

## МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛЕСА С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ПРОДОЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Широков Б.Н., Альгин В.Б., Иванов В.Г.

*The paper discusses the widespread state-of-the-art statical and dynamic models of contact tyre/surface interaction for friction coefficient determination and simulation. Developing the existing procedures, the fuzzy and neuro-fuzzy models of friction coefficient recognition are proposed. The simulation results are given for models under discussion with a subsequent analysis.*

### *Введение*

Алгоритмы систем управления автомобилем используют информацию о коэффициенте сцепления и настроены на работу с сухим, влажным (как функция высоты водяного слоя в контакте) или обледенелым покрытием. Большой разброс значений максимума кривой коэффициента сцепления от проскальзывания (далее  $\mu(s)$ -кривой) не позволяет закладывать в алгоритм точные аналитические модели взаимодействия колеса с дорогой. Вследствие этого используют статические модели взаимодействия колеса и опорной поверхности, а применение динамических моделей ограничено быстродействием аппаратной части системы управления.

В данной статье рассматриваются современные наиболее распространенные статические и динамические модели контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью, связанные с определением и моделированием коэффициента сцепления. В развитие существующих методологий предложены модели нечеткого и нечетко-нейронного распознавания коэффициента сцепления. Представлены результаты моделирования предложенных моделей с их анализом.

### *1 Статические модели контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью*

Большинство статических моделей шин, основывается на использовании математических формул, описывающих связь между скольжением колеса и коэффициентом сцепления или реализуемой продольной силой на колесе. Они выбираются исходя из эмпирических исследований различных шин. Стоит также отметить, что модели, используемые в реальных блоках систем управления автомобиля, являются упрощенными, в основном статическими, и значительно отличаются по степени сложности от моделей, используемых при компьютерном моделировании.

В общем случае аппроксимирование зависимости  $\mu(s)$  может быть выполнено частью параболы (либо экспоненты), гиперболы и прямой, как это показано штриховыми линиями на рис. 1.

Уравнение параболы:  $\mu = \mu_0 + \mu_{\max} \cdot \sqrt{s}$  ;

уравнение гиперболы:  $\mu = \mu_{AS} \cdot \frac{\mu_H \cdot s_{AS}}{s - s_{AS}}$ .

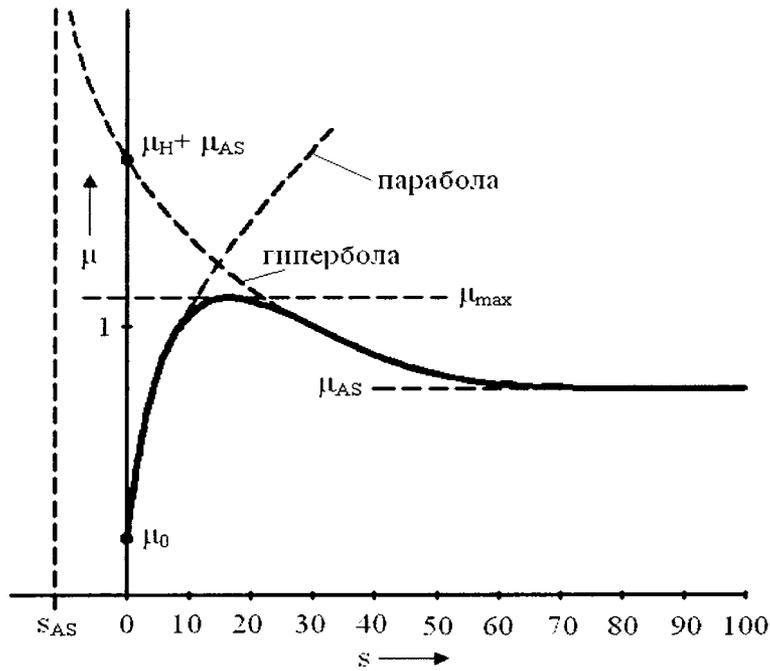


Рис. 1. Аналитическое аппроксимирование зависимости коэффициента сцепления  $\mu$  от проскальзывания  $s$

В настоящее время ряд аппроксимирующих зависимостей получили широкое распространение в блоках управления и при компьютерном моделировании.

