Белорусский государственный университет

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

И. М. Мартыненко

The formulae for asymptotic expression of eigenvalues and eigenfunctions of first boundary value problem for cubic anisotropy bodies are obtained.

Кубически анизотропными телами называются упругие тела, процессы деформирования в которых описываются следующим законом Гука[1,2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= (A_{11} - A_{12})\varepsilon_{ii} + A_{12}\theta \\ \sigma_{ij} &= 2A_{44}\varepsilon_{ij} \end{aligned}, \quad i \neq j = 1,2,3 \tag{1}$$

Компоненты тензора деформации ε_{ij} связаны с компонентами вектора перемещения u_i ($i = 1,2,3$) точек упругого тела формулами:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \theta = \sum_{i=1}^{3} \partial_i u_i, \; j,i = 1,2,3 \tag{2}$$

Повсюду в работе предполагается, что A_{ij} (материальные константы) –постоянные величины. Разрешающая система уравнений равновесия выводится из уравнений Коши [1] после подстановки в них формул (1):

$$(\Delta + \varepsilon\partial_\alpha^2)u_\alpha + \sigma\partial_\alpha \sum_{k=1}^{3} \partial_k u_k = 0, \alpha = \overline{1,3} \tag{3}$$

В матричном виде эта система записывается так:

$$Mu = 0$$

где

$$Mu = A_{44} \begin{Vmatrix} \Delta + (\varepsilon + \lambda)\partial_\alpha^2 + k^2 & \lambda\partial_\beta\partial_\alpha & \lambda\partial_\gamma\partial_\alpha \\ \lambda\partial_\beta\partial_\alpha & \Delta + (\varepsilon + \lambda)\partial_\beta^2 + k^2 & \lambda\partial_\beta\partial_\alpha \\ \lambda\partial_\gamma\partial_\alpha & \lambda\partial_\beta\partial_\gamma & \Delta + (\varepsilon + \lambda)\partial_\gamma^2 + k^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \end{Vmatrix}, u = \begin{Vmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \end{Vmatrix}$$

Введем в рассмотрение такую операторную матрицу:

$\Phi(\partial_1,\partial_2,\partial_3) =$

$$\left\| \begin{matrix} (\Delta)^2+\lambda\Delta(\partial_2^2+\partial_3^2)+(\lambda^2-\sigma^2)\partial_2^2\partial_3^2 & -\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta+(\lambda-\sigma)\partial_3^2\right] & -\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta+(\lambda-\sigma)\partial_2^2\right] \\ -\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta+(\lambda-\sigma)\partial_3^2\right] & \Delta^2+\lambda\Delta(\partial_1^2+\partial_3^2)+(\lambda^2-\sigma^2)\partial_1^2\partial_3^2 & -\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta+(\lambda-\sigma)\partial_1^2\right] \\ -\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta+(\lambda-\sigma)\partial_2^2\right] & -\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta+(\lambda-\sigma)\partial_1^2\right] & \Delta^2+\lambda\Delta(\partial_1^2+\partial_2^2)+(\lambda^2-\sigma^2)\partial_1^2\partial_2^2 \end{matrix} \right\|$$

где для краткости введены обозначения: $\lambda = \varepsilon + \sigma = \dfrac{A_{11}}{A_{44}} - 1$, $\varepsilon = \dfrac{A_{11} - A_{12}}{A_{44}} - 2$, $\sigma = 1 + \dfrac{A_{12}}{A_{44}}$

Обозначим

$$F(\partial_1,\partial_2,\partial_3,k^2) = \det M \tag{4}$$

Из (4) имеем:

$$\begin{aligned} F(\partial_1,\partial_2,\partial_3,k^2) &= (\Delta+k^2)^3 + (\varepsilon+\sigma)f_1(\Delta+k^2)^2 + \varepsilon(\varepsilon+2\sigma)f_2(\Delta+k^2) + \\ &+ \varepsilon^2(\varepsilon+3\sigma)f_3 = (\Delta+k^2)^3 + \lambda f_1(\Delta+k^2)^2 + \\ &+ (\lambda^2-\sigma^2)f_2(\Delta+k^2) + (\lambda-\sigma)^2(\lambda+2\sigma)f_3 \end{aligned} \tag{5}$$

