] рассмотрена аналогичная задача для уравнений, основанных гипотезы Кирхгофа-Лява. В настоящей работе в качестве исходных используются уравнения в перемещениях [3] типа Тимошенко, учитывающие поперечные сдвиги.

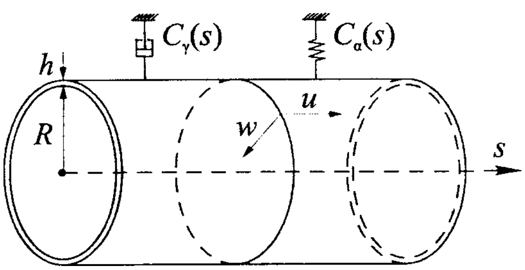

Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

Для построения решения задачи используется комплексная ВКБ-процедура [1,2], позволяющая свести двумерную задачу к последовательности одномерных задач, решение которых строится на подвижной параллели, называемой центром волнового пакета. Упомянутый метод применялся также для изучения бегущих волновых пакетов в прямом волноводе вращения [4], а также в волноводе с произвольным поперечным сечением [5].

1. Постановка задачи

Запишем безразмерную систему уравнений, описывающую осесимметричное движение цилиндрической оболочки типа Тимошенко, лежащей на вязкоупругом основании [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \mu \dfrac{\partial w}{\partial s} - \dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \dfrac{\partial \psi}{\partial s} + \dfrac{2\mu}{1-\mu}\dfrac{\partial u}{\partial s} - \left(\dfrac{2}{1-\mu} - C_\alpha(s)\right) w + C_\gamma(s)\dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - 6\dfrac{1-\mu}{h^2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s} + \psi\right) - \dfrac{1-\mu}{2R^2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь

$$C_\alpha(s) = \frac{2R^2}{1-\mu}\alpha_w(s), \; C_\gamma(s) = \frac{2R}{1-\mu}\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}}\gamma_w(s),$$

$$u = Ru^*, \; w = Rw^*, \; x = Rs, \; t = \sqrt{\frac{2\rho R^2(1+\mu)}{E}}t^*, \tag{1.2}$$

где u^*, w^* – соответственно продольное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, ψ – угол поворота нормали, характеризующий поперечные сдвиги, R – радиус оболочки, x – продольная координата, t^* – время, ρ, E, μ – плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала соответственно, $\alpha_w(s)$, $\gamma_w(s)$ – коэффициенты постели и вязкости Винклеровского неоднородного основания, на котором лежит оболочка.

Предполагается, что C_α, C_γ – непрерывные и бесконечно дифференцируемые по s функции. Более того,

$$\theta,\ \frac{\partial^j\theta}{\partial s^j}\sim 1,\ j=1,2,...\ \text{при}\ \varepsilon\to 0, \tag{1.3}$$

где θ – любая из вышеупомянутых функций. Малый параметр ε введен для изучения семейств коротких волн, бегущих в направлении оси s, с мгновенной частотой $\varepsilon^{-1}\omega(t)$ и длиной волны порядка ε.

2. Пакеты изгибных волн

Рассмотрим изгибные волны, бегущие в продольном направлении. Из асимптотического анализа системы (1.1) следует, что для изгибных волн

$$u\sim\varepsilon,\ w\sim 1,\ \psi\sim\varepsilon\ \text{при}\ \varepsilon\to 0. \tag{2.1}$$

Положим

$$u=\varepsilon u_n,\ w=w_n,\ \psi=\varepsilon\psi_n,\qquad u_n,\ w_n,\ \psi_n\sim 1. \tag{2.2}$$

В соответствии с методом, предложенным в [1,2], решение системы (1.1) будем искать в виде пакета изгибных волн с центром на параллели $s_n=q_n(t)$, которую в дальнейшем будем называть центром волнового пакета (ВП). Перейдем к локальной системе координат, связанной с центром бегущего ВП:

$$s_n=q_n(t)+\varepsilon^{1/2}\xi_n. \tag{2.3}$$

Функции C_α, C_γ вблизи центра ВП раскладываются в ряд Тейлора. Пусть

$$\mathbf{V}_n=\begin{bmatrix}u_n & w_n & \psi_n\end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Решение системы (1.1), с учетом (2.1), (2.2), будем искать в виде [1, 2]

$$\mathbf{V}_n=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}\mathbf{V}_{n.k}\exp\{\mathrm{i}\varepsilon^{-1}S_n(\xi_n,t,\varepsilon)\}, \tag{2.5}$$

$$S_n=\int\omega_n(t)\mathrm{d}t+\varepsilon^{1/2}p_n(t)\xi_n+\tfrac{1}{2}\varepsilon b_n(t)\xi_n^2,\ \operatorname{Im}b_n(t)>0, \tag{2.6}$$

