Белорусский государственный университет, Минск
Белорусский национальный технический университет, Минск

УРАВНЕНИЕ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Босяков С.М., Скляр О.Н.

The equation of characteristics for system of the equations of movement cubic anisotropic environment which thermal properties are described by the hyperbolic law of heat conductivity is obtained.

Исследованию закономерностей распространения плоских волн, поверхностей разрывов в изотропных и анизотропных средах, тепловые свойства которых описываются обобщенным (гиперболическим) законом теплопроводности, посвящено достаточно большое количество работ [1 - 3]. В настоящей работе представлены результаты реализации метода характеристик теории дифференциальных уравнений с частными производными [4, 5] применительно к системе уравнений движения термоупругой кубически анизотропной среды с учетом времени релаксации тепловых возмущений.

Разрешающую систему дифференциальных уравнений для термоупругих анизотропных материалов кубической системы симметрии, следуя работе [3], представим в следующем виде:

$$\begin{gathered}\left(A_4\Delta+\left(A_1-A_2-2A_4\right)\partial_i^2\right)u_i+\\+\left(A_2+A_4\right)\partial_i\sum_{k=1}^{3}\partial_k u_k=\rho\partial_t^2u_i+\beta\partial_i T,\\c_\varepsilon\partial_t T+\beta\sum_{k=1}^{3}\partial_t\partial_k u_k=-\sum_{k=1}^{3}\partial_k q_k,\\\tau\partial_t q_i+q_i=-\lambda\partial_i T,\ i=\overline{1,3},\end{gathered}\qquad(1)$$

где u_i - компоненты вектора перемещений, q_i - компоненты вектора теплового потока, T - изменение абсолютной температуры, A_1, A_2, A_4 - константы упругости, $\beta=\left(A_1+2A_2\right)\alpha_T$, α_T – коэффициент линейного теплового расширения, ρ - плотность, c_ε - удельная теплоемкость при постоянной деформации, τ - время релаксации тепловых возмущений, λ - теплопроводность, Δ - оператор Лапласа, $\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_t=\dfrac{\partial}{\partial t}$, $i=\overline{1,3}$.

Начальные условия к системе (1) зададим на поверхности $z\left(x_1,x_2,x_3,t\right)=0$ и перейдем к новым переменным z, z_1, z_2, z_3 по следующей схеме:

$$g=z\left(x_1,x_2,x_3,t\right),\ g_i=z_i\left(x_1,x_2,x_3,t\right),\ i=\overline{1,3}.$$

Тогда

$$u_i\big|_{z=0} = f_i^{(1)}(z_1, z_2, z_3), \left.\frac{\partial u_i}{\partial z}\right|_{z=0} = f_i^{(2)}(z_1, z_2, z_3),$$
$$T\big|_{z=0} = f^{(3)}(z_1, z_2, z_3), q_i\big|_{z=0} = f_i^{(4)}(z_1, z_2, z_3), i = \overline{1,3}. \quad (2)$$

По правилам дифференцирования находим

$$\frac{\partial y}{\partial x_m} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial g_k}\frac{\partial z_k}{\partial x_m}, z_0 \equiv z,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x_l} = \sum_{k,p=0}^{3} \frac{\partial^2 y}{\partial g_k \partial g_p}\frac{\partial z_k}{\partial x_m}\frac{\partial z_p}{\partial x_l} + \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial g_k}\frac{\partial^2 z_k}{\partial x_m \partial x_l}. \quad (3)$$

Здесь y - непрерывная функция от пространственных координат z_1, z_2, z_3 и времени t. Подставим выражения для производных (3) в систему уравнений (1) и выпишем выражения, содержащие частные производные второго порядка g. В результате получим:

$$\left(A_4\delta + (A_1 - A_2 - 2A_4)\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 - \rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial g^2} +$$
$$+ (A_2 + A_4)\frac{\partial z}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_k}{\partial g^2} - \beta\frac{\partial T}{\partial g}\frac{\partial z}{\partial x_i} + \ldots = 0,$$
$$c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial g}\frac{\partial z}{\partial t} + \beta\frac{\partial z}{\partial t}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_k}{\partial g^2} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial x_k}\frac{\partial q_k}{\partial g} + \ldots = 0, \quad (4)$$
$$\tau\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial q_i}{\partial g} + \lambda\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial g} + \ldots = 0, i = \overline{1,3}.$$

Здесь $\delta = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^2$.

