

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Сулейман М.

*Bending of ring sandwich plate with light filler lying on elastic foundation is considered. For the description of kinematics of package with asymmetrical thickness the broken normal hypothesis was accepted. Reaction of foundation was described on the base of Winkler's model. Combined equations of equilibrium and analytical solutions via displacement were received. Numerical solutions for sandwich metal-polymeric plate were adduced.*

**Введение.** Широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности (авиа-, ракетостроение, транспортное машиностроение, реакторное оборудование) находят слоистые композитные элементы конструкций. Деформирование трехслойных систем не связанных с упругим основанием различного рода нагрузками описано в монографиях [1–3]. Изгиб сплошных круговых трехслойных пластин с легким наполнителем на упругом основании равномерно распределенной нагрузкой изучен в [4]. Контактное взаимодействие тел с круговыми границами исследовано в [5]. Здесь рассмотрена поперечно нагруженная упругая кольцевая трехслойная пластина на деформируемом основании, как это имеет место, например, в настилах, и др. элементах механических систем.

**Постановка задачи** и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к радиусу внешнего контура  $r_1$ , через  $h_k$  обозначена относительная толщина  $k$ -го слоя. Для изотропных несущих слоев, толщиной  $h_1, h_2$ , приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине наполнитель ( $h_3 = 2c$ ) легкий, т. е. в нем пренебрегается работа напряжений  $\sigma_{rz}$  в тангенциальном направлении. Вертикальная нагрузка  $q_0(r)$  распределена по внешней поверхности пластины (рис. 1). На границах слоев перемещения непрерывны. На внешнем и внутреннем контурах пластины, радиусы которых  $r_0$  и  $r_1 = 1$ , предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

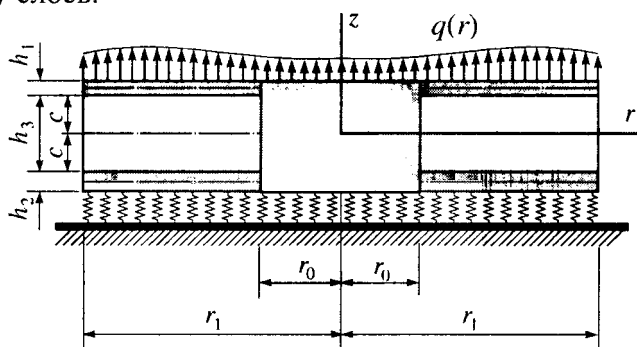


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной кольцевой пластины на упругом основании

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют:  $u_\varphi^{(k)} = 0$  ( $k$  – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в наполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты  $\varphi$ , т. е.  $u(r), \psi(r), w(r)$ . В дальнейшем эти функции считаются искомыми.

Используя гипотезу прямолинейности нормали наполнителя  $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)},_z + w_{,r} = \psi$ , после интегрирования получим выражения для радиальных перемещений в слоях  $u_r^{(k)}$  через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна (расстояние до срединной плоскости наполнителя),  $(u + c\psi)$  – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации наполнителя,

ля,  $(u - c\psi)$  – смещение второго несущего слоя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из выражений (1) из соотношений Коши  $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi.\end{aligned}\quad (2)$$

Предполагается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости в девиаторно-шаровой форме:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi), \quad (3)$$

где  $s_\alpha^{(k)}$ ,  $\varepsilon_\alpha^{(k)}$  и  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций,  $G_k$ ,  $K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования.

Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)} = s_\alpha^{(k)} + \sigma^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \quad (4)$$

Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A - \delta W = 0, \quad (5)$$

где  $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$  – вариация суммарной работы внешних нагрузок  $q_0(r)$ , реакции основания  $q_R$ , и контурных усилий  $T_r^n$ ,  $H_r^n$ ,  $M_r^n$ ,  $Q^n$  на внутреннем  $n = 0$  и внешнем  $n = 1$  контурах:

$$\delta A_1 = \iint_S (q_0 - q_R) \delta w r dr d\varphi, \quad \delta A_2 = \sum_0^{2\pi} \int (T_r^n \delta u + H_r^n \delta \psi + M_r^n \delta w_{,r} + Q^n \delta w) d\varphi,$$

$\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^3 \int (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi. \quad (6)$$

Здесь интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя  $S$ ,  $dS = r dr d\varphi$ .