Буркхардт [1] предложил описывать зависимость силы тяги  $F$  от проскальзывания  $s$  и скорости  $v$  следующим образом:

$$F(s, v) = (c_1 \cdot (1 - e^{-c_2 \cdot s}) - c_3 \cdot s) \cdot e^{-c_4 \cdot v}.$$

Получаемая приближенная кривая зависит от скорости движения  $v$ . Также Буркхардт предложил зависимость без учета скорости, которая продолжительное время использовалась в электронных блоках систем активной безопасности:

$$F(s) = c_1 \cdot (1 - e^{-c_2 \cdot s}) - c_3 \cdot s.$$

Кинке и Дайс [2] пренебрегли зависимостью скорости в уравнении Буркхардта и, после аппроксимации с использованием экспоненты, получили следующее выражение:

$$F(s) = k_s \cdot \frac{s}{c_1 \cdot s^2 + c_2 \cdot s + 1},$$

где  $k_s$  – наклон кривой  $F(s)$  при нулевом скольжении,  $c_1$  и  $c_2$  – задаваемые коэффициенты.

Также часто встречается упрощенная модель вида [3]:

$$F(s) = c_1 \cdot \sqrt{s} - c_2 \cdot s.$$

Следует отметить, что коэффициенты  $c_1$ – $c_4$ , входящие в вышеприведенные уравнения, являются эмпирическими и зависят в общем случае от множества параметров, таких как скорость, нормальная нагрузка, тип и состояние дорожной поверхности и т.д.

Одной из наиболее известных эмпирических моделей является тригонометрическая модель Пачейки [4], которая также известна как "Tire Magic Formula".

$$F(s) = c_1 \cdot \sin(c_2 \cdot \arctan(c_3 \cdot s - c_4 \cdot (c_3 \cdot s - \arctan(c_3 \cdot s))))).$$

На рис. 2 приведено пояснение коэффициентов, входящих в "магическую формулу" Пачейки.

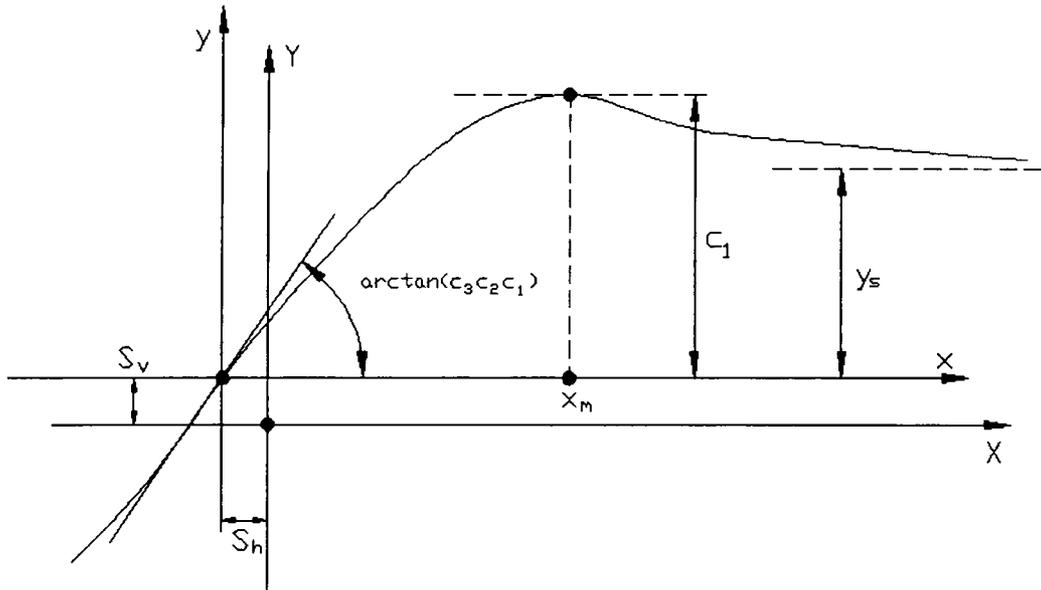


Рис. 2. Пояснение коэффициентов, входящих в "магическую формулу" Пачейки

## 2 Динамические модели контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью

### 2.1 Модель Даля

Модель Даля [5] была разработана для моделирования систем управления с учетом трибологических факторов. Начальной точкой модели является кривая растяжения-сжатия из теории механики материалов, которая показана на рис. 3.