где $\omega_n(t)$ – мгновенная частота колебаний, $p_n(t)$ – волновое число, $\mathbf{V}_{n,k}(\xi_n,t)$ – полиномы аргумента ξ_n с коэффициентами, зависящими от t, а комплексная функция $b_n(t)$ характеризует ширину ВП.

Подстановка (2.2) – (2.6) в уравнение (1.1) приводит к последовательности уравнений

$$\sum_{j=0}^{k}\mathbf{L}_{n.j}\mathbf{V}^T_{n.k-j}=0,\ k=1,2,..., \tag{2.7}$$

где элементы матрицы $\mathbf{L}_{n,0}$ имеют вид

$$l_{11}=-p_n^2+\frac{1-\mu}{2}(\omega_n-\dot q_n p_n)^2,\ l_{12}=-\mu\mathrm{i}p_n,\ l_{22}=-p_n^2+C_\alpha+(\omega_n-\dot q_n p_n)^2,$$

$$l_{32}=-\frac{6R^2(1-\mu)}{h^2}\mathrm{i}p_n,\ l_{33}=-p_n^2+\frac{1-\mu}{2}(\omega_n-\dot q_n p_n)^2,\ l_{13}=l_{21}=l_{23}=l_{31}=0, \tag{2.8}$$

а операторы высших порядков записываются следующим образом:

$$\mathbf{L}_{n,1}=\left(b_n\frac{\partial\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n}+\frac{\partial\mathbf{L}_{n,0}}{\partial q_n}+\dot{p}_n\frac{\partial\mathbf{L}_{n,0}}{\partial\omega_n}\right)\xi_n-\mathrm{i}\frac{\partial\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n}\frac{\partial}{\partial\xi_n}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{L}_{n,2}=\frac{1}{2}\left(b_n^2\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n^2}+2b_n\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n\partial q_n}+\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial q_n^2}+\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial\omega_n^2}+2\dot{p}_n\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial q_n\partial\omega_n}+2\dot{p}_n b_n\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n\partial\omega_n}+\dot{b}_n\frac{\partial\mathbf{L}_{n,0}}{\partial\omega_n}\right)\xi_n^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_n^2}-\mathrm{i}\left(b_n\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n^2}+\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n\partial q_n}+\dot{p}_n\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n\partial\omega_n}\right)\xi_n\frac{\partial}{\partial\xi_n}-\mathrm{i}\frac{\partial\mathbf{L}_{n,0}}{\partial\omega_n}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$-\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}b_n\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n^2}+\frac{1}{2}\dot{\omega}_n\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial\omega_n^2}+\dot{p}_n\frac{\partial^2\mathbf{L}_{n,0}}{\partial p_n\partial\omega_n}+\mathbf{N}_n\right),\ \ldots$$

Элементы матрицы $\mathbf{N}_n$ имеют вид:

$$n_{11}=n_{33}=\frac{1-\mu}{2}\ddot{q}p,\quad n_{22}=\ddot{q}p+C_\gamma(\omega+\dot{q}p),$$

$$n_{12}=n_{13}=n_{21}=n_{23}=n_{31}=n_{32}=0.$$

По аналогии с [1,2] задача в нулевом приближении влечет за собой соотношение

$$\omega_n=\dot{q}_n p_n-H_n^{\pm}(p_n,q_n), \tag{2.10}$$

где

$$H_n^{\pm}(p_n,q_n)=\pm\sqrt{p_n^2-C_\alpha} \tag{2.11}$$

– функция Гамильтона. Знаки ($\pm$) указывают на наличие двух веток решения.