Вариации перемещений и деформаций в слоях стержня следуют из (1) и соотношений Коши. Подставив их в (6) и учитывая выражения для внутренних усилий (4) после соответствующих преобразований из вариационного уравнения (5) получим систему дифференциальных уравнений в усилиях, описывающую равновесие рассматриваемой круговой трехслойной пластины на упругом основании:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = -p, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \quad M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q_0 + q_R. \quad (7)$$

На контурах пластины ( $r = r_0$  и  $r = 1$ ) должны выполняться силовые условия

$$T_r = T_r^n, \quad H_r = H_r^n, \quad M_r = M_r^n, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^n.$$

Связь между реакцией основания и прогибом пластины принимается в соответствии с моделью Винклера (Winkler E.), согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (8)$$

где  $\kappa_0$  – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Получим выражение обобщенных усилий, входящих в (7), через три искомые функции  $u(r)$ ,  $\psi(r)$ ,  $w(r)$ . Для этого подставим в (4) выражение напряжений через деформации (3), а затем деформаций через перемещения (2). В результате

$$\begin{aligned}
T_r &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \\
&- \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \left[ K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}. \\
M_r &= \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[ K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
&+ \left[ c K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\
&+ \left[ c K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
&- \left[ K_1^+ h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
&- \left[ K_1^- h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}, \\
H_r &= c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) u_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{u}{r} + \\
&+ \left[ c^2 (K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \left[ c^2 (K_1^- h_1 + K_2^- h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
&- \left[ c \left( K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
&- \left[ c \left( K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Соотношения для  $T_\phi$ ,  $M_\phi$ ,  $H_\phi$  следуют из формул для  $T_r$ ,  $M_r$ ,  $H_r$ , если в (9) поменять местами  $K_k^+$  и  $K_k^-$ , где  $K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+$ ,  $K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-$ .

После подстановки выражений (8), (9) в (7), получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающую изгиб кольцевой трехслойной пластины с легким наполнителем на упругом основании:

$$\begin{aligned}
L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0, \\
L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w &= -q_0, \tag{10}
\end{aligned}$$

где  $q_0$  – интенсивность внешней распределенной нагрузки,

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \\
a_4 &= c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \quad a_5 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\
a_6 &= h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \\
L_2(g) &\equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \quad L_3(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}.
\end{aligned}$$

Задача отыскания функций  $u(r)$ ,  $\psi(r)$ ,  $w(r)$  замыкается присоединением к (10) граничных условий. При жесткой заделке контуров пластины ( $r = r_0, 1$ )

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0. \quad (11)$$

При шарнирном опирании контуров ( $r = r_0, 1$ )

$$u = \psi = w = M_r = 0. \quad (12)$$

В случае свободного контура ( $r = r_0$ , или  $r = 1$ )

$$\psi = 0, T_r = M_r = M_{r,r} = 0. \quad (13)$$

Для решения системы (10) с помощью первых двух ее уравнений в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями  $u$  и  $\psi$ . Затем, после двукратного интегрирование этих уравнений система приводится к виду

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r, \\ w_{,rrr} + \frac{2}{r} w_{,rr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} + \kappa^4 w &= q, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – константы интегрирования,

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D,$$

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Общее решение третьего уравнения в (14):

$$w = C_5 \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r) + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r) + w_0, \quad (15)$$

где функции Кельвина нулевого порядка  $\varphi_n(\kappa r) = \operatorname{ber}(\kappa r), \operatorname{bei}(\kappa r), \operatorname{ker}(\kappa r), \operatorname{kei}(\kappa r)$  образуют фундаментальную систему решений [6],  $w_0$  – частное решение уравнения (14).

Если на пластину действует равномерно распределенная по всей ее поверхности нагрузка интенсивностью  $q_0 = \text{const}$ , то частное решение имеет вид

$$w_0 = \frac{q}{\kappa^4} = \frac{q_0}{\kappa_0}. \quad (16)$$

В итоге из (14) с учетом (15), (16) получаем искомые перемещения в упругой трехслойной кольцевой пластине, связанной с деформируемым основанием:

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r, \\ w &= C_5 \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r) + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r) + \frac{q_0}{\kappa_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Константы интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_8$ , соответствующие в наиболее общем случае восьми граничным условиям, определяются в каждом частном случае закрепления внешнего и внутреннего контуров пластины.