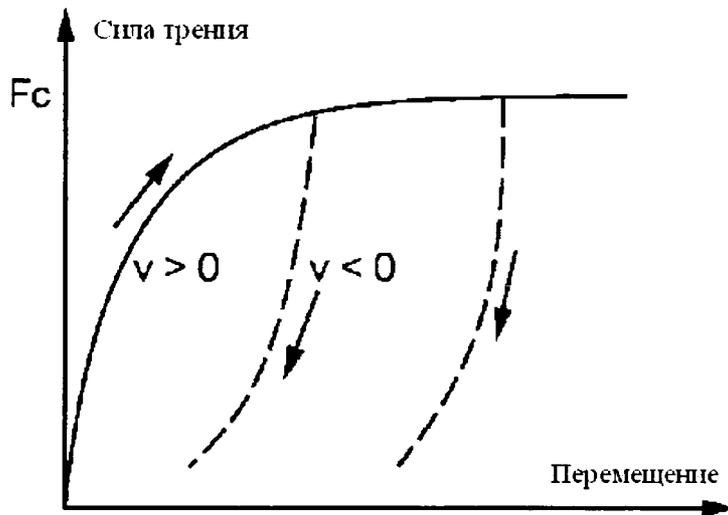


Рис. 3. Сила трения в зависимости от перемещения для модели Даля

При нагружении сила трения постепенно увеличивается до появления разрыва. Даль моделировал кривую растяжения-сжатия с использованием следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dF}{dx_r} = \sigma_0 \cdot \left( 1 - \frac{F}{F_c} \cdot \text{sgn}(v_r) \right)^\beta,$$

где  $x_r$  – относительное перемещение;

$v_r = dx_r/dt$  – относительная скорость;

$F$  – текущая сила трения;

$F_c$  – максимальная (кулоновская) сила трения;

$\sigma_0$  – коэффициент жесткости;

$\beta$  – коэффициент, характеризующий форму кривой растяжения-сжатия, обычно равный 1. Более высокие значения  $\beta$  используются для кривой растяжения-сжатия с резко выраженными изгибами.

При интегрировании уравнения будет наблюдаться монотонное нарастание  $F(t)$ . Поэтому, модель Даля не имеет максимума, как в модели Пачейки.

Следует отметить, что в данной модели сила трения является только функцией перемещения и ее направление зависит от относительной скорости. Это означает, что рост силы трения в плоскости  $F - x_r$  будет зависеть только от направления скорости  $v_r$ , и не зависит от ее значения. Это объясняет гистерезисные петли на рис. 4. Анализируя модель, Даль отметил, что

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx_r} \cdot \frac{dx_r}{dt} = \frac{dF}{dx_r} \cdot v_r = \sigma_0 \cdot \left(1 - \frac{F}{F_c} \cdot \text{sgn}(v_r)\right)^\beta \cdot v_r.$$

Фактически, данная модель является обобщением модели кулоновского трения. Модель Даля также не содержит эффекта Штрибека и статического трения.

При  $\beta=1$ , уравнения можно записать в следующем виде:

$$\frac{dF}{dt} = \sigma_0 \cdot v_r - \frac{F}{F_c} \cdot |v_r|.$$

## 2.2 Щеточная модель

Хэссиг и Фридланд [6] ввели модель трения, которая описывает поведение микроскопических контактов между двумя поверхностями. Количество контактов и их положение выбирается случайно из-за неровностей поверхностей. Каждая точка контакта представляется как связь между гибкими щетками. Когда поверхности перемещаются относительно друг друга, напряжение в связи увеличивается, и щетки работают в качестве пружин, создавая силу трения. Эта сила может быть получена следующим образом:

$$F = \sum_{i=1}^N \sigma_0 \cdot (x_i - b_i),$$

где  $N$  – количество щеток,  $\sigma_0$  – жесткость щеток,  $x_i$  – относительное положение щеток,  $b_i$  – положение возникновения связи.