Из условия разрешимости неоднородной системы в первом приближении получаем [1]

$$\dot{q}_n=\partial H_n/\partial p_n,\ \dot{p}_n=-\partial H_n/\partial q_n. \tag{2.12}$$

Условие разрешимости системы во втором приближении дает уравнение Риккати [1]

$$\dot{b}_n+\frac{\partial^2 H_n}{\partial p_n^2}b_n^2+2\frac{\partial^2 H_n}{\partial p_n\partial q_n}b_n+\frac{\partial^2 H_n}{\partial q_n^2}=0 \tag{2.13}$$

и амплитудное уравнение

$$\chi_{n,0}(t)\frac{\partial^2 P_{n,0}}{\partial\xi_n^2}+\chi_{n,1}(t)\xi_n\frac{\partial P_{n,0}}{\partial\xi_n}+\chi_{n,2}\frac{\partial P_{n,0}}{\partial t}+\chi_{n,3}(t)P_{n,0}=0. \tag{2.14}$$

Коэффициенты уравнения (2.14) приведены в [1,2]. Решение уравнения (2.14) может быть построено в виде полинома аргумента ξ_n [2].

3. Пакеты продольных волн

Для продольных волн имеем $u\sim 1$, $w\sim\varepsilon$, $\psi\sim 1$. Пусть

$$u=u_s\sim 1,\ w=\varepsilon w_s,\ \psi=\psi_s\sim 1,\quad \mathbf{V}_s=(u_s,w_s,\psi_s). \tag{3.1}$$

Вектор-функцию $\mathbf{V}_s$ ищем в том же виде (2.5), (2.6) с заменой индекса n на s. Процедура отыскания неизвестных функций, входящих в асимптотическое представление вектора $\mathbf{V}_s$

остается прежней. Отметим изменения, которые касаются формул и уравнений предыдущего пункта. Теперь матрица оператора $\mathbf{L}_{s,0}$ имеет вид

$$l_{11}=-p_s^2+\frac{1-\mu}{2}(\omega_s-\dot{q}_s p_s)^2,\ l_{21}=\frac{2\mu}{1-\mu}\mathrm{i}p_s,\ l_{22}=-p_s^2+C_\alpha+(\omega_s-\dot{q}_s p_s)^2,$$

$$l_{23}=\mathrm{i}p_s,\ l_{33}=-p_s^2+\frac{1-\mu}{2}(\omega_s-\dot{q}_s p_s)^2,\ l_{12}=l_{13}=l_{31}=l_{32}=0. \tag{3.2}$$

Функция Гамильтона упрощается:

$$H_s^{\pm}(p_s,q_s)=\pm\sqrt{\frac{2}{1-\mu}}p_s. \tag{3.3}$$

Уравнение Риккати вырождается и принимает вид $\dot{b}_s=0$, а амплитудное уравнение принимает вид

$$\chi_{s,2}\frac{\partial P_{s,0}}{\partial t}+\chi_{s,3}(t)P_{s,0}=0. \tag{3.4}$$

4. Суперпозиция решений

Найденные выше разложения для изгибных и продольных волн представляют собой положительные ветви конструируемых решений. Для перехода к отрицательным ветвям необходимо знаки, стоящие перед гамильтонианами, сменить на противоположенные. Снабдим все найденные функции в разложении векторов $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}_s$ знаками (+) и (–), отвечающими положительным и отрицательным ветвям решения.

В силу линейности уравнений (1.1) вектор

$$\mathbf{V}=\left[\mathbf{E}_{\varepsilon 1\varepsilon}\left(\mathbf{V}_n^{+}+\mathbf{V}_n^{-}\right)^T+\mathbf{E}_{1\varepsilon 1}\left(\mathbf{V}_s^{+}+\mathbf{V}_s^{-}\right)^T\right]^T,\ \text{где} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{E}_{\varepsilon 1\varepsilon}=\mathrm{diam}\{\varepsilon,1,\varepsilon\},\ \mathbf{E}_{1\varepsilon 1}=\mathrm{diam}\{1,\varepsilon,1\}, \tag{4.2}$$

является формальным асимптотическим решением в главном приближении уравнений (1.1).

5. Пример

Рассмотрим для примера оболочку, лежащую на неоднородном упругом основании с коэффициентом постели (здесь $\gamma_w(s)=0$)

$$\alpha_w(s)=3s^2. \tag{5.1}$$

На рис. 2 изображены результаты численного интегрирования системы Гамильтона для пакета изгибных волн, бегущего в сторону возрастания коэффициента постели основания для трех вариантов граничных условий:

$$p_n(0)=0.8,\ p_n(0)=1.2,\ p_n(0)=1.4;\ q_n(0)=0. \tag{5.2}$$

Первому случаю соответствует штрихпунктирная линия, второму – штриховая, третьему – сплошная линия.