Далее рассмотрим следующую граничную задачу

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) - \lambda^2 u(x)E = 0,\ x \in D,\ u(x) = 0,\ x \in S \tag{6}$$

где S – граница области D, $\lambda = const$. Так как система (6) принадлежит к эллиптическому типу, то для нее имеют место общие теоремы о разрешимости граничных задач (Лопатинский). В частности, существует матричная функция Грина [4] $G(x,y,\lambda) = g(x,y,\lambda) - a(x,y,\lambda)$, где $g(x,y,\lambda)$ – главная часть матрицы Грина, $a(x,y,\lambda)$ – ее регулярная часть, для которых справедливы такие оценки:

$$|g(x,y,\lambda)| \le \frac{C\exp(-\lambda\varepsilon|x-y|)}{|x-y|},\ a(x,y,\lambda) \le C_1\exp(-\lambda\varepsilon|x-y|)(|\ln|x-y|| + 1) \tag{7}$$

C, C_1 – постоянные. Если $\lambda = 0$, то – есть для системы $M\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0$ матрица Грина имеет следующий вид

$$G(x,y) = g(x,y) - a(x,y) \tag{8}$$

и имеют место такие оценки

$$|G(x,y)| \le C_2 / |x-y|,\ |a(x,y)| \le C_3 / |x-y|^{1-\chi} \tag{9}$$

χ – постоянная Ляпунова для поверхности S.

Так как уравнения (6) имеют постоянные коэффициенты, то матрицы $g(x,y,\lambda)$, $g(x,y)$ можно построить с помощью интегрального преобразования Фурье. Опуская промежуточные выкладки, приведем их окончательный вид

$$g(x-y,\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\infty}\exp(i(x-y,\alpha))\left[M(\alpha)+\lambda^2 E\right]^{-1}d\alpha \qquad (10)$$

$$g(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\infty}\exp(i(x-y,\alpha))[M(\alpha)]^{-1}d\alpha \qquad (11)$$

Из общей теории преобразования Фурье [3] имеем

$$\iiint_{\infty}g(x-z,\lambda)g(z-x)dz=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\infty}[M(\alpha)]\left[M(\alpha+\lambda^2 E)\right]^{-1}d\alpha$$

или с помощью замены $\alpha=\lambda\tilde{\alpha}$

$$\iiint_{\infty}g(x-z,\lambda)g(z-x)dz=\frac{1}{(2\pi)^3\lambda}\iiint_{\infty}[M(\tilde{\alpha})][M(\tilde{\alpha}+E)]^{-1}d\tilde{\alpha}$$

Регулярная часть матрицы $G(x,y)$ определяется как решение такой граничной задачи

$$\begin{cases} M\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)a(x,y)=0, x\in D \\ a(x,y)=g(x,y), x\in S \end{cases}$$

Редукция этой задачи к интегральным уравнениям приводит к такому представлению

$$a(x,y)=\iint_{S}H(x,z)g(z,y)d_zS$$

причем $H(x,z)=O(1/(x-y)^{2-\chi})$. Откуда $a(x,y)=O(1/|x-y|^{1-\chi})$. Эти выкладки обосновывают формулы (9).

Решение граничной задачи

$$\begin{cases} \left[M\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)-\lambda^2 E\right]u(x)=-\Phi(x), x\in D \\ u(x)=0, x\in S \end{cases} \qquad (12)$$

представим в виде

$$u(x) = -\lambda^2 \iiint\limits_D G(x,y)u(y)dy + \iiint\limits_D G(x,y)\Phi(y)dy \qquad (13)$$

Обозначим через $R(x,y,\lambda)$– резольвенту системы интегральных уравнений (13). Тогда решение интегрального уравнения (13) можно представить в виде

$$u(x) = \iiint\limits_D G(x,y)\Phi(y)dy - \lambda^2 \iiint\limits_D R(x,z,\lambda)\left[\iiint\limits_D G(z,y)\Phi(y)dy\right]dz \qquad (14)$$

