Белорусский национальный технический университет, Минск

ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ЭРИ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Нифагин В.А.

The new real representations a component of stress tensor and deformation tensor are received through the three-dimensional harmonious and biharmonic functions forming stress function tensor. The found expressions allow to reduce the basic boundary problems of the spatial theory of elasticity to boundary problems for the biharmonic equation

В плоских задачах введение функции Эри [1] позволяет статические задачи теории упругости свести к бигармоническим задачам. Так известно представление тензора напряжений через функцию Эри [2]

$$T = E_2\nabla^2 U - \nabla\nabla U = R^{\alpha} R_{\alpha}\nabla^2 U - R^{\alpha} R^{\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} U \tag{1}$$

Здесь T – тензор второго ранга напряжений Коши, R^{α}, R_{α} – смешанные компоненты этого тензора; U — функция Эри..

В частности в декартовых координатах

$$\sigma_{11} = U,_{x_2^2}, \ \sigma_{22} = U,_{x_1^2}, \ \sigma_{12} = U,_{x_1 x_2} \tag{2}$$

Аналогичные представления компонент тензора напряжений можно найти через оставшиеся компоненты функции напряжений для пространственных задач [3-5] (представления Максвелла).

$$\sigma_{11} = Q_{33},_{x_3^2} + Q_{22},_{x_3^2}, \ \sigma_{22} = Q_{33},_{x_1^2} + Q_{11},_{x_3^2}, \ \sigma_{12} = -Q_{33},_{x_1 x_3} \tag{3}$$

$$\sigma_{23} = -Q_{11},_{x_2 x_3}$$

$$\sigma_{31} = -Q_{22},_{x_3 x_1}$$

$$\sigma_{33} = Q_{22},_{x_1^2} + Q_{11},_{x_2^2}$$

Однако сведение статических трехмерных задач теории упругости к бигармоническим задачам на этом направлении затруднено. Обобщим формулы (3) на случай пространства E_4.

Пусть Q^0 — тензор функций напряжений в главных осях, т.е. $Q^0 = Q_{ij}\delta_{ij}\left(i, j = \overline{1,4}\right)$, любая точка $M(x_i) \in E_4$.

Тогда обобщенный на E_4 тензор функции напряжений в форме Максвелла имеет вид

$$\sigma_{11} = Q^0_{33},_{x_2^2} + Q^0_{22},_{x_3^2} + Q^0_{11},_{x_4^2}; \ \sigma_{12} = -Q^0_{33},_{x_1 x_2}, \tag{4}$$

$$\sigma_{22} = Q^0_{33},_{x_1^2} + Q^0_{22},_{x_4^2} + Q^0_{11},_{x_3^2}; \ \sigma_{23} = -Q^0_{11},_{x_2 x_3},$$

$$\sigma_{33} = Q^0_{33},_{x_4^2} + Q^0_{22},_{x_1^2} + Q^0_{11},_{x_2^2}; \ \sigma_{34} = -Q^0_{33},_{x_3 x_4},$$

$$\sigma_{44} = Q^0_{33},_{x_3^2} + Q^0_{22},_{x_2^2} + Q^0_{11},_{x_1^2}; \ \sigma_{41} = -Q^0_{11},_{x_1 x_4},$$

$$\sigma_{1,3} = -Q^0_{22},_{x_1 x_3}; \ \sigma_{24} = -Q^0_{22},_{x_2 x_4}.$$

Вывод формул (4) основан на вычислении $Ink\left(Q^0\right) = rot\left(rotQ^0\right)^T$.

Заметим, что при вырождении $x_4 \to 0$ из (4) получаем (3). Кроме того, диагональные элементы Q^0_{mm} тензора функции напряжений удовлетворяют уравнениям Бельтрами:

$$\sigma_{ij},_{jj} + \frac{1}{1+\nu}\sigma,_{ij} = 0,\ i, j = \overline{1,4} \qquad (5)$$

а компоненты σ_{ij} из (4) не зависят от Q^0_{44}.