В дальнейшем нам понадобятся выражения первых двух производных прогиба и их значения на граничных контурах. В соответствии с правилом дифференцирования функций Кельвина [7] производная от прогиба в (17) будет следующей:

$$\begin{aligned} w_{,r} &= \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} \{C_5 [\operatorname{ber}_1(\kappa r) + \operatorname{bei}_1(\kappa r)] + C_6 [-\operatorname{ber}_1(\kappa r) + \operatorname{bei}_1(\kappa r)] + \\ &+ C_7 [\operatorname{ker}_1(\kappa r) + \operatorname{kei}_1(\kappa r)] + C_8 [-\operatorname{ker}_1(\kappa r) + \operatorname{kei}_1(\kappa r)]\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ее значения на внешнем  $r = 1$  и внутреннем  $r = r_0$  контурах пластины

$$w_{,r}(1) = b_3 C_5 + b_4 C_6 + b_{30} C_7 + b_{40} C_8, \quad w_{,r}(r_0) = b_{31} C_5 + b_{41} C_6 + b_{32} C_7 + b_{42} C_8, \quad (19)$$

где

$$b_3 = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa], \quad b_4 = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa], \quad b_{30} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ker}_1 \kappa + \operatorname{kei}_1 \kappa],$$

$$b_{40} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\ker_1 \kappa + \operatorname{kei}_1 \kappa], \quad b_{31} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\operatorname{ber}_1(\kappa r_0) + \operatorname{bei}_1(\kappa r_0)], \quad b_{41} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ber}_1(\kappa r_0) + \operatorname{bei}_1(\kappa r_0)],$$

$$b_{32} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\ker_1(\kappa r_0) + \operatorname{kei}_1(\kappa r_0)], \quad b_{42} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [-\ker_1(\kappa r_0) + \operatorname{kei}_1(\kappa r_0)].$$

Дифференцируя по радиусу первую производную (18), получаем вторую производную:

$$w_{,rr} = \frac{\kappa^2}{2} \{C_5 [\operatorname{bei}_2(\kappa r) - \operatorname{bei}(\kappa r)] + C_6 [-\operatorname{ber}_2(\kappa r) + \operatorname{ber}(\kappa r)] +$$

$$+ C_7 [\operatorname{kei}_2(\kappa r) - \operatorname{kei}(\kappa r)] + C_8 [-\ker_2(\kappa r) + \ker(\kappa r)]\}. \quad (20)$$

Значение второй производной (20) на контурах ( $r = 1, r = r_0$ ):

$$w_{,rr}(1) = b_5 C_5 + b_6 C_6 + b_{50} C_7 + b_{60} C_8,$$

$$w_{,rr}(r_0) = b_{51} C_5 + b_{61} C_6 + b_{52} C_7 + b_{62} C_8, \quad (21)$$

где

$$b_5 = \kappa^2 (\operatorname{bei}_2 \kappa - \operatorname{bei} \kappa) / 2, \quad b_6 = \kappa^2 (-\operatorname{ber}_2 \kappa + \operatorname{ber} \kappa) / 2,$$

$$b_{50} = \kappa^2 (\operatorname{kei}_2 \kappa - \operatorname{kei} \kappa) / 2, \quad b_{60} = \kappa^2 (-\ker_2 \kappa + \ker \kappa) / 2,$$

$$b_{51} = \kappa^2 (\operatorname{bei}_2(\kappa r_0) - \operatorname{bei}(\kappa r_0)) / 2, \quad b_{61} = \kappa^2 (-\operatorname{ber}_2(\kappa r_0) + \operatorname{ber}(\kappa r_0)) / 2,$$

$$b_{52} = \kappa^2 (\operatorname{kei}_2(\kappa r_0) - \operatorname{kei}(\kappa r_0)) / 2, \quad b_{62} = \kappa^2 (-\ker_2(\kappa r_0) + \ker(\kappa r_0)) / 2.$$

При *жесткой заделке обеих контуров* пластины решение (17) необходимо подставить в (11). В результате, с учетом (19) и того, что значения производной прогиба на контурах пластины равны нулю, получаем линейную систему из восьми алгебраических уравнений