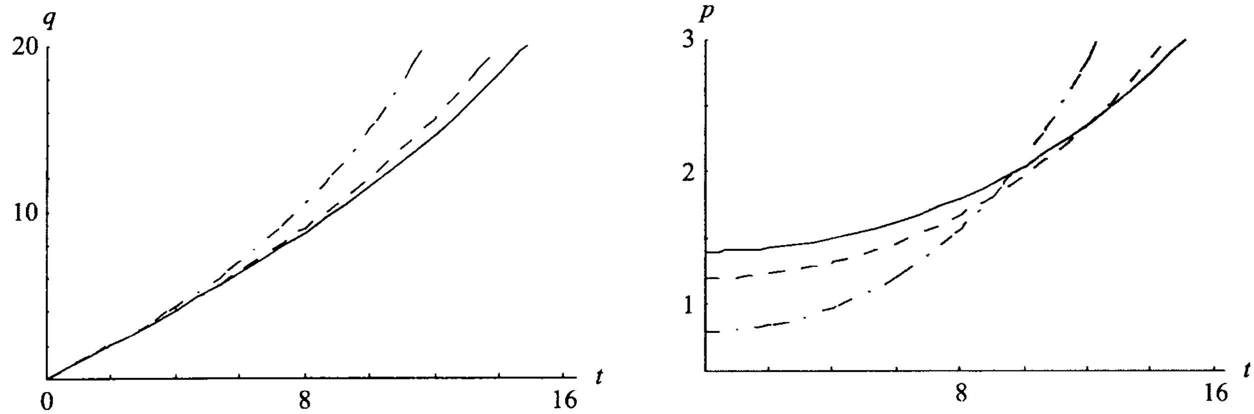

Рис. 2. Графики функций $q_n(t)$ и $p_n(t)$

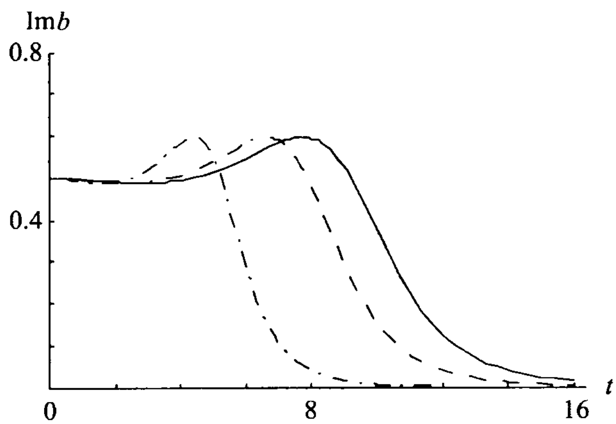

Рис. 3. График функции $\operatorname{Im} b_n(t)$

График функции $b_n(t)$ представлен на рис. 3. Анализ выполненных расчетов показывает, что движение пакета изгибных волн сопровождается ростом волнового параметра $p_n(t)$ и групповой скорости $\dot{q}_n(t)$, а также увеличением ширины пакета, что свидетельствует о его «расползании».

Для продольных волн расчеты упрощаются. Здесь функция $q_s(t)$ линейно возрастает с течением времени, а p_s и b_s являются постоянными величинами, удовлетворяющими начальным условиям.

6. Заключение

В работе построено формальное асимптотическое решение уравнений движения оболочки типа Тимошенко, лежащей на неоднородном Винклеровском основании, в виде суперпозиции осесимметричных пакетов изгибных и продольных волн. Исследовано влияние неоднородности коэффициента постели на динамические характеристики волновых пакетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев Г.И. Локализованные волновые формы движения бесконечной оболочки вращения // Прикл. мат. и мех. – 1996. – Т. 60, №5. – С. 826–834.
2. Михасев Г.И. О волновых формах движения бесконечной цилиндрической оболочки с переменными параметрами // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – Т. 60, №6. – С. 129–137.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости). – М.: Наука, 1976. – 416 с.
4. Mikhasev G.I. Traveling wave packets in a non-homogeneous narrow medium bounded by a surface of revolution // Wave Motion. – 2003. – Vol. 37, No. 3. – P. 207–217.
5. Гладков П.А. Волновые пакеты в упругом волноводе произвольного сечения // Вестник ВГУ – 2005. – Вып. 36. – С. 125–129.