Морская государственная академия им. адм. Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск.

ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ БУССИНЕСКА В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Ершов В.И.

This work contains development of solution of the problems of theory of elasticity in curvilinear coordinates for displacement. For accurate solution of system of differential equations it is necessary to receive all equations for the same system for Euler's coordinates.

Развиваются основные положения работы автора [1] на примере определения перемещений в задаче Буссинеска в переменных Эйлера.

Задачи Фламана и Буссинеска, содержащие бесконечность в постановочной части, не могут быть решены исчерпывающим образом в принципе. Предлагается решение системы дифференциальных уравнений этой задачи в однородном базисе Эйлера в предположении, что бесконечное полупространство заменяется полупространством большого радиуса R=H. При формировании уравнений в задачах механики деформируемого твердого тела следует выполнить два важнейших требования:

1. Все выражения должны быть записаны для деформированного состояния в рассматриваемой точке(в любых системах координат и в любых системах отсчета).

2. Все члены системы уравнений следует перевести в однородный базис.

Такой подход есть естественный и необходимый этап познания задач МДТТ. Основная сложность задачи состоит в том, что геометрические соотношения записаны в переменных Лагранжа (вывод сделан для деформированного состояния в переменных Лагранжа), а формулы для напряжений – в переменных Эйлера (постоянная, входящая в выражения для напряжений, тоже должна определяться для деформированного состояния; в противном случае получим непреодолимое методологическое противоречие: деформации получены для деформируемого тела, а напряжения – для абсолютно жесткого), что требует при формировании исходных дифференциальных уравнений перехода к однородному базису. Необходимо все дифференциальные уравнения представить в переменных Эйлера с учетом теоремы об изменении первой производной по криволинейной координате при переходе от переменных Лагранжа к переменным Эйлера.

Выражения для компонент тензора деформаций в сферических координатах:

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R};$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_R}{R} + ctg\theta\frac{u_\theta}{R};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{R};$$

$$\varepsilon_{R\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{R} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R}\right);$$

$$\varepsilon_{R\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R}\right);$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi}{R}ctg\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right).$$

Формулы для напряжений, полученные Буссинеском, имеют вид:

$\sigma r = (P/2\pi \check{R}^2)[1-2\mu-(4-2\mu)\cdot\cos\theta]$;
$\sigma_\theta = (1-2\mu)\ (P/2\pi \check{R}^2)\cos^2\theta\ /\ (1+\cos\theta)$;
$\sigma_\varphi = (1-2\mu)(P/2\pi\ \check{R}^2)(\cos\theta-\sin^2\theta)/(1+\cos\theta)$;
$\sigma_{R\,\theta} = (1-2\mu)(P/2\pi \check{R}^2)\sin\theta\cdot\cos\theta\ /\ (1+\cos\theta)$;
$\sigma_{R\,\theta}=0; \sigma_{\varphi\,\theta}=0.$

Где $\check{R}$-переменная Эйлера (далее символ «тильда» опущен).
В силу осевой симметрии для перемещений имеем:

$u_\varphi=0;\ u_R = u_R(R,\theta);\ u_\theta = u_\theta(R,\theta).$

Тогда в однородном базисе для переменных Эйлера, принимая при малых перемещениях связь между производными по криволинейной координате в переменных Эйлера и в переменных Лагранжа в соответствии с работой [1]

$$\partial\, U\theta\ (S+U\theta)/\partial S = \partial U(S)/\partial S + U\theta/R,$$

$$\partial\, U_R\ (S+U\theta)/\partial S = \partial U_R(S)/\partial S + U\theta/R,$$

где криволинейная координата $S=\theta R$, будем иметь:

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R}; \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_R}{R} + ctg\,\theta\frac{u_\theta}{R}; \qquad (2)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{R} + \frac{u_R}{R}; \qquad (3)$$

$$\gamma_{R\theta} = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\theta} - 2\frac{u_\theta}{R} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R}\right); \qquad (4)$$

Определяя деформации в соответствии с обобщенным законом Гука., будем иметь после интегрирования геометрического уравнения (1):

$$u_R = -\frac{P}{2E\pi R}\left[1-2\mu-(4-2\mu)\cos\theta-\mu(1-2\mu)\frac{\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\right]+F(\theta).$$