Сложность модели возрастает с увеличением  $N$ . Оптимальные результаты получаются при 20-25 щетках, но даже одна щетка дает корректное качественное поведение. Жесткость щеток  $\sigma_0$  может зависеть от скорости перемещения. Одним из интересных свойств модели является то, что она захватывает хаотичную природу трения. Хаотичность зависит от числа щеток. Модель не эффективна для моделирования из-за ее сложности. Движение в фазе сдвига может быть колебательным, т.к. в щеточной модели отсутствует демпфирование.

## 2.3 Модель LuGre

Модель LuGre [7] является одной из наиболее распространенных при моделировании контакта колеса с дорогой, т.к. объединяет ряд особенностей фрикционного взаимодействия.

Например, наличие эффекта Штрибека. Модель Штрибека характеризуется отрицательной производной относительно скорости скольжения для ее малых значений [8]. Эта одна из ключевых особенностей трения, которая способствует граничному циклу и скачкообразному движению при трении. Кроме того, модель LuGre работает как пружина с демпфером, когда линеаризуется при малых перемещениях. Следует отметить, что представление контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью чаще всего возможно двумя способами: с помощью эластичной балки, либо с помощью упруго-

демпфированной связи (пружина с демпфером). В современных программных средствах используется второй способ.



Рис. 4. Фрикционное взаимодействие в модели LuGre

Качественное представление модели LuGre показано на рис. 4. Две поверхности контактируют при различных выступах шероховатости поверхности на микропрофиле. Эти выступы представлены с помощью щеток, и щетки деформируются подобно пружине при относительной скорости между поверхностями. Деформация пружин увеличивается при росте силы трения. Если деформация достаточно большая, тогда щетки будут проскальзывать случайным образом. Хотя деформация щеток случайна, модель LuGre описывается только средней деформацией. Средняя деформация  $Z$  моделируется с помощью дифференциального уравнения первого порядка:

$$\dot{Z} = V - \frac{|V|}{G(V)} Z,$$

где  $V$  – относительная скорость между поверхностями;  
 $G(V)$  – функция, описывающая эффект Штрибека.

Функция  $G(V)$  позволяет реализовать более высокий коэффициент статического трения, чем динамический:

$$G(V) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ F_c + (F_s - F_c) \cdot e^{-\left(\frac{V}{V_s}\right)^2} \right\},$$

где  $F_c$  – кинетическая сила трения;  
 $F_s$  – статическая сила трения;  
 $\sigma_0$  – общий коэффициент жесткости щеток;  
 $V_s$  – скорость скольжения Штрибека.

Окончательно, сила трения в модели LuGre задается с помощью:

$$F_L(V, Z) = \sigma_0 \cdot Z + \sigma_1 \cdot \dot{Z} + \sigma_2 \cdot V,$$

где  $\sigma_1$  – коэффициент демпфирования и  $\sigma_2$  связано с вязкостным трением. Следует отметить, что  $V_s$  является очень малой скоростью скольжения. Ниже  $V_s$  поверхность трения находится в микроскольжении.

### 3 Разработка нечетких и нечетко-нейронных моделей контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью

#### 3.1 Нечеткая модель

Основной идеей нечетких моделей контакта шины с дорогой является определение типа и состояния дорожного покрытия по информации от датчиков и прогнозирование на основе этих данных значения коэффициента сцепления [9].

Рассмотрим вариант с двумя нечеткими контроллерами (специализированными микроЭВМ), условно названными контроллером шероховатости и контроллером условий окружающей среды (рис. 5).

В качестве входных переменных контроллера шероховатости используются полученные сканированием данные о микро- и макропрофиле поверхности для текущего участка дороги. Выходной переменной является некоторое базовое значение коэффициента сцепления колеса с дорогой, характерное для типового дорожного покрытия. Правила, заложенные в блоке расчета, выведены на основе информации, приведенной в работах [10, 11]. В данных работах микропрофилем считаются шероховатости до 2 мм, а макропрофилем – от 2 мм до 25 мм. Также в них указаны характерные интервалы шероховатостей для различных дорожных покрытий (например, асфальт, асфальтобетон и т.д.).