Введем в рассмотрение среднее давление $\sigma^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma^{(n)}_{ii}$, где индекс в скобках вверху обозначает размерность и соответствует числу аргументов функций и $\sigma^{(n)}_* = \sum_{i=1}^{4} \sigma^{(n)}_{ii}$. Тогда для $n = 4$ из (4) имеем

$$\sigma^{(4)}_* = \sigma^{(4)} = \sum_{i=1}^{4} \sigma^{(4)}_{ii} = \Delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^{3} Q^{0(4)}_{ii}\right).$$

$$\sigma^{(3)} = \sum_{m=1}^{3} \sigma^{(3)}_{ii} = \sigma^{(3)}_* - \sigma^{(3)}_{44}$$

$$\sigma^{(3)}_{44} = \sum_{i=1}^{n} Q^{0(3)}_{ii\cdot x_2^2}\ .$$

Аналогично для $n = 2$ (плоская задача) получаем

$$\sigma^{(2)}_* = \sum_{i=1}^{4} \sigma^{(2)}_{ii} = \Delta^{(2)}\left(\sum_{i=1}^{3} Q^{0(2)}_{ii}\right).$$

$$\sigma^{(2)} = \sum_{m=1}^{2} \sigma^{(2)}_{ii} = \Delta^{(2)} Q^{0(2)}_{33} = \sigma^{(2)}_* - \sigma^{(2)}_{33} - \sigma^{(2)}_{44}$$

$$\sigma^{(2)}_{33} = Q^{0^{(2)}}_{22\cdot x_1^2} + Q^{0(2)}_{11\cdot x_2^2}$$

$$\sigma^{(2)}_{44} = Q^{0(2)}_{11\cdot x_1^2} + Q^{0(2)}_{22\cdot x_2^2}$$

Из последних соотношений следуют общие формулы для любой размерности n:

$$\sigma^{(n)}_* = \Delta^{(n)} U^{(n)}$$

$$U^{(n)} = \sum_{i=1}^{3} Q^{(n)0}_{ii}\ , \qquad (6)$$

С помощью формул (5) и закона Гука в E_4 в тензорной форме для, таким же образом, введенных тензоров деформаций:

$$2\mu\varepsilon^{(n)} = T^{(n)} - \frac{\nu}{1+\nu}\ \sigma^{(n)} E$$

$$2\mu\varepsilon^{(n)}_* = T^{(n)}_* - \frac{\nu}{1+\nu}\ \sigma^{(n)}_* E \qquad (7)$$

первые инварианты тензоров деформаций будут:

$$2\mu\theta^{(n)} = \frac{1-(n-1)\nu}{1+\nu}\,\sigma^{(n)};$$
$$2\mu\theta_*^{(n)} = \frac{1-3\nu}{1+\nu}\,\sigma_*^{(n)} \tag{8}$$

здесь $\theta^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ii}^{(n)}$, $\theta_*^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ii}^{(n)}$.

Учитывая (6), (7) введенный вспомогательный тензор $\varepsilon_*^{(n)}$ можно представить через функцию $U^{(n)}$ или компоненты тензора функций напряжений

$$2\mu\varepsilon_*^{(n)} = Ink\left(Q^{0(n)}\right) - \frac{\nu}{1+\nu}\,\Delta^{(n)} I_1\left(Q^{0(n)}\right)E \tag{9}$$

здесь первый инвариант $I_2\left(Q^{0(n)}\right)$ совпадает с функцией $U^{(n)}$ из (6).

Вектор смещений, принимая во внимание (9) будет

$$2\mu u_i^{(n)} = \int\left(Ink\left(Q^{0(n)}\right)_{\cdot ii} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\Delta^{(n)}\left(I_1\left(Q^{0(n)}\right)\right)\right)dx_i\,. \tag{10}$$

В статических задачах средние напряжения и деформации являются гармоническими функциями в ограниченных областях $G^{(n)} \subset E_n$ [6]. В тоже время для плоских задач компоненты вектора перемещения, тензоров напряжений и деформаций выражаются в декартовых координатах через единственную бигармоническую функцию Эри. Для трехмерных областей общие решения основных задач теории упругости реализуются через бигармонический вектор [7]. Но исходя из тензорного дифференциального уравнения $\Delta Q = \frac{1}{1+\nu}\left(E\Delta(I_1(Q)) - div\,div\,Q\right) - \frac{1-2\nu}{1+\nu}\left(def\,div\,\Phi - \Delta(I_1(Q))\right)$ нельзя получить алгоритм построения функции Эри в E_3, так как уравнение определяет только первый инвариант $I_1\left(Q^0\right)$ и $div\,div\left(Q^0\right)$.