Из начальных условий (2) можно найти все частные производные первого и второго порядков, кроме производных по g. Недостающие производные можно определить из семи уравнений системы (4), которые можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно производных $\frac{\partial^2 u_i}{\partial g^2}$ и $\frac{\partial T}{\partial g}, \frac{\partial q_i}{\partial g}, i = \overline{1,3}$. Эти частные производные могут иметь разрывы на поверхности $z(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ только в случае, если выполняется равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при этих производных. После несложных преобразований характеристический определитель представим в следующем виде:

$$\det\left\|w_{ij}\right\|_{7\times 7} = 0, \quad (5)$$

где $w_{ii} = p_i^2 + \left(\delta - p_i^2\right) b - \frac{p_0^2}{c_1^2}$, $w_{ij} = (a+b) p_i p_j$, $w_{i+3,i+3} = n_* p_0$, $w_{i7} = -p_i$,

$w_{i+3,7} = w_{7,i+3} = p_i$, $w_{7i} = \varepsilon p_0 p_i$, $w_{77} = p_0$, $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $p_0 = \frac{\partial z}{\partial t}$, $a = \frac{A_2}{A_1}$, $b = \frac{A_4}{A_1}$,

$c_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\rho}}$ - скорость распространения поперечной волны, $n_* = \tau \omega_*$ - характерное число колебаний, $\omega_* = \frac{c_\varepsilon A_1}{\lambda}$ - характерная величина, имеющая размерность частоты, $\varepsilon = \frac{\beta^2}{A_1 c_\varepsilon}$ - безразмерный коэффициент связанности, $i \neq j = \overline{1,3}$.

Раскрывая определитель (5), получим

$$p_0^2 \left(\frac{k_0 p_0^8}{c_1^8} + \frac{k_1 p_0^6}{c_1^6} + \frac{k_2 p_0^4}{c_1^4} + \frac{k_3 p_0^2}{c_1^2} + k_4 \right) = 0. \tag{6}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$k_0 = -n_*, k_1 = \left(1 + n\left(1 + 2b + \varepsilon\right)\right)\delta,$$

$$k_2 = -\left(1 + b^2 n_* + 2b\left(1 + n_* + \varepsilon n_*\right)\right)\left(p_1^4 + p_2^4 + p_3^4\right) -$$
$$-\left(2 + 2b^2 n_* + b\left(4 - 2(a-1)n_*\right) - (a-1)n_*\left(1 + a + 2\varepsilon\right)\right) \times$$
$$\times \left(p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2\right),$$

$$k_3 = b\left(2 + b\left(1 + n_* + \varepsilon n_*\right)\right)\left(p_1^6 + p_2^6 + p_3^6\right) +$$
$$+\left(4b^3 n_* + 6(a-1)\left(a n_* + \varepsilon n_* - 1\right) + 6b^2\left(a n_* + \varepsilon n_* + 1\right) -\right.$$
$$\left. -(a-1)\left(3 + n_* + 3\varepsilon n_* - 2a^2 n_* + a\left(3 + n_* - 3\varepsilon n_*\right)\right)\right) p_1^2 p_2^2 p_3^2 +$$
$$+\left(1 - a^2\left(1 + b n_*\right) + b^2\left(3 + n_* - \varepsilon n_*\right) - 2ab\left(1 + b n_* + \varepsilon n_*\right) +\right.$$
$$\left. + b\left(4 + n_* + 2\varepsilon n_*\right)\right)\left(p_1^4\left(p_2^2 + p_3^2\right) + p_2^4\left(p_1^2 + p_3^2\right) + p_3^4\left(p_1^2 + p_2^2\right)\right),$$

$$k_4 = -b^2\left(p_1^8 + p_2^8 + p_3^8\right) +$$
$$+(a-1)(1 + a + 2b) b\left(p_1^6\left(p_2^2 + p_3^2\right) + p_2^6\left(p_1^2 + p_3^2\right) + p_3^6\left(p_1^2 + p_2^2\right)\right) +$$
$$+2b\left(a^2 - 1 - b + 2ab\right)\left(p_1^4 p_2^4 + p_1^4 p_3^4 + p_2^4 p_3^4\right) -$$
$$-\left(1 + 2a^3 + 2b + 2ab(b-3) + 2b^2(1 + 2b) + a^2(4b - 3)\right) p_1^2 p_2^2 p_3^2 \delta.$$

Из характеристического уравнения (6) следует существование стационарной поверхности разрыва, а также четырех модифицированных упругих волн, на распространение которых влияет температурное поле. При коэффициенте связанности $\varepsilon = 0$ уравнение (6) описывает распространение трех упругих (квазипродольной и квазипоперечных) волн, а также тепловой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. – Мн.: Навука і тэхніка, 1993. - 279 с.
2. Sharma J. N., Singh H. Propagation of generalized thermoelastic waves in cubic crystals // Arch. Mech. – 1990. – Vol. 42, № 1. – P. 19 – 30.
3. Banarjee D. K., Pao Yih-Hsing. Thermoelastic waves in anisotropic solids // J. Acoust. Soc. Am. 1974. – Vol. 56, No. 5. – P. 1444 - 1454.
4. Курант Ф. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 600 с.
5. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград: Наука, 1980. – 284 с.