Контроллер условий окружающей среды производит корректировку базового значения коэффициента сцепления по показаниям температуры воздуха и дороги, влажности и интенсивности атмосферных осадков. В данном контроллере заложены правила, составленные по статистическим результатам погодных наблюдений.

Оба контроллера объединены в логический блок, работающий по следующему алгоритму:

Если модуль величины  $(\mu_{inv} - \mu_{rou})$  не больше установленной величины (уставки) в 0,1, то выходной коэффициент сцепления представляет собой среднее арифметическое.

Если величина  $(\mu_{inv} - \mu_{rou})$  больше уставки в 0,1, то выходной коэффициент сцепления представляет собой коэффициент сцепления по шероховатости.

Если величина  $(\mu_{inv} - \mu_{rou})$  меньше уставки в -0,1, то выходной коэффициент сцепления представляет собой коэффициент сцепления по окружающей среде.

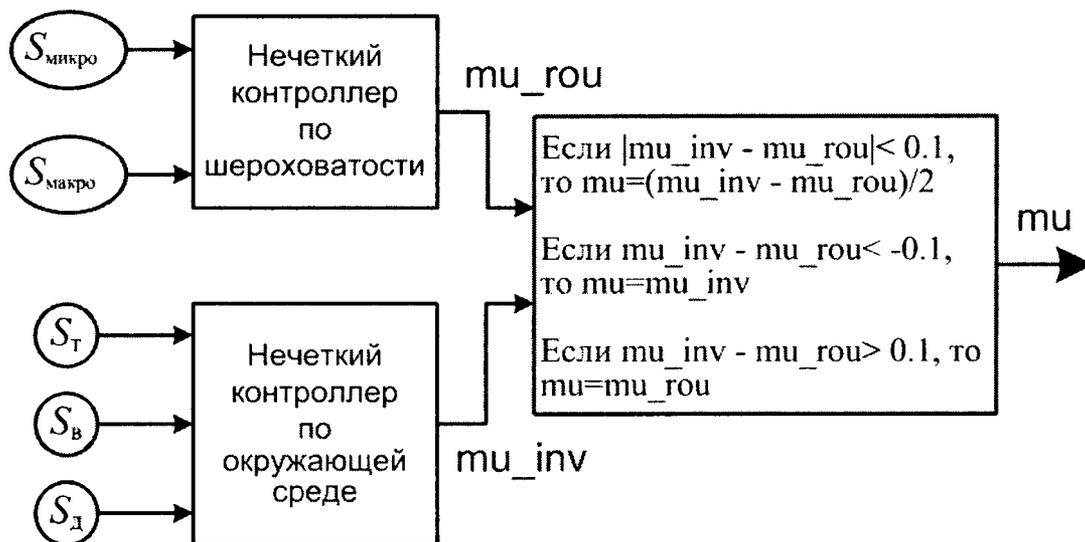


Рис. 5. Схема метода нечеткой детерминации коэффициента сцепления:  $S_{\text{микро}}$  – микропрофиль;  $S_{\text{макро}}$  – макропрофиль;  $S_T$  – температура;  $S_B$  – влажность;  $S_D$  – интенсивность дождя;  $\mu_{rou}$  – коэффициент сцепления по шероховатости;  $\mu_{inv}$  – коэффициент сцепления по окружающей среде;  $\mu$  – выходное значение коэффициента сцепления

На рис. 6 показаны примеры моделирования для сухого (а) и влажного покрытия (б).