В соответствии с принятой расчетной схемой функция определяется из того условия, что при R=H радиальные перемещения для всех точек отсутствуют:

$$u_R(R=H)=0$$

Пользуясь этим условием, получим выражение для функции $F(\theta)$:

$$F(\theta) = \frac{P}{2E\pi H}\left[1-2\mu-(4-2\mu)\cos\theta-\mu(1-2\mu)\frac{\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\right].$$

С учетом полученного результата окончательно имеем следующее выражения для функции радиальных перемещений:

$$u_R = \frac{P}{2E\pi}\left[1-2\mu-(4-2\mu)\cos\theta-\mu(1-2\mu)\frac{\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\right]\frac{R-H}{RH}.$$

Исключаем из уравнений (2), (3) функцию радиальных перемещений u_R:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+(-1-ctg\,\theta)\frac{u_\theta}{R}=\varepsilon_{\theta\theta}-\varepsilon_{\varphi\varphi} \qquad (5)$$

Правая часть имеет вид:

$$\varepsilon_{\theta\theta}\text{-}\varepsilon_{\varphi\varphi}=(1+\mu)(1\text{-}2\mu)\ (P/2\pi R^2\ E)(1\text{-}\cos\theta)/\ (1+\cos\theta).$$

Подставляя полученную разность линейных деформаций в уравнение (5), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+P(\theta)u_\theta=Q(\theta).$$

Для правой части в этом уравнении принято следующее выражение:

$$Q(\theta)=R(\varepsilon_{\theta\theta}\text{-}\varepsilon_{\varphi\varphi})=\_(1+\mu)(1\text{-}2\mu)\ (P/2\pi RE)(1\text{-}\cos\theta)/\ (1+\cos\theta).$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2},$$

можем записать удобное в дальнейшем выражение:

$$Q(\theta)=R(\varepsilon_{\theta\theta}\text{-}\varepsilon_{\varphi\varphi})=\_(1+\mu)(1\text{-}2\mu)\ (P/2\pi RE)\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$u_\theta(\theta)=\left[\int d\theta\ Q(\theta)e^{\int P(\theta)d\theta}+C_1\right]e^{-\int P(\theta)d\theta}$$

Найдем интегралы, зависящие от функции

$$P(\theta).=-1\text{-ctg}\theta:$$

$$\int P(\theta)d\theta=-\int(1+ctg\theta)d\theta=-\theta-\ln\sin\theta,$$

$$\int -P(\theta)d\theta=\int(1+ctg\theta)d\theta=\theta+\ln\sin\theta.$$

Определяем соответствующие экспоненты:

$$e^{P(\theta)d\theta}=e^{-\theta-\ln\sin\theta}=\frac{e^{-\theta}}{e^{\ln\sin\theta}}=\frac{e^{-\theta}}{\sin\theta};$$

$$e^{-P(\theta)d\theta}=e^{\theta+\ln\sin\theta}=e^{\ \theta}\ \sin\theta.$$

Тогда решение будем искать в таком виде:

$$u_\theta(\theta)=\left[\int d\theta\ Q(\theta)\frac{e^{-\theta}}{\sin\theta}+C_1\right]e^{\theta}\sin\theta$$

Вычислим интеграл, играющий исключительную роль при записи искомого решения:

$$I_4(\theta)=e^{\theta}\int e^{-\theta}\frac{\sin\ \theta}{(1+\cos\theta)^2}d\theta. \qquad (6)$$

Многократно используя процедуру интегрирования по частям, каждый раз, принимая в качестве функции $U = e^{-\theta}$ и $dU = -e^{-\theta}\,d\theta$, за пределами интеграла будем иметь равное единице произведение функции e^{θ} на функцию $e^{-\theta}$, которое сразу же опустим.

В первой попытке принимаем:

$$dV = \frac{\sin\,\theta}{(1+\cos\theta)^2}d\theta;$$

$$V = \frac{1}{(1+\cos\theta)}.$$

Тогда

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1+\cos\theta} - e^{\theta}\int -e^{-\theta}\frac{1}{1+\cos\theta}d\theta.$$

Во второй попытке принимаем

$$dV = \frac{1}{1+\cos\theta}d\theta;$$

$$V = tg\frac{\theta}{2}.$$

Искомый интеграл примет следующий вид:

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1+\cos\theta} + tg\frac{\theta}{2} - e^{\theta}\int -e^{-\theta}tg\frac{\theta}{2}d\theta.$$

В третьей попытке:

$$dV = tg\frac{\theta}{2}d\theta;$$

$$V = -2\ln\cos\frac{\theta}{2};$$

$$I_4(\theta) = \frac{1}{1+\cos\theta} + tg\frac{\theta}{2} - 2\ln\cos\frac{\theta}{2} - e^{\theta}\int -e^{-\theta}\left(-2\ln\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta.$$

Четвертая попытка:

$$dV = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}d\theta.$$

Осуществим замену переменной:

$\theta/2 = x$; $d\theta = 2dx$; $dV = -4\ln\cos x dx$.