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 r_0 + C_2 / r_0 = 0, \quad C_3 + C_4 = 0, \quad C_3 r_0 + C_4 / r_0 = 0,$$

$$C_5 \operatorname{ber} \kappa + C_6 \operatorname{bei} \kappa + C_7 \ker \kappa + C_8 \operatorname{kei} \kappa = -q_0 / \kappa_0,$$

$$C_5 \operatorname{ber}(\kappa r_0) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r_0) + C_7 \ker(\kappa r_0) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r_0) = -q_0 / \kappa_0,$$

$$b_3 C_5 + b_4 C_6 + b_{30} C_7 + b_{40} C_8 = 0, \quad b_{31} C_5 + b_{41} C_6 + b_{32} C_7 + b_{42} C_8 = 0. \quad (22)$$

Отсюда следуют константы интегрирования

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0, \quad C_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta}, \quad C_6 = \frac{\Delta_6}{\Delta}, \quad C_7 = \frac{\Delta_7}{\Delta}, \quad C_8 = \frac{\Delta_8}{\Delta}, \quad (23)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{ber} \kappa & \operatorname{bei} \kappa & \ker \kappa & \operatorname{kei} \kappa \\ \operatorname{ber}(\kappa r_0) & \operatorname{bei}(\kappa r_0) & \ker(\kappa r_0) & \operatorname{kei}(\kappa r_0) \\ b_3 & b_4 & b_{30} & b_{40} \\ b_{31} & b_{41} & b_{32} & b_{42} \end{vmatrix},$$

а остальные определители получаются из приведенного заменой столбца, соответствующего нижнему индексу, на столбец свободных членов из правой части системы (22).

Если *оба контура пластины шарнирно оперты*, то решение (17) необходимо подставить в (12). В результате только пятое и шестое уравнения из системы (22) сохраняют свой вид:

$$C_1 + C_2 + b_1 (b_3 C_5 + b_4 C_6 + b_{30} C_7 + b_{40} C_8) = 0,$$

$$C_1 r_0 + C_2 / r_0 + b_1 (b_{31} C_5 + b_{41} C_6 + b_{32} C_7 + b_{42} C_8) = 0,$$

$$C_3 + C_4 + b_2 (b_3 C_5 + b_4 C_6 + b_{30} C_7 + b_{40} C_8) = 0,$$

$$C_3 r_0 + C_4 / r_0 + b_2 (b_{31} C_5 + b_{41} C_6 + b_{32} C_7 + b_{42} C_8) = 0,$$

$$C_5 \operatorname{ber} \kappa + C_6 \operatorname{bei} \kappa + C_7 \ker \kappa + C_8 \operatorname{kei} \kappa = -q_0 / \kappa_0,$$

$$C_5 \operatorname{ber}(\kappa r_0) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r_0) + C_7 \ker(\kappa r_0) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r_0) = -q_0 / \kappa_0,$$

$$\begin{aligned} a_3 C_1 - a_3 C_2 + a_5 C_3 - a_5 C_4 + b_{71} C_5 + b_{72} C_6 + b_{73} C_7 + b_{74} C_8 &= 0, \\ a_3 C_1 - a_3 C_2 + a_5 C_3 - a_5 C_4 + b_{81} C_5 + b_{82} C_6 + b_{83} C_7 + b_{84} C_8 &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} b_{71} &= b_5 [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_3, & b_{72} &= b_6 [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_4, \\ b_{73} &= b_{50} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{30}, & b_{74} &= b_{60} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{40}, \\ b_{81} &= b_{51} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{31}, & b_{82} &= b_{61} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{41}, \\ b_{73} &= b_{50} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{30}, & b_{84} &= b_{62} [a_3 b_1 + a_5 b_2 - a_6] - a_{60} b_{42}. \end{aligned}$$

В результате решения системы линейных алгебраических уравнений (24) получаем константы интегрирования

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad C_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad C_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \quad C_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta}, \quad C_6 = \frac{\Delta_6}{\Delta}, \quad C_7 = \frac{\Delta_7}{\Delta}, \quad C_8 = \frac{\Delta_8}{\Delta}, \quad (25)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 b_3 & b_1 b_4 & b_1 b_{30} & b_1 b_{40} \\ r_0 & 1/r_0 & 0 & 0 & b_1 b_{31} & b_1 b_{41} & b_1 b_{32} & b_1 b_{42} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_2 b_3 & b_2 b_4 & b_2 b_{30} & b_2 b_{40} \\ 0 & 0 & r_0 & 1/r_0 & b_2 b_{31} & b_2 b_{41} & b_2 b_{32} & b_2 b_{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{ber } \kappa & \text{bei } \kappa & \text{ker } \kappa & \text{kei } \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{ber}(\kappa r_0) & \text{bei}(\kappa r_0) & \text{ker}(\kappa r_0) & \text{kei}(\kappa r_0) \\ a_3 & -a_3 & a_5 & -a_5 & b_{71} & b_{72} & b_{73} & b_{74} \\ a_3 & -a_3 & a_5 & -a_5 & b_{81} & b_{82} & b_{83} & b_{84} \end{vmatrix},$$

а остальные определители получаются из приведенного заменой столбца, соответствующего нижнему индексу, на столбец свободных членов из правой части системы (24).

