

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В СТЕНКЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Веремейчик А.И.

With use of a method of final differences distribution is investigated water temperatures in a wall of the hollow cylinder. The algorithm is developed and the program on the IBM for definition of temperatures in any point of the cylinder is made at the set temperature on internal and external surfaces. Analytically also the specific thermal stream on an external surface is approximately certain. The considered example of the numerical and analytical decision specifies high accuracy of the lead calculations.

Большинство задач теплопроводности сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных, которые, как правило, весьма сложны, получить их решение в виде конечной формулы можно лишь в самых простых случаях. В связи с этим особое значение приобретают методы приближенного решения, в том числе и численные методы (конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов и др.). В методе граничных элементов, например, дифференциальные уравнения (ДУ) заменяются интегральными, которые более удобны для реализации на ЭВМ. Для простых случаев геометрии границы области эффективным является использование метода конечных разностей, в котором дифференциальные уравнения заменяются их конечно-разностными аналогами, благодаря чему исходные ДУ сводятся к системам алгебраических уравнений, в которых неизвестны значения функции (температуры) в узлах сетки, вводимой вместо непрерывной области изменения аргумента (координаты). Хотя число неизвестных в этой системе бывает значительным, решение ее представляет более простую задачу, чем первоначальная, особенно благодаря использованию ЭВМ.

Рассмотрим распространение метода конечных разностей на решение задачи теплопроводности для полого цилиндра. Найдем распределение температурного поля в стенке цилиндра при заданных температурах на внутренней \dot{O}_{R_1} и внешней \dot{O}_{R_2} поверхностях. Запишем одномерное уравнение теплопроводности при наличии внутренних источников тепла:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) + S = 0. \quad (1)$$

Проинтегрируем его по контрольному объему:

$$\int_V \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) dV + \int_V S dV = 0. \quad (2)$$

Величина контрольного объема: $dV = dL \cdot dr \cdot r \cdot d\theta$. В одномерной постановке величины dL и $d\theta$ принимаются равными единице, поэтому исходное интегральное уравнение можно переписать в виде:

$$\int_r \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) r dr + \int_r S r dr = 0. \quad (3)$$

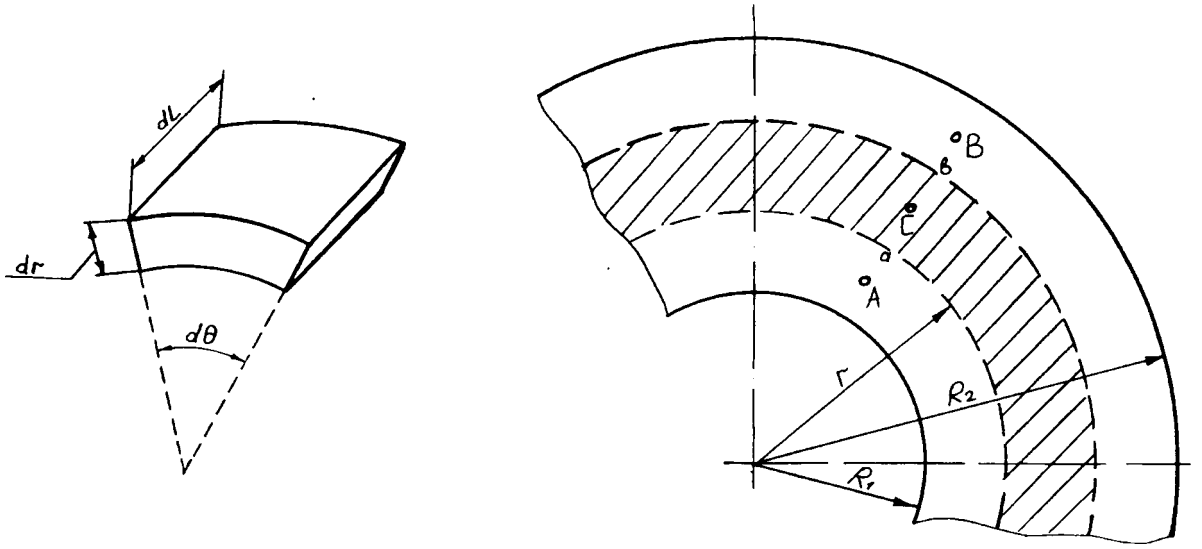


Рис. 1. Контрольная поверхность и контрольный объем.