Поскольку решение граничной задачи (12) может быть представлено через матрицу Грина $G(x,y,\lambda)$ оператора $M\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ с нулевым граничным условием, то получим такое равенство

$$u(x) = \iiint\limits_D G(x,y)\Phi(y)dy = \iiint\limits_D R(x,y,\lambda)\Phi(y)dy$$

Поэтому $R(x,y,\lambda) = G(x,y,\lambda)$. Из второй формулы Грина для оператора $M\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ следует симметрия матриц Грина $G(x,y) = G(y,x)$, $G(x,y,\lambda) = G(y,x,\lambda)$. Кроме того метод интегральных уравнений для определения $a(x,y,\lambda)$ приводит к следующей формуле

$$a(x,y,\lambda) = \iint\limits_S H(x,z,\lambda)g(z,y,\lambda)d_zS$$

причем

$$H(x,z,\lambda) \le \frac{C(\lambda)}{|x-z|^{2-\chi}}$$

Из всего выше сказанного вытекает следующие интегральные уравнения для $G(x,y,\lambda) = G(y,x,\lambda)$:

$$G(x,y,\lambda) = G(x,y) - \lambda^2 \iiint\limits_D G(x,z,\lambda)G(z,y)dz$$

$$G(x,y,\lambda) = G(x,y) - \lambda^2 \iiint\limits_D G'(x,z)G(z,y,\lambda)dz$$

Из теории симметричных интегральных уравнений вытекает следующее разложение резольвенты по собственным функциям его ядра [4, 8]:

$$G(x,y,\lambda)=G(x,y)-\lambda^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)u_k'(y)}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda^2)}$$

(15)

Кроме того для матричной функции

$$\Psi(x,\lambda)=\iiint\limits_D G(x,z,\lambda)G(z,y)dz=\iiint\limits_D G'(x,z)G(z,y,\lambda)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)u_k'(y)}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda^2)}$$

Очевидными выкладками получим:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)u_k'(y)}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda^2)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\infty}([M(\alpha)][M(\alpha)+E])^{-1}d\alpha$$

Здесь $|M(\alpha)|^{-1}$ обратную матрицу к M. Отсюда следует, что следы матриц справа и слева равны:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Spu_k(x)u_k'(x)}{\lambda_k(\lambda_k+\lambda)}=\frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{\infty}Sp([M(\alpha)][M(\alpha)+E])^{-1}d\alpha$$

Введем обозначения

$$Spu_k(x)u_k'(x)=u_k'(x)u_k(x)=a_k(x)$$

$$C^*(x)=\frac{1}{2\pi^2}\iiint\limits_{\infty}Sp([M(\alpha)][M(\alpha)+E])^{-1}d\alpha$$

Воспользуемся такой теоремой Таубера [4]: Пусть ряд

$$s(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k+\lambda},\ (c_k\geq 0,\lambda_k>0)$$

где $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots$, $\lambda_n\to\infty$, сходится при $\lambda>0$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}s(\lambda)=H$. Тогда $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{\lambda_k\leq\lambda}c_k=\frac{2H}{\pi}$, причем в последней сумме суммирование распространяется на те значения k, для которых $\lambda_k\leq\lambda$.

Полагая $c_k = a_k(x)/\lambda_k$, $H = C^*(x)/4\pi$, будем иметь $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum\limits_{\lambda_k \le \lambda} \frac{a_k(x)}{4\pi} = \frac{C^*(x)}{2\pi^2}$ или

$$\Phi(x,\lambda) \equiv \sum_{\lambda_k \le \lambda} \frac{a_k(x)}{4\pi} = \frac{C^*(x)}{2\pi^2}\sqrt{\lambda} + \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda} \tag{16}$$

где $\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Полагая здесь $\lambda = \lambda_n$, получим

$$\sigma_n \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{\lambda_k} = \frac{C^*(x)}{2\pi^2}\sqrt{\lambda_n} + \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}, \tag{17}$$