Если *внутренний контур пластины заделан, а внешний свободен*, то решение (17) необходимо подставить в (11) при  $r = r_0$  и в (13) при  $r = 1$ .

Таким образом, решение (17) с константами интегрирования (23), (25) описывает перемещения в кольцевой трехслойной пластине на упругом основании в случае заделки или шарнирного опирания ее обоих контуров.

**Численные исследования** проводились для защемленной по граничным контурам пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [3]. Геометрические параметры пластины, отнесенные к ее радиусу  $r_1$ :  $r_0 = 0,2$ ;  $h_1 = h_2 = 0,04$ ,  $h_3 = 0,4$ .

Рис. 2 иллюстрирует зависимость максимального прогиба кольцевой пластины от коэффициента жесткости основания  $\kappa_0$ .

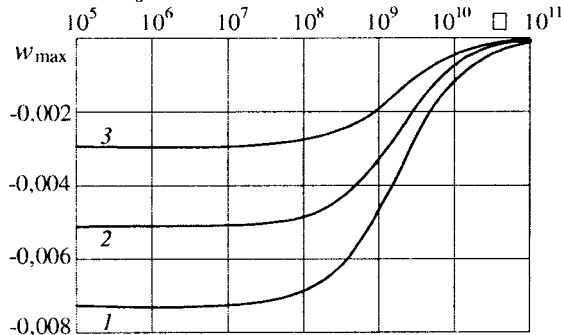


Рис. 2. Максимальный прогиб кольцевой пластины в зависимости от коэффициента постели  $\kappa_0$

Для слабых оснований ( $\kappa_0 \leq 10$  МПа/м) влияние жесткости на прогиб незначительно. При основаниях средней жесткости ( $\kappa_0 = 10 \dots 1000$ ) происходит резкое уменьшение проги-

ба. В случае основания высокой жесткости ( $\kappa_0 > 1000$ ), величина прогиба мала и стабильна. Кривые рассчитаны при различных значениях интенсивности распределенной нагрузки (МПа): 1 –  $q_0 = -10$ , 2 –  $q_0 = -7$ , 3 –  $q_0 = -4$ .

Изменение перемещений по радиусу кольцевой пластины показано на рис. 3 (а – прогиб, б – сдвиг в заполнителе) при различных радиусах отверстия: 1 –  $r_0 = 0,2$ ; 2 –  $r_0 = 0,4$ ; 3 –  $r_0 = 0,6$ . Величины перемещений убывают нелинейно за счет уменьшения результирующей нагрузки и увеличения жесткости кольцевой пластины. Здесь и далее принято основание средней жесткости с коэффициентом постели  $\kappa_0 = 1000$  МПа/м,  $q_0 = -1$  МПа.