Установим в качестве пределов интегрирования контрольного объема его границы a и b , т.е. $\int_a^b \frac{d}{dr} \left(r\lambda \frac{dT}{dr} \right) dr + \int_a^b S r dr = 0$. После интегрирования получим:

$$\left(r\lambda \frac{dT}{dr} \right)_b - \left(r\lambda \frac{dT}{dr} \right)_a + \frac{1}{2} \bar{S} (r_b^2 - r_a^2) = 0. \quad (4)$$

Величину \bar{S} , которая представляет собой среднее по объему значение источникового члена, представим в виде постоянной и линейно изменяемой части:

$$\bar{S} = S_0 + S_C T_C. \quad (5)$$

Задавшись линейным профилем распределения температуры между точками A и C , C и B , представим производные в виде следующих конечных разностей:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_b = \frac{T_B - T_C}{\delta r_b}, \quad \left(\frac{dT}{dr} \right)_a = \frac{T_C - T_A}{\delta r_a}. \quad (6)$$

Тогда исходное уравнение можно записать как:

$$\lambda_b r_b \frac{T_B - T_C}{\delta r_b} - \lambda_a r_a \frac{T_C - T_A}{\delta r_a} + \frac{1}{2} (S_0 + S_C T_C) (r_b^2 - r_a^2) = 0, \text{ или, после при-}$$

ведения подобных членов:

$$\left(\frac{\lambda_b r_b}{\delta r_b} - \frac{\lambda_a r_a}{\delta r_a} - \frac{1}{2} S_C (r_b^2 - r_a^2) \right) T_C = \frac{\lambda_b r_b}{\delta r_b} T_B + \frac{\lambda_a r_a}{\delta r_a} T_A + \frac{1}{2} S_0 (r_b^2 - r_a^2). \quad (7)$$

Обозначив:

$$a_B = \frac{\lambda_b r_b}{\delta r_b}, \quad a_A = \frac{\lambda_a r_a}{\delta r_a}, \quad b = \frac{1}{2} S_0 (r_b^2 - r_a^2), \quad a_C = a_A + a_B - \frac{1}{2} S_0 (r_b^2 - r_a^2),$$

получим искомое алгебраическое уравнение, которое является дискретным аналогом дифференциального уравнения теплопроводности (1):

$$a_C \dot{T}_C = a_A T_A + a_B T_B + b. \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда внутренние источники тепла отсутствуют ($S=0$), а коэффициент теплопроводности материала $\lambda = l$. Тогда уравнение (7) примет следующий вид:

$$\left(\frac{r_b}{\delta r_b} + \frac{r_a}{\delta r_a} \right) T_P = \frac{r_b}{\delta r_b} T_B + \frac{r_a}{\delta r_a} T_A. \quad (9)$$

Разобьем контрольную область на n контрольных объемов. Отметим только, что границы контрольных объемов находятся посередине между узлами конечно-разностной сетки.

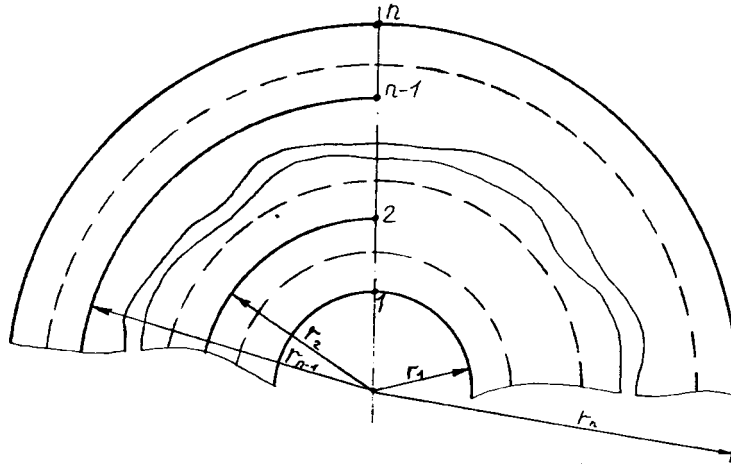


Рис. 2. Расчетная схема.