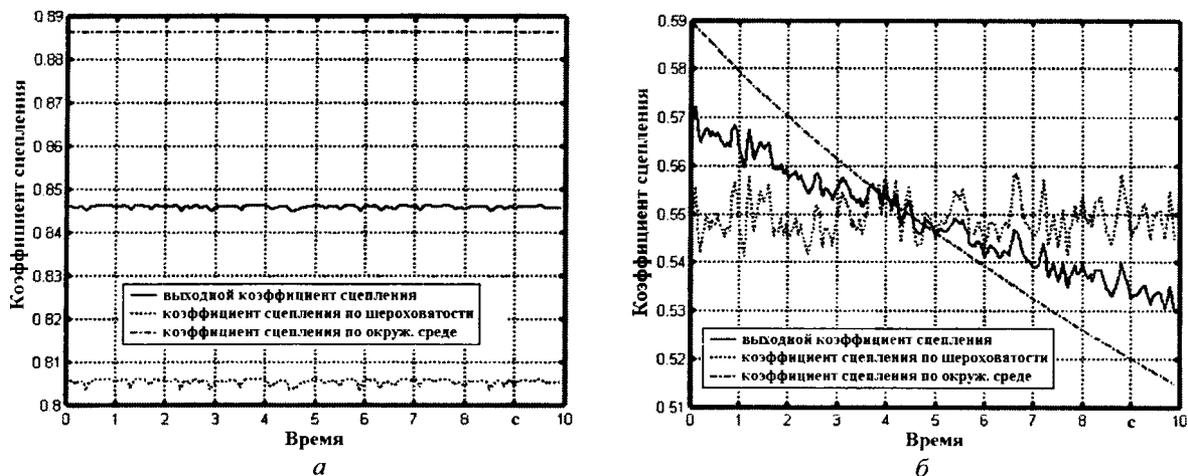


Рис. 6. Примеры моделирования коэффициента сцепления для различных покрытий:  
а – сухое и б – влажное покрытие

### 3.2 Нечетко-нейронная модель

Для решения задачи идентификации дорожных свойств с помощью модели нейронной сети в первую очередь требуется выбрать её структуру и провести обучение на основе имеющейся информации, например, по статистическим данным или экспертным оценкам. Для этого можно использовать нейро-нечёткий вывод на основе гибридной сети, обучающейся по алгоритму обратного распространения ошибки. Он представляет собой итеративный градиентный алгоритм минимизации среднеквадратичного отклонения значений выхода от желаемых значений.

Исследование данной сети для решаемой задачи проводилось с помощью адаптивной системы нейро-нечёткого вывода ANFIS, реализованной в среде MATLAB.

За основу для дальнейшего исследования целесообразно взять следующую задачу нечёткого управления: прогнозировать максимум коэффициента сцепления по характерным показателям  $\mu(s)$ -кривой, рис. 7. В этом случае процесс исследования будет разбит на три этапа.

Первоначально следует исследовать нейронную сеть с функциями принадлежности, составленными на основе эмпирического анализа. В этом случае имеется по четыре функции принадлежности для параметров  $k_{\mu}$  и  $\mu_l$  и три функции принадлежности для параметра  $s_l$ , а вид нейронной сети будет соответствовать рис. 8. Для её обучения был выбран гибридный метод, представляющий собой комбинацию метода наименьших квадратов и метода убывания обратного градиента. При использовании средств MATLAB при заданных функциях принадлежности обучение было осуществлено за 25 циклов. Ошибка обучения при этом составила 0,085847.

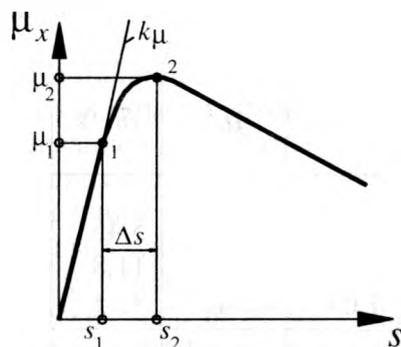


Рис. 7. Характерные точки зависимости коэффициента окружной силы  $\mu$  от коэффициента относительного проскальзывания  $s$

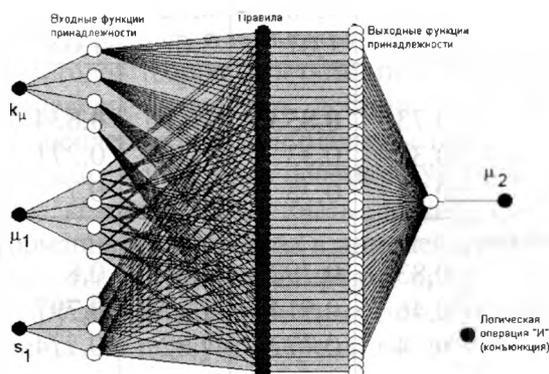


Рис. 8. Структура нечёткой нейронной сети

Для организации процедуры нечёткого вывода была использована статистическая выборка из таблицы 1. Полученные значения максимума  $\mu(s)$ -кривой  $\mu_2^1$  также даны в таблице 1. Дополнительно также рассчитана величина относительного отклонения:

$$\delta_1 = \frac{|\mu_2^{\text{эсп}} - \mu_2^1|}{\mu_2^{\text{эсп}}} \cdot 100\% .$$