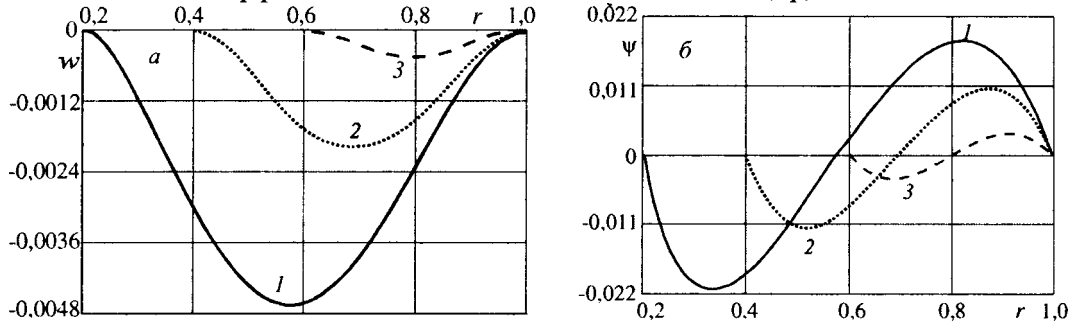


Рис. 3. Изменение перемещений по радиусу кольцевой пластины

Рис. 4 посвящен исследованию радиальных напряжений на граничных плоскостях слоев кольцевой трехслойной пластины, покоящейся на основании малой ( $\kappa = 100$  МПа/м, сплошные кривые) и высокой ( $\kappa = 10000$  МПа/м, пунктир) жесткости. В несущих слоях значения напряжений уменьшены в  $10^9$ , в заполнителе – в  $10^8$  раз. Интенсивность внешней нагрузки принята  $q = -10$  МПа, радиус внутреннего граничного контура  $r_0 = 0,2$ .

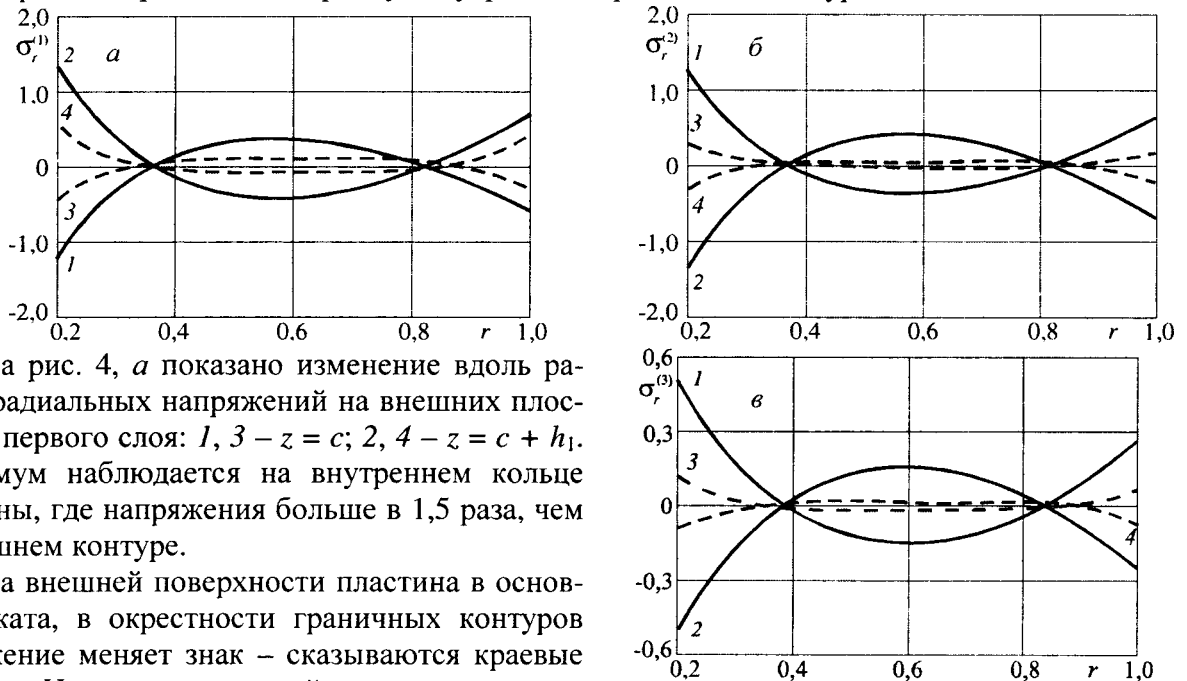


Рис. 4. Изменение радиальных напряжений на внешних плоскостях первого (а), второго (б) слоев и заполнителя (в)

На рис. 4, а показано изменение вдоль радиуса радиальных напряжений на внешних плоскостях первого слоя: 1, 3 –  $z = c$ ; 2, 4 –  $z = c + h_1$ . Максимум наблюдается на внутреннем кольце пластины, где напряжения больше в 1,5 раза, чем на внешнем контуре.

На внешней поверхности пластины в основном сжата, в окрестности граничных контуров напряжение меняет знак – сказываются краевые эффекты. На плоскости склейки с заполнителем напряжения ведут себя подобным образом, имея противоположные знаки.

При основании высокой жесткости напряжения везде уменьшаются по модулю, оставаясь того же знака. Максимальное значение на внутреннем контуре уменьшается в 2,6 раза.