Из введенных компонент среднего напряжения $\sigma_*^{(n)}$ и формул (6) заключаем, что функция $U^{(n)}$ — первый инвариант тензора $Q^{0(n)}$ является бигармонической в конечной области $G^{(n)} \subset E_n$. Для касательных напряжений $\sigma_{ij}(i \neq j)$, учитывая (4), (5), (6), заключаем, что выполняются условия

$$\Delta^{(n)}\left(\frac{1}{1+\nu}U^{(n)} - Q_{33}^{0(n)}\right)_{\cdot x_1 x_2} = 0 \tag{11}$$

С учетом круговых перестановок $\to x_1 \to x_2 \to x_3 \to$ и $\to Q_{11}^{0(n)} \to Q_{22}^{0(n)} \to Q_{33}^{0(n)} \to$.

Условия (11) выписаны для E_3, в случае E_4 к ним добавятся еще три аналогичных уравнения.

Таким образом, из (11) вытекает существование трех гармонических функций $g_{mm}^{(n)}$, что

$$-Q_{33\cdot x_1 x_2}^{(n)} + \frac{1}{1+\nu}U_{\cdot x_1 x_2}^{(n)} = g_{33}^{(n)}$$

с круговой перестановкой индексов $\to 1 \to 2 \to 3 \to$.

Тогда для функций напряжений

$$Q_{33}^{0(n)} = \frac{1}{1+\nu}U^{(n)} - \iint_{D_{12}} g_{33}^{(n)}dx_1 dx_2 \tag{12}$$

$(\to 1 \to 2 \to 3 \to)$
или

$$Q_{mm}^{0(n)} = \frac{1}{1+\nu} U^{(n)} - F_{mm}^{(n)},\ m = \overline{1,3}, \tag{13}$$

где

$$F_{mm} = \iint\limits_{D_{12}} g_{mm}^{(n)} dx_1 dx_2,\ m = \overline{1,3} \tag{14}$$

$(\to 1 \to 2 \to 3 \to)$

Заметим, что гармонические функции $g_{mm}, m = \overline{1,3}$ выбираются из выполнения условий:

$$\sum_{i=1}^{3} F_{ii}^{(n)} = \frac{2-\nu}{1+\nu} U^{(n)}$$

или

$$\iiint\limits_{v} div\,\vec{g}\,dv = \frac{2-\nu}{1+\nu} U^{(n)}, \tag{15}$$

где $\vec{g} = (g_{11}, g_{22}, g_{33})$.

Из (4), (5), (13) нормальные напряжения удовлетворяют уравнениям

$$\Delta^{(3)}\left(F_{33 \cdot x_2^2}^{(3)} + F_{22 \cdot x_3^2}^{(3)}\right) = 0; \tag{16}$$

$$\Delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^{3} F_{ii \cdot x_2^2}^{(3)}\right) = 0 \qquad (\to 1 \to 2 \to 3 \to).$$

Тогда из (15), (16) получаем:

$$F_{22 \cdot x_1^2}^{(3)} - F_{22 \cdot x_2^2}^{(3)} = \frac{2-\nu}{1+\nu} U_{x_1^2}^{(3)} - F_{33 \cdot x_1^2}^{(3)} + F_{33 \cdot x_3^2}^{(3)} - P^{(3)}. \tag{17}$$

$(\to 1 \to 2 \to 3 \to)$

Таким образом, функции $F_{mm}^{(3)}$ из (14) и функции напряжений $Q_{mm}^{0(n)}$ из (13) полностью определяются двумя произвольными функциями: гармонической $P^{(3)}$ и бигармонической $U^{(3)}$. Для построения функций напряжений необходимо по определенной гармонической функции $g_{33}^{(n)}$ из (14) найти $F_{33}^{(n)}$, затем из условия (17) найти $F_{22}^{(n)}$ и определить функцию

$$F_{11}^{(n)} = \frac{2-\nu}{1+\nu} U^{(n)} - F_{22}^{(n)} - F_{33}^{(n)}. \tag{18}$$

Наконец, с помощью найденных $F_{mm}^{(n)}$ из (13) получить представления для функций напряжений.