Поскольку $r_n = R_2$, а $r_1 = R_1$, то шаг между узлами сетки равен:

$$\Delta r = \frac{r_n - r_1}{n - 1} = \frac{R_2 - R_1}{n - 1}.$$

Величина радиуса узла № 2: $r_2 = r_1 + \Delta r = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{n - 1} = \frac{R_2 + R_1(n - 2)}{n - 1}$,

для узла № 3: $r_3 = r_2 + \Delta r = \frac{R_2 + R_1(n - 2)}{n - 1} + \frac{R_2 - R_1}{n - 1} = \frac{2R_2 + R_1(n - 3)}{n - 1}$,

для i -го узла:

$$r_i = r_{i-1} + \Delta r = \frac{(i - 1)R_2 + (n - i)R_1}{n - 1}, \quad i \leq n. \quad (10)$$

Для i -го узла сетки уравнение (9) может быть записано в виде:

$$\left(\frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)} + \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} \right) T_i = \frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)} T_{i+1} + \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} T_{i-1}, \quad (11)$$

где $\frac{r_b}{\delta r_b} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)}$, $\frac{r_a}{\delta r_a} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})}$.

Обозначив коэффициенты:

$$a_i = \frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)} + \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})}, \quad b_i = \frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)}, \quad c_i = \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})}, \quad (12)$$

получим уравнение в следующем виде:

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1}. \quad (13)$$

Таким образом, можно получить систему $(n-2)$ алгебраических уравнений, которая будет содержать n значений температур в соответствующих узлах сетки. Т.к. $T_1 = T_{R_1}, T_n = T_{R_2}$ известны из граничных условий, то могут быть определены искомые значения температур T_2, T_3, \dots, T_{n-1} в узлах.

На основании предложенной методики с использованием языка программирования Visual Basic разработана специальная программа, позволяющая проводить расчет температур в произвольной точке цилиндра. Пользователю необходимо лишь для заданной числом узлов n точности ввести размеры цилиндра и температуры на наружной и внутренней поверхностях. Диалоговое окно программы представлено на рис.3.

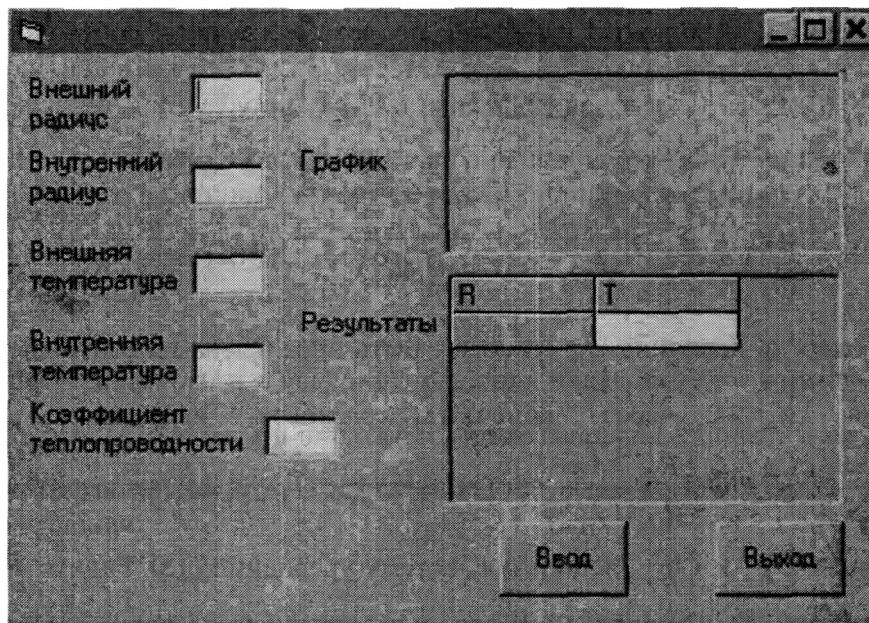


Рис. 3.- Диалоговое окно программы.

Разработанная программа позволяет получать график зависимости температуры от координаты по толщине стенки.