$\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$

Здесь функция $\Phi(x,\lambda)$ не убывает и равна нулю при $\lambda < \lambda_1$, причем $\Phi(x,\lambda) = \sigma_m(x)$ при $\lambda_m \le \lambda < \lambda_{m+1}$. Поэтому

$$\int_0^{\lambda_n} \Phi(x,\lambda)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_1(x)d\lambda + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \sigma_2(x)d\lambda + \ldots + \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \sigma_{n-1}(x)d\lambda$$

Отсюда в силу (16) имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \frac{C^*(x)}{3\pi^2}\lambda^{3/2} + \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}d\lambda$$

С помощью преобразования Абеля получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \frac{C^*(x)}{6\pi^2}\lambda_n^{3/2} + \varepsilon''_n\lambda_n^{3/2}$$

$\varepsilon''_n \to 0$ при $n \to \infty$. Из определения $C^*(x)$ вытекает

$$\sum_{k=1}^{n} u'_k(x)u_k(x) \approx \frac{\lambda_n^{3/2}}{12\pi^4} \iiint_{\infty} Sp([M(\alpha)][M(\alpha)+E])^{-1} d\alpha \tag{18}$$

Так как собственные функции (столбцы) $u_k(x)$ ортонормированны, то. $\iiint\limits_D u'_k(x)u_k(x)dx = 1$. Поэтому, интегрируя (18) по области D, получим

$$n \approx \frac{V}{12\pi^4} \iiint\limits_{\infty} Sp([M(\alpha)][M(\alpha)+E])^{-1} d\alpha \lambda_n^{3/2} \tag{19}$$

Здесь V – объем области D. Формулы (18), (19) представляют собой асимптотику рассматриваемой задачи. Переходя в них к сферическим координатам $\alpha = \rho\alpha_0$, α_0 – единичный вектор, сонаправленный с α, получим, заменяя α_0 на α

$$\iiint\limits_{\infty} Sp([M(\alpha)][M(\alpha)+E])^{-1} d\alpha = \frac{1}{2} Sp \iint\limits_{|\alpha|=1} [M(\alpha)]^{-1} dS \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\rho^2 M(\alpha)+E\right]^{-1} d\rho$$

Так как каждый элемент матрицы $\left[\rho^2 M(\alpha)+E\right]^{-1}$ является аналитической функцией от ρ в верхней полуплоскости за исключением конечного числа полюсов, а на бесконечности убывает как ρ^{-2}. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\rho^2 M(\alpha)+E\right]^{-1} d\rho = 2\pi \sum res \left[\rho^2 M(\alpha)+E\right]^{-1}; \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'(x) u_k(x) \approx \frac{i\lambda_n^{3/2}}{12\pi^3} \iint\limits_{|\alpha|=1} \sum res Sp\left([M(\alpha)]\left[\rho^2 M(\alpha)+E\right]\right)^{-1} dS \tag{21}$$

$$n \approx \frac{iV\lambda_n^{3/2}}{12\pi^3} \iint\limits_{|\alpha|=1} \sum res Sp\left([M(\alpha)]\left[\rho^2 M(\alpha)+E\right]\right)^{-1} dS \tag{22}$$

Практическое использование формул (21), (22) опирается на вычисление корней полинома $\det\left(\rho^2 M(\alpha)+E\right)$, который был выписан в явном виде в формуле (4). Оно может быть выполнено с помощью разложения F на множители, по методу, указанному в [3, 6]. Для этого будем исходить из следующего равенства

$$\begin{aligned} &F(\partial_1,\partial_2,\partial_3,k^2) = (\Delta+k^2)^3 + (\varepsilon+\sigma) f_1 (\Delta+k^2)^2 + \varepsilon(\varepsilon+2\sigma) f_2 (\Delta+k^2) + \\ &+ \varepsilon^2(\varepsilon+3\sigma) f_3 = (\Delta+k^2)^3 + \lambda f_1 (\Delta+k^2)^2 + \\ &+ (\lambda^2-\sigma^2) f_2 (\Delta+k^2) + (\lambda-\sigma)^2(\lambda+2\sigma) f_3 = \\ &= (\Delta + a\partial_1^2 + b\partial_2^2 + m)(\Delta + a\partial_2^2 + b\partial_3^2 + m)(\Delta + a\partial_3^2 + b\partial_1^2 + m) \end{aligned} \tag{23}$$