Во втором несущем слое, связанном с основанием, радиальные напряжения на внешних плоскостях приведены на рис. 4, б: 1, 3 –  $z = -c - h_2$ ; 2, 4 –  $z = -c$ . Их поведение такое же, как и в первом слое, с точностью до знака. При основании высокой жесткости они везде уменьшаются по модулю.

На внешних плоскостях заполнителя (1, 3 –  $z = -c$ ; 2, 4 –  $z = c$ ) максимальные радиальные напряжения примерно в 30 раз меньше, чем в несущих слоях, но их поведение при увеличении коэффициента постели аналогично (рис. 4, в).

Касательные напряжения в заполнителе (рис. 5) при переходе от слабых – 1 к весьма жестким основаниям – 2 уменьшаются примерно в 6 раз. Максимумы немного сдвигаются к внешним контурам пластины, на которых касательные напряжения равны нулю.

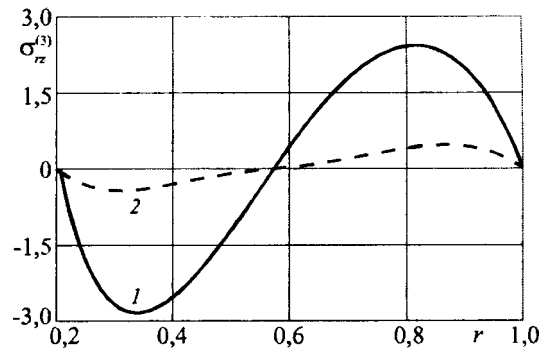


Рис. 5. Изменение касательных напряжений в заполнителе

На рис. 6 показано изменение радиальных  $\sigma_r$  – 1 и окружных  $\sigma_\phi$  – 2 напряжений по толщине пластины на ее внешнем – а и внутреннем – б контурах соответственно. Коэффициент жесткости основания  $k = 1000$  МПа / м (здесь и далее). На внешнем контуре верхние части несущих слоев сжаты, заполнителя – растянуты (в силу краевого эффекта). На внутреннем контуре – наоборот. В склейках слоев напряжения имеют одинаковые знаки, но терпят разрыв из-за различных механических характеристик материалов. Картина напряжений симметрична в силу симметрии пластины по толщине. В обоих случаях наибольшие напряжения достигаются на внешних плоскостях пластины, при этом они равны по величине.

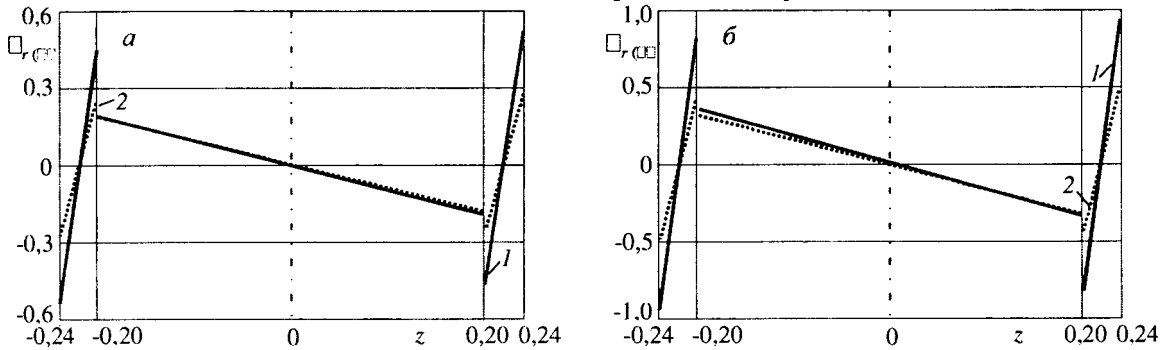


Рис. 6. Изменение радиальных – 1 и окружных – 2 напряжений по толщине пластины

**Выводы.** Приведенное в работе общее решение (17) можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба трехслойной кольцевой пластины с легким заполнителем на упругом основании, при различных способах закрепления ее внешнего и внутреннего контуров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Деформирование металлополимерных систем. – Мн.: Бел. наука, 2004. – 342 с.
3. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
4. Яровая А. В. Изгиб трехслойной круговой пластины на упругом основании // Проблемы прочности. – 2005. – № 6. – С. 68–78.
5. Кравчук А. С., Чигарев А. В. Механика контактного взаимодействия. – Мн.: Технопринт, 2000. – 196 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стигана И. – М.: Наука, 1979. – 830 с.