Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны НАН Беларуси

ИЗГИБ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Куликов И.С.

Использование потоков заряженных частиц в разнообразных процессах металлургии и обработки материалов ставит проблемы, связанные с теплофизическими, механическими и химическими явлениями, происходящими в телах [1-5]. При изучении этих проблем на первом этапе решается тепловая задача, затем при известном температурном поле рассчитываются механические и химические характеристики. Одновременно при воздействии пучка заряженных частиц высокой энергии на тела возникает высокое импульсное давление, которое в значительной степени их деформирует. Если таким телом является тонкая пластинка, то воздействие потока заряженных частиц может привести к ее изгибу, возникновению значительных изгибных напряжений и деформаций с последующим разрушением.

Предположим, что давление $q(x,y,t)=L(\phi,t)f(x,y)$, возникающее на поверхности тонкой прямоугольной пластины при воздействии на нее импульсного пучка заряженных частиц, известно и определяется на основе имеющихся эмпирических зависимостей, полученных в результате физических экспериментов. Тогда изгиб тонкой пластины, вызванный импульсным воздействием, описывается следующим уравнением:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)-q(x,y,t)=-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где w – прогиб пластины;

ρ – плотность материала пластины;

h – толщина пластины;

$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость;

E – модуль упругости материала пластины;

ν – коэффициент Пуассона;

t – время;

ϕ – поток заряженных частиц.

Возникающие в пластине деформации и напряжения имеют вид:

$$\varepsilon_{xx}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\qquad \varepsilon_{yy}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\qquad \varepsilon_{xy}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{2}$$

$$\sigma_{xx}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y);\qquad \sigma_{yy}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x);\qquad \sigma_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy}.$$

Начальные условия примем следующими

$$w=0,\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=0 \qquad \text{при } t=0 \tag{3}$$

Граничные условия запишем для двух вариантов закрепления пластины:
1 вариант – жесткое закрепление

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } x = 0, a \qquad (4)$$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = 0, b$$

2-й вариант – свободное закрепление

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{при } x = 0, a \qquad (5)$$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{при } y = 0, b$$

Если при решении задачи учитываются неупругие деформации, вызванные нагревом и облучением, уравнение (1) будет иметь вид [6]

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - \left(\frac{\partial^2 M_{11H}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12H}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22H}}{\partial y^2}\right) - q(x, y, t) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (6)$$

где

$$M_{11H} = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E(T, \phi, t)\left(\varepsilon_x^H + \nu \varepsilon_y^H\right) Z dZ,$$

$$M_{22H} = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E(T, \phi, t)\left(\varepsilon_y^H + \nu \varepsilon_x^H\right) Z dZ,$$

$$M_{12H} = \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} E(T, \phi, t) \varepsilon_{xy}^H Z dZ,$$

$T(x, y, t)$ - температурное поле в пластинке, ϕ - поток заряженных частиц, t – время,

ε_{xx}^H, ε_{yy}^H, ε_{xy}^H - неупругие деформации (термическое расширение, пластичность, ползучесть),

$$\varepsilon_{sk}^H = \varepsilon_{sk}^T + \varepsilon_{sk}^P + \varepsilon_{sk}^C,$$

где $s, k = x, y$,
ε_{sk}^T - деформация термического расширения,
ε_{sk}^P - мгновенные пластические деформации,
ε_{sk}^C - деформации ползучести.

Деформации термического расширения при известном поле температур T(x,y,t) определяются как

$$\varepsilon^T_{xx} = \varepsilon^T_{yy} = \alpha T(x,y,t) \tag{7}$$

$$\varepsilon^T_{xy} = 0 .$$

Для определения мгновенных пластических деформаций используем теорию течения, согласно которой приращения пластической деформации $d\varepsilon^P_{sk}$ имеют вид

$$d\varepsilon^P_{sk} = S_{sk} d\chi , \tag{8}$$

где $S_{sk} = \sigma_{sk} - \delta_{sk}\sigma$ - компоненты девиатора напряжений, $\sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)$ - компонента шарового тензора напряжений, σ_{sk} - компоненты тензора напряжений ($s,k = x,y$).

$$d\chi = F_\sigma(\sigma_u, T, \phi, t) d\sigma_u + F_T(\sigma_u, T, \phi, t) dT + F_\Phi(\sigma_u, T, \phi, t) d\Phi \tag{9}$$

С учетом (8) получим

$$d\varepsilon^P_{sk} = \left[F_\sigma d\sigma_u + F_T dT + F_\Phi d\Phi\right] S_{sk}$$

Здесь

$F_\sigma = \dfrac{3}{2\sigma_u}\left(\dfrac{1}{E_k} - \dfrac{1}{E}\right)$ - силовая функция пластичности,

$F_T = \dfrac{3}{2\sigma_u}\left(\beta + \dfrac{\sigma_u}{E^2}\dfrac{dE}{dT}\right)$ - тепловая функция пластичности,

$F_\Phi = \dfrac{3}{2\sigma_u} J$ - радиационная функция пластичности,

$\Phi = \phi t$ - флюенс заряженных частиц,

$\sigma_u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \sigma^2_{xx} + \sigma^2_{yy} + 6\sigma^2_{xy}}$ - интенсивность напряжений;

$E_k(\sigma_u, T, \phi, t)$ - касательный модуль материала пластины;

$\beta(\sigma_u, T, \phi, t)$ - коэффициент температурной податливости материала пластины;

$J(\sigma_u, T, \phi, t)$ - коэффициент радиационной податливости материала пластины.