где a, b, m – постоянные, которые определим из поточечного равенства правых частей. В частности

$$F(0,0,0,k^2) = (k^2)^3 = m^3$$

Откуда $m = k^2 \exp(2\pi ni/3)$, $n = 1,,2,3$

Далее

$$F(1,1,-2,k^2) = (k^2)^3 - 3(\lambda^2 - \sigma^2)k^2 - 2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) =$$
$$= (a + b + m)(a - 2b + m)(b - 2a + m) \equiv$$
$$\equiv m^3 + m(3ab - 3a^2 - 3b^2) + (a + b)(a - 2b)(b - 2a)$$

Отсюда получим:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^2 - \sigma^2 = (a^2 + b^2 - ab)e^{\frac{2\pi ni}{3}} \\ &-2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) = (a + b)(a - 2b)(b - 2a) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &(a + b)^2 = 3ab + (\lambda^2 - \sigma^2)e^{\frac{2\pi ni}{3}} \\ &(a + b)\left[9a - 2(a + b)^2\right] = -2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) \end{aligned}\right\}$$

После очевидных выкладок имеем

$$\left.\begin{aligned} &3ab = (a + b)^2 - (\lambda^2 - \sigma^2)e^{-\frac{2\pi ni}{3}} \\ &(a + b)\left[(a + b)^2 - 3(\lambda^2 - \sigma^2)e^{-\frac{2\pi ni}{3}}\right] = -2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Обозначим

$$a + b = t$$

Тогда (24) принимает следующий вид:

$$3ab = t^2 - (\lambda^2 - \sigma^2)e^{-\frac{2\pi ni}{3}}$$

$$t^3 - 3(\lambda^2 - \sigma^2)e^{-\frac{2\pi ni}{3}}t + 2(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) = 0$$

Это уравнение решается непосредственно с помощью формул Кардана:

$$t = \sqrt[3]{-(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) + |\sigma(\lambda - \sigma)|\sqrt{(\sigma - \lambda)(3\lambda + 5\sigma)}} +$$
$$+ \sqrt[3]{-(\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma) - |\sigma(\lambda - \sigma)|\sqrt{(\sigma - \lambda)(3\lambda + 5\sigma)}}$$

Из этих формул имеем:

$$ab = \frac{1}{3}\left(t^2 - (\lambda^2 - \sigma^2)e^{-\frac{2\pi ni}{3}}\right)$$

Эти формулы показывают, что a, b являются корнями квадратного уравнения:

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

или

$$x^2 - tx + \frac{1}{3}\left(t^2 - (\lambda^2 - \sigma^2)e^{-\frac{2\pi ni}{3}}\right) \tag{25}$$

Решая уравнение (25), получим

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left\{ t \pm \sqrt{\frac{4\left((\lambda^2 - \sigma^2)e^{-\frac{2\pi ni}{3}}\right) - t^2}{3}} \right\}$$

где t определено выше.

В заключение отметим, что асимптотика собственных чисел и собственных функций первой граничной задачи для кубически анизотропных сред с позиций общей теории упругости рассмотрена впервые в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейль Г. Избранные труды. Математика, теоретическая физика.М.: Наука, 1984.
2. Новацкий.В. Теория упругости. Москва, “Мир” 1971 г.
3. Мартыненко.И.М. Волновые движения в кубически анизотропных телах// Теоретическая и прикладная механика. Минск, “Технопринт” 2004 г. Вып
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики, Москва,”Наука”.1958 г, т.4.
5. Журавков М.А., Мартыненко М.Д. Сингулярные решения и интегральные уравнения в механике деформируемых сред. Минск.: БГУ, 1999.
6. Лопатинский Я.Б. Теория общих граничных задач. “Наукова думка” 1965.
7. Болтянский.В.Г., Виленкин.Н.Я. Симметрия в алгебре. Москва, “Наука”, 1967г.
8. Драпкин А.Б. /Питання механики и математики. Серия мех.-мат. Изд ЛГУ. Вып 8. Львов 1957. стр 134-147.