Воспользуемся табличным интегралом, предполагающим использование функциональных рядов:

$$\int \ln\cos x = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \cdots - \frac{2^{2n-1}\left(2^{2n}-1\right)B_n}{n\ (2n+1)!}x^{2n+1} - \cdots - *.,$$

где: -числа натурального ряда; B_n –первые числа Бернулли.

Возвращаясь к переменной θ, будем иметь:

$$V = -2\int \ln\cos\frac{\theta}{2}d\theta = -4\left[-\frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^3}{6} - \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^5}{60} - \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^7}{315} - \ldots - \frac{2^{2n-1}\left(2^{2n}-1\right)B_n}{n(2n+1)!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1} - \ldots - *\right] \quad (7)$$

Искомый вспомогательный интеграл имеет вид:

$$I_4(\theta)=\frac{1}{1+\cos\theta}+tg\frac{\theta}{2}-2\ln\cos\frac{\theta}{2}\ -4\left[\sum_{n=1}\ -\frac{2^{2n-1}\left(2^{2n}-1\right)B_n}{n(2n+1)!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1}\right]+$$

$$+e^{\theta}\int e^{-\theta}\{\ -4\left[\sum_{n=1}\ -\frac{2^{2n-1}\left(2^{2n}-1\right)B_n}{n(2n+1)!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1}\right]\}d\theta .$$

В этом интеграле присутствует функциональный ряд, что позволяет вычислить интеграл при любом n с использованием процедуры интегрирования по частям, но в этом случае роль функции V всегда будет играть функция $e^{-\theta}$. Это означает, что в искомом решении функциональный ряд в четвертой попытке будет умножаться на ($+e^{-\theta}$), а в пятой- на ($-e^{-\theta}$). После суммирования функциональный ряд удаляется из решения, а под знаком интеграла останется его производная:

$$I_4(\theta)=\frac{1}{1+\cos\theta}+tg\frac{\theta}{2}-2\ln\cos\frac{\theta}{2}\ +e^{\theta}\int e^{-\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{-4\left[\sum_{n=1}-\frac{2^{2n-1}\left(2^{2n}-1\right)B_n}{n(2n+1)\ !}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1}\right]\right\}d\theta .$$

Окончательный вид вспомогательного интеграла:

$$I_4(\theta)=\frac{1}{1+\cos\theta}+tg\frac{\theta}{2}-2\ln\cos\frac{\theta}{2}\ +e^{\theta}\int e^{-\theta}\left\{-2\left[\sum_{n=1}-\frac{2^{2n-1}\left(2^{2n}-1\right)B_n}{n(2n)\ !}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n}\right]\right\}d\theta \qquad (8)$$

Задача существенно упрощается, если принять во внимание, что область определения искомых функций перемещений для переменной θ лежит в таких пределах:

$$0\le\theta\ \le\pi/2.$$

Это означает , что в функциональном ряду в нечетную степень возводится величина, меньшая $\pi/4$, и потому второй член составляет от первого меньше 5%, а третий от первого- гораздо меньше одного процента. Рассмотрим частный случай, сохраняя в (7) первый член функционального ряда в выражении для вспомогательного интеграла:

$$I_4(\theta)=\frac{1}{1+\cos\theta}+tg\frac{\theta}{2}-2\ln\cos\frac{\theta}{2}\ -\frac{2}{3}\left(-\frac{\theta}{2}\right)^3+e^{\theta}\int e^{-\theta}[\ -\frac{2}{3}\left(-\frac{\theta}{2}\right)^3\ ]d\theta .$$