Заметим, что вместо трех различных функций $Q_{mm}^{0(n)}$ можно говорить об одной обобщенной функции, заданной на круговой перестановке. Это же относится к вспомогательным функциям $g_{mm}^{(n)}$ и $F_{mm}^{(n)}$. Кроме того, функции напряжений $Q_{mm}^{0(n)}$ из (13), (14) являются суперпозициями бигармонических и гармонических функций, а для пространственных задач — суперпозициями только бигармонических функций $F_{mm}^{(n)}$.

Например, при вырождении $E_3 \to E_3 \to E_2$ (плоские задачи) функции напряжений $Q_{33}^{0(2)} = U^{(2)}$, $Q_{11}^{0(2)} = Q_{22}^{0(2)} = \nu U^{(2)}$, что соответствует известным результатам.

Применяя представления (13), (14) для функций напряжений, выпишем компоненты тензора напряжений через гармонические и бигармонические функции в E_3:

$$\sigma_{11}^{(3)} = \frac{1}{1+\nu}\left(\Delta^{(3)}U^{(3)} - U^{(3)}_{,x_1^2}\right) - F^{(3)}_{33,x_2^2} - F^{(3)}_{22,x_3^2}. \quad (19)$$

$$\sigma_{12}^{(3)} = -\frac{1}{1+\nu}U^{(3)}_{x_1x_2} + q_{33}^{(3)}, \ (\to 1 \to 2 \to 3 \to)$$

Средние напряжения будут

$$\sigma_*^{(n)} = \frac{3}{1+\nu}\Delta^{(n)}U^{(n)} - q_{23}^{(n)} - q_{31}^{(n)} - q_{12}^{(n)}. \quad (20)$$

$$\sigma^{(4)} = \sigma_*^{(4)}$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{2}{1+\nu}\Delta^{(3)}U^{(3)} - q_{33}^{(3)} - q_{31}^{(3)} - q_{12}^{(3)} = \sigma_*^{(3)},$$

Здесь гармонические функции $q_{ij}^{(n)}$ определяются через гармонические функции $q_{mm}^{(n)}$ из условий сопряжения Моисила-Теодереско [8].

Полученные выражения (19), (20) можно использовать для нахождения компонент тензора деформаций в E_3 через те же гармонические и бигармонические функции:

$$2\mu u_{1,x_1} = -\frac{\nu}{1+\nu}U^{(3)}_{,x_1^2} + \frac{1-\nu}{(1+\nu)^2}\Delta^{(3)}U^{(3)} + \frac{\nu}{1+\nu}\left(q_{31}^{(3)} + q_{12}^{(3)}\right) - \frac{1}{1+\nu}q_{23}^{(3)}. \quad (21)$$

$$\mu\left(u_{1,x_2} + u_{2,x_1}\right) = \frac{1}{1+\nu}U^{(3)}_{x_1x_2} + g_{33}^{(3)}$$

$$(\to 1 \to 2 \to 3 \to)$$

$$2\mu\theta^{(3)} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}\left(\frac{2}{1+\nu}\Delta^{(3)}U^{(3)} - q_{23}^{(3)} - q_{31}^{(3)} - q_{12}^{(3)}\right) \quad (22)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. М.: Наука, 1966.
2. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
3. Галеркин Б.Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле // Собрание сочинений Б.Г. Галеркина. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 1. С. 318—321.
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. 3-е изд. М.: Наука, 1984.
5. Александров Л.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978.
6. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974.
7. Галеркин Б.Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле // Собрание сочинений Б.Г. Галеркина. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 1. С. 318—321.
8. Мальгранж Б. Лекции по теории функций комплексных переменных. М.: Наука, 1969.