Полученные результаты сравнивались с результатами аналитического решения. Точное решение получается путем двойного интегрирования дифференциального уравнения (1), которое при $S=0$ и $\lambda = 1$ принимает вид:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad (14)$$

После двойного интегрирования получаем решение: $T = C_1 \ln r + C_2$. Для нахождения постоянных интегрирования C_1 и C_2 применим граничные условия: при $r = R_1: T = T_{R_1}$, $r = R_2: T = T_{R_2}$. Отсюда находим: $C_1 = \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$, и уравнение температурного поля примет вид:

$$T = T_{R_1} + \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}. \quad (15)$$

Уравнение (15) позволяет аналитически определять температуру в любой точке цилиндра в зависимости от координаты.

Определим далее тепловые потери и покажем, что тепловой баланс соответствует тепловому балансу точного решения.

Поскольку количество теплоты Q , покидающее внешнюю поверхность контрольного объема вокруг точки $n-1$, равно количеству теплоты, проходящему через наружную поверхность цилиндра, то $Q = q_{R_2} F_{R_2} = q_{n-1} F_{n-1}$, где q_{R_2} - плотность теплового потока на внешней поверхности цилиндра радиусом R_2 , q_{n-1} - плотность теплового потока на внешней поверхности контрольного объема, построенного вокруг точки $n-1$, радиусом $\frac{r_{n-1} + r_n}{2}$. Поэтому

$$q_{R_2} = q_{n-1} \frac{F_{n-1}}{F_{R_2}} = \frac{2\pi l \frac{r_{n-1} + R_2}{2}}{2\pi l R_2} q_{n-1} = \frac{r_{n-1} + R_2}{2R_2} q_{n-1}. \quad (16)$$

В свою очередь величина q_{n-1} может быть определена из соотношения $q = -\lambda \frac{dT}{dr}$, которое при $\lambda = 1$ через конечные разности приводится к выражению: $q_{n-1} = -\frac{T_n - T_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} = -\frac{T_{R_2} - T_{n-1}}{R_2 - r_{n-1}}$. Температуру T_{n-1} можно выразить через температуры на границах \dot{O}_{R_1} и \dot{O}_{R_2} , используя систему уравнений (13). Радиус R_{n-1} определяется через внутренний R_1 и наружный R_2 радиусы цилиндра по формуле (10). Таким образом, через размеры цилиндра и граничные значения температур можно получить зависимость теплового потока q_{R_2} , а затем из соотношения $Q = 2\pi R_2 l q_{R_2}$ и количество теплоты Q , проходящее через наружную поверхность.

Аналогичные зависимости можно получить аналитически. Для этого величину Q можно найти из выражения:

$$Q = -2\pi r l \cdot \lambda \frac{dT}{dr}. \quad (17)$$

Дифференцируя выражение (13) по координате, находим:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{r}. \quad (18)$$

Подставим (18) в (17):

$$Q = -2\pi l \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = 2\pi l \frac{T_{R_1} - T_{R_2}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (19)$$

Численный пример. Рассмотрим решение задачи на примере грубой конечно-разностной сетки, т.е. для 5 контрольных объемов. Примем также $R_2=50$ см, $R_1=10$ см. Шаг сетки $\Delta r = 10$ см, радиусы улов 2, 3 и 4 равны соответственно 20, 30 и 40 см. Определив коэффициенты $a_i, b_i, c_i, i=2...4$, представим систему уравнений (13) в следующем виде:

$$\begin{aligned} 4T_2 - 2,5T_3 - 1,5T_1 &= 0; \\ 6T_3 - 3,5T_4 - 2,5T_2 &= 0; \\ 8T_4 - 4,5T_5 - 3,5T_3 &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $T_1 = T_{R_1}$, $T_5 = T_{R_2}$, определим искомые величины T_2, T_3 и T_4 :

$$\begin{aligned} T_2 &= 0,577T_{R_1} + 0,423T_{R_2}; \\ T_3 &= 0,323T_{R_1} + 0,677T_{R_2}; \\ T_4 &= 0,142T_{R_1} + 0,858T_{R_2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Определим с использованием аналитического решения значение температуры в узле 3 радиусом 30 см. Для этого подставим исходные данные примера в формулу (19):

$$T = T_{R_1} + \frac{T_{R_2} - T_{R_1}}{\ln \frac{50}{10}} \ln \frac{30}{10} = 0,317T_{R_1} + 0,683T_{R_2}.$$