В пятой попытке интегрирования по частям имеем:

$$dU=e^{-\theta}d\theta;$$
$$U=-e^{-\theta};$$
$$V=\frac{\theta^3}{12};$$
$$dV=\frac{\vartheta^2}{4}.$$

$$I_4(\theta)=\frac{1}{1+\cos\theta}+tg\frac{\theta}{2}-2\ln\cos\frac{\theta}{2}\ -\frac{2}{3}\left(-\frac{\theta}{2}\right)^3-\frac{\theta^3}{12}+e^{\theta}\int e^{-\theta}\frac{\theta^2}{4}d\theta . \qquad (9)$$

Последний интеграл является табличным. Окончательно для рассматриваемого частного случая получим:

$$I_4(\theta)=\frac{1}{1+\cos\theta}+tg\frac{\theta}{2}-2\ln\cos\frac{\theta}{2}\ +\frac{1}{4}\left(-\theta^2-2\theta-2\right).$$

Непосредственные вычисления по (8) сразу приводят к табличному интегралу:

$$I_4(\theta)=\frac{1}{1+\cos\theta}+tg\frac{\theta}{2}-2\ln\cos\frac{\theta}{2}\ +e^{\theta}\int e^{-\theta}\frac{\theta^2}{4}d\theta$$

Решение для функции меридиональных перемещений:

$$u_\theta=(1+\mu)(1\text{-}2\mu)\ (P/2\pi RE)[I_4(\theta)\sin\theta+C_1e^\theta\sin\theta]. \qquad (10)$$

Функция.C_1 переменной R может быть найдена из дифференциального уравнения для деформации сдвига , которое после подстановки в него u_R , u_θ примет вид:

$$\frac{dC_1}{dR}-2\frac{1}{R}C_1=\Phi(\mathrm{R},\theta)\,; \qquad (11)$$

$$P(R)=-2\,/\,R.;$$

$$\Phi(\mathrm{R},\theta)=\frac{Pe^{-\theta}}{\pi ER^2}\left[(1+\mu)(1-2\mu)\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}+\frac{3(1-2\mu)}{2}I_4(\theta)+2\left(1-\mu^2\right)\right]-\frac{2Pe^{-\theta}}{\pi ER}\frac{1-\mu^2}{H}.$$

Вновь полученное линейное дифференциальное уравнение имеет следующий интеграл (рассматриваются уравнения в частных производных и поэтому переменная θ не указана):

$$C_1(R)=\left[\int dR\ \Phi(R)e^{\int P(R)dR}+C_2\right]e^{-\int P(R)dR}$$

Находим показатели степени и показательные функции:

$$\int P(R)dR=\int-\frac{2}{R}dR=-2\ln R=\ln R^{-2};\ e^{\int P(R)dR}=\frac{1}{R^2};$$

$$\int-P(R)dR=\int\frac{2}{R}dR=2\ln R=\ln R^2;\ e^{\int -P(R)dR}=R^2.$$

С учетом полученных результатов решение ищем в таком виде:

$$C_1(R)=\left[\int\ \Phi(R)\frac{1}{R^2}dR+C_2\right]R^2$$

Для меридиональных перемещений будем иметь:

$$u_\theta=(1-2\mu)\frac{P}{2\pi ER}I_4(\theta)\sin\theta-\frac{P}{3\pi ER}\left[(1+\mu)(1-2\mu)\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}+\frac{3(1-2\mu)}{2}I_4(\theta)+2\left(1-\mu^2\right)\right]\sin\theta+$$

$$+\frac{P}{\pi E}\frac{1-\mu^2}{H}\sin\theta+C_2R^2\sin\theta e^\theta\ .$$

Постоянную C_2 определяем из условия
$u_\theta(R=H,\ \theta=\pi/2)=0$:

$$C_2=\frac{2Pe^{\pi/2}}{\pi EH^3}\left[\left(1-\mu^2\right)-(1-2\mu)I_4(\theta=\pi/2)\right]$$

Для точек горизонтальной поверхности получим:

$$u_\theta(\theta=\pi/2)=(1-2\mu)\frac{P}{2\pi ER}I_4(\theta=\pi/2)-\frac{P}{3\pi ER}\left[\frac{3(1-2\mu)}{2}I_4(\theta=\pi/2)+2\left(1-\mu^2\right)\right]+$$

$$+\frac{P}{\pi E}\frac{1-\mu^2}{H}+C_2R^2e^{\pi/2}. \qquad (12)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов В.И. Формирование и решение системы дифференциальных уравнений в задаче Фламана в однородном базисе. // Теоретическая и прикладная механика. Межведомственный сборник научно-методических статей.–2006.- №20.–С. 131-133.