Для определения деформации ползучести предполагаем, что

$$\dot{\varepsilon}^c_u = f(\sigma_u, T, \phi, t) ,$$

где $\dot{\varepsilon}^c_u = \sqrt{\dfrac{2}{3}\dot{\varepsilon}^c_{sk}\dot{\varepsilon}^c_{sk}}$ - интенсивность скоростей деформаций ползучести.

$$d\varepsilon_{sk}^{c} = \dot{\varepsilon}_{sk} dt$$

$$\dot{\varepsilon}_{sk}^{c} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{u}^{c}}{\sigma_{u}} S_{sk} \tag{10}$$

Рассмотрим численное решение задачи, используя метод конечных разностей.
Разделим уравнение (6) на $-\rho h$.
Тогда получим

$$C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f,$$

где $C_1 = -\frac{D}{\rho h}$, $\quad f = -\frac{q(x,y,t)}{\rho h} - 2C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{1}{\rho h}\left(\frac{\partial^2 M_{11H}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12H}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22H}}{\partial y^2} \right).$

Введем в области 0≤x≤a, 0≤y≤b, t≥0 равномерную по каждой переменной сетку (рис 1)

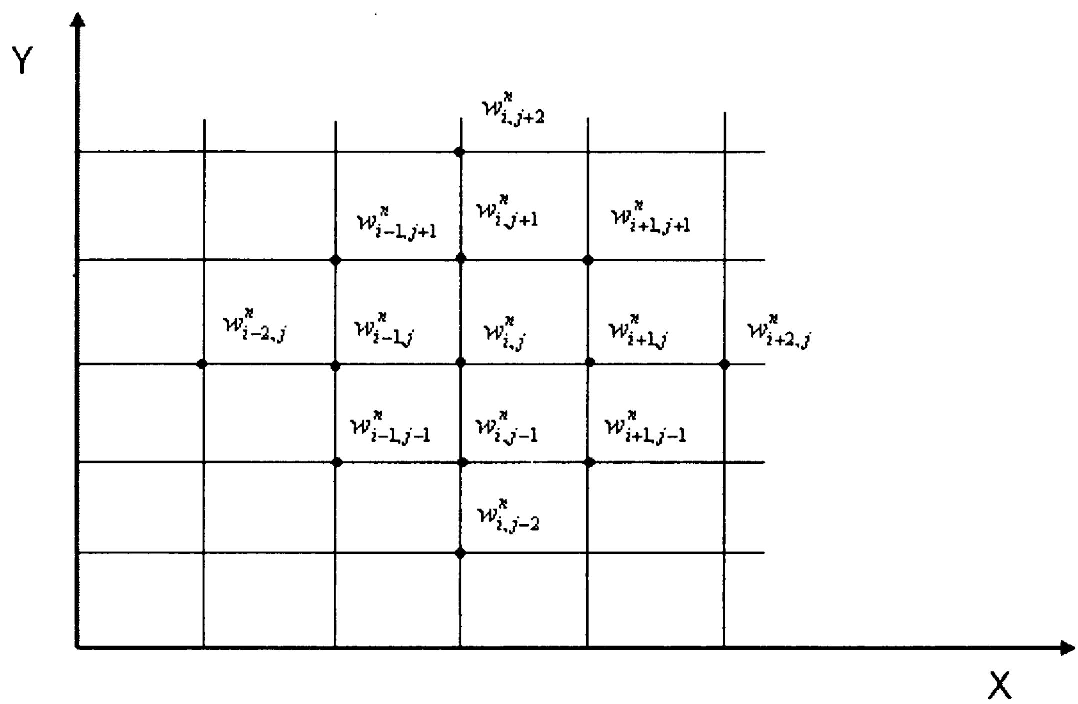

Рис.1.

$x_i = (i-1)h_x$, $\qquad y_i = (j-1)h_y$, $\qquad t_n = n\tau$

(i = 1, …, N; $\qquad j$ = 1, …, M; $\qquad n$ = 0, 1 ,2, …)

$w_{ij}^{n} = w(x_i, y_i, t_n)$

Обозначим

$$\Lambda_x^2 w_{ij}^n = \left(w_{i+2,j}^n - 4w_{i+1,j}^n + 6w_{i,j}^n - 4w_{i-1,j}^n + w_{i-2,j}^n\right)/ h_x^4$$

$$\Lambda_y^2 w_{ij}^n = \left(w_{i,j+2}^n - 4w_{i,j+1}^n + 6w_{i,j}^n - 4w_{i,j-1}^n + w_{i,j-2}^n\right)/ h_y^4 \tag{11}$$