Сравнение аналитического и численного решения показывает их хорошее совпадение. Например, при $T_{R_1} = 100^\circ\text{C}$ и $T_{R_2} = 200^\circ\text{C}$ относительная ошибка в определении T_2 составляет 0,4 %. Приведенный ниже график более наглядно демонстрирует высокую точность численного решения.

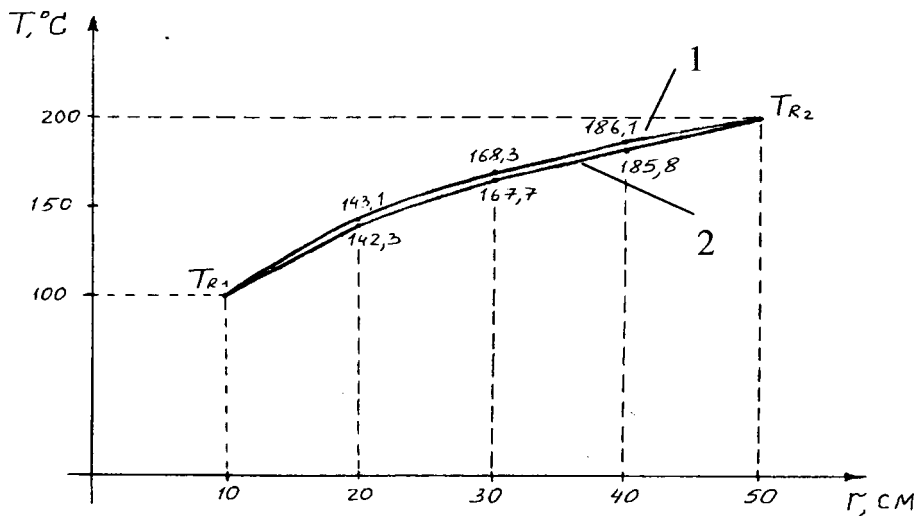


Рис. 4. График зависимости температуры от координаты:
1 — аналитическое решение;
2 — решение с помощью метода конечных разностей.

Определим на данном примере удельный тепловой поток на внешней поверхности.

Сначала находим плотность теплового потока q_{R_1} : $q_{R_2} = \frac{r_4 + R_2}{2R_2} q_4$, где

$q_4 = -\frac{T_{R_2} - T_4}{R_2 - r_4}$. Выражая T_4 через \dot{Q}_{R_1} и \dot{Q}_{R_2} из соотношения (20), находим:

$$q_{R_2} = -\frac{r_4 + R_2}{2R_2} \cdot \frac{0,142 \cdot (T_{R_2} - T_{R_1})}{R_2 - r_4} = \frac{40 + 50}{2 \cdot 50} \cdot \frac{0,142 \cdot (T_{R_1} - T_{R_2})}{50 - 40} = 0,0128 \cdot (T_{R_1} - T_{R_2})$$

Тогда количество теплоты Q , проходящее через наружную поверхность цилиндра:

$$Q = 2\pi R_2 l q_{R_2} = 2\pi l \cdot 0,640 (T_{R_1} - T_{R_2}). \quad (21)$$

Учитывая (19), находим величину Q аналитически:

$$Q = 2\pi l \frac{T_{R_1} - T_{R_2}}{\ln \frac{50}{10}} = 2\pi l \cdot 0,621 (T_{R_1} - T_{R_2}). \quad (22)$$

Величина относительной ошибки в определении тепловых потерь не превышает 3 %, поэтому общий тепловой баланс приближенного решения достаточно соответствует точному результату.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967 г.
2. Теория тепломассообмена. / Под ред. А.И.Леонтьева. - М.: Высшая школа, 1979. - 495 с.
3. Б.Н. Юдаев. Теплопередача. - М.: Высшая школа, 1981. - 319 с.
4. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. Коздоба Л.А. - М.: Наука.- 1975 г.