Тогда

$$(C_1\Lambda_x^2 + C_1\Lambda_y^2)w_{i,j}^n = \frac{w_{i,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} + f_{ij}^n$$

Введем $w_{i,j}^n = \alpha w_{i,j} + \beta w_{i,j}^{n-1}$, ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$) для $w_{i,j}^n$ в левой части равенства. Тогда

$$\tau^2(C_1\Lambda_x^2 + C_1\Lambda_y^2)(\alpha w_{i,j}^{n+1} + \beta w_{i,j}^{n-1}) = w_{i,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1} + \tau^2 f_{ij}^n \tag{12}$$

Используем «единичный оператор» $Iw_{i,j}^n = w_{i,j}^n$:

$$(\dot{I} - \alpha C_1\tau^2\Lambda_x^2 - \alpha C_1\tau^2\Lambda_y^2)w_{ij}^{n+1} = F_{ij}, \tag{13}$$

где F_{ij} - все на слое n и n-1.

Тогда

$$(I - \alpha C_1\tau^2\Lambda_x^2 - \alpha C_1\tau^2\Lambda_y^2)w_{ij}^{n+1} = F_{ij} \tag{14}$$

можно записать

$$(I - \alpha C_1\tau^2\Lambda_x^2)(I - \alpha C_1\tau^2\Lambda_y^2)w_{ij}^{n+1} = F_{ij} \tag{15}$$

Введем промежуточные сеточные функции при помощи следующих соотношений

$$(I - \alpha C_1\tau^2\Lambda_x^2)w_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = F_{ij} \tag{16}$$

Тогда

$$(I - \alpha C_1\tau^2\Lambda_y^2)w_{ij}^{n+1} = w_{ij}^{n+\frac{1}{2}}.$$

Решение задачи распадается на два этапа. На первом дробном шаге решается группа одномерных задач по одной из переменных, на втором шаге – по второй переменной.

Разностные граничные условия для нахождения $w_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$:

$$3w_{1j}^{n+\frac{1}{2}} - 4w_{2j}^{n+\frac{1}{2}} + w_{3j}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \qquad w_{1j}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \qquad (j = 1,\ldots,M) \tag{17}$$

$$3w_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} - 4w_{N-1j}^{n+\frac{1}{2}} + w_{iN-2}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \qquad w_{iN}^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

Разностные граничные условия для нахождения w_{ij}^{n+1} будут иметь вид:

$$3w_{i1}^{n+1} - 4w_{i2}^{n+1} + w_{i3}^{n+1} = 0, \qquad w_{ij}^{n+1} = 0, \qquad (i = 1,\dots,N) \tag{18}$$

$$3w_{iM}^{n+1} - 4w_{iM-1}^{n+1} + w_{iM-2}^{n+1} = 0, \qquad w_{iM}^{n+1} = 0.$$

Из начальных условий следует, что
$w_{ij}^0 = 0$ для $i = 1,\dots,N$; $j = 1,\dots,M$,

$$w_{ij}^1 = w_{ij}^0 + \tau \frac{\partial w}{\partial t}(0) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0) + 0(\tau^3),$$

$\frac{\partial w}{\partial t}(0) = 0$ - задано,

$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0)$ определяется из дифференциального уравнения для $i = 3, \dots, N\text{-}2; j = 3, \dots, M\text{-}2$.

Для остальных i и j значения w_{ij}^1 находятся из граничных условий с использованием уже найденных w_{ij}^1.

Таким образом по каждой переменной х или у мы приходим к системам линейных алгебраических уравнений с 5-диагональной матрицей, которые решаются методом прогонки.

Деформации термического расширения, пластичности и ползучести определяем по схемам, изложенным в [6], сущность которых состоит в решении системы разностных уравнений для w_{ij} на каждом этапе нагружения ровно столько раз, сколько это необходимо, чтобы достичь необходимую точность при вычислении ε_{sk}^P и ε_{sk}^C, после чего осуществляется переход на следующий этап.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуллер Л.В., Бушман А.В., Жерноклетов М.В. и д.р. «Изоэнтропы разгрузки и уравнение состояния металлов при высоких плотностях энергии». // ЖЭТФ – 1980. т. 78. №2. – С. 743 - 760.
2. Давыдов А.А., Калиниченко А.И. «Механические эффекты вблизи ионных треков и термических пиков» // Проблемы ядерной физики космических лучей. – 1986. №26. – С. 60 - 64.
3. Романов Г.С., Сузденков М.В., Тетерев А.В., Фоков Г.А. Теоретическая модель взаимодействия сильноточного релятивистского электронного пучка с металлической преградой ИФЖ. – 1984. т. 18. №6. – С. 952 - 956.
4. Романов Г.С., Сузденков М.В. Динамика кратерообразования при действии сильноточных пучков заряженных частиц на металлическую преграду. – Докл. АН БССР. – 1982. т. 62. – С. 496-499.
5. Динс Д., Уолли Д., Теория удара. – В кн.: Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973. – С. 48-111.
6. Куликов И.С. Нестеренко В.Б., Тверковкин Б.Е. Прочность элементов конструкций при облучении. Мн.: Навука і тэхніка, 1990. – 144 с.