Для второго этапа было выбрано исследование сети, в которой количестве функций принадлежности осталось без изменений, но внешний вид функций был сгенерирован средой MATLAB в виде функций Гаусса или плотности нормального распределения:

$$f = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}} ,$$

где  $\sigma$  – дисперсия распределения;  $c$  – математическое ожидание. При моделировании достигнутая ошибка обучения составила 0,078469. Соответствующие результаты определения максимума  $\mu(s)$ -кривой  $\mu_2^2$  также занесены в таблицу 1.

На третьем этапе исследования было проведено усложнение структуры нечёткой нейронной сети. Это было достигнуто увеличением количества функций принадлежности. Было сгенерировано по пять функций принадлежности для каждой из входных переменных. Как и в предыдущем случае, для описания были использованы функции Гаусса. При моделировании данной сети ошибка обучения составила 0,062652. Соответствующие результаты определения максимума  $\mu(s)$ -кривой  $\mu_2^3$  также приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты определения максимума коэффициента  $\mu_x$  с помощью нейронных нечётких сетей

Тип шины, дороги и данные произвольной статистической выборки	$\mu_2^{эксн}$	$\mu_2^1$	$\delta_1, \%$	$\mu_2^2$	$\delta_2, \%$	$\mu_2^3$	$\delta_3, \%$
Летние шины, сухая дорога: $k_\mu=7,12; \mu_1=0,67; s_1=2,5$	1,1	1,04	5,45	0,999	9,18	0,979	11,0
$k_\mu=11,43; \mu_1=0,72; s_1=1,5$	1,0	0,882	11,8	0,935	6,5	0,925	7,5
$k_\mu=11,43; \mu_1=0,78; s_1=2$	1,04	0,949	8,75	1,06	1,9	1,02	1,92
Зимние шины, сухая дорога: $k_\mu=4,51; \mu_1=0,64; s_1=3,5$							
$k_\mu=4,33; \mu_1=0,53; s_1=3,5$	1,08	1,03	4,62	1,05	2,78	1,05	2,78
$k_\mu=4,01; \mu_1=0,8; s_1=5,0$	0,97	0,963	0,72	1,03	6,19	0,973	0,31
	1,11	1,07	3,6	1,05	5,4	1,1	0,91
Летние шины, влажная дорога: $k_\mu=5,67; \mu_1=0,56; s_1=2,5$	0,73	<b>0,853</b>	16,85	<b>0,834</b>	14,25	<b>0,813</b>	11,37
$k_\mu=2,75; \mu_1=0,2; s_1=2,0$	0,3	0,33	10,0	0,271	9,67	0,328	9,33
$k_\mu=19,08; \mu_1=0,5; s_1=1,0$	0,74	0,73	1,35	0,77	4,05	0,74	0,0
Зимние шины, влажная дорога: $k_\mu=5,67; \mu_1=0,48; s_1=2,0$	0,83	0,792	4,58	0,8	3,75	0,859	3,49
$k_\mu=2,25; \mu_1=0,38; s_1=4,5$	0,46	<b>0,514</b>	11,74	<b>0,797</b>	73,26	0,461	0,22
$k_\mu=6,31; \mu_1=0,51; s_1=1,5$	0,74	0,772	4,32	0,774	4,59	0,744	1,04
Летние шины, лёд: $k_\mu=9,51; \mu_1=0,06; s_1=1,0$	0,083	<b>0,109</b>	31,33	0,0892	7,47	0,08	0,54
$k_\mu=14,3; \mu_1=0,138; s_1=1,25$	0,175	<b>0,136</b>	22,29	0,167	4,57	0,175	0,0
$k_\mu=5,14; \mu_1=0,05; s_1=1,5$	0,07	<b>0,0907</b>	29,57	<b>0,0564</b>	19,43	<b>0,087</b>	24,29
Зимние шины, лёд: $k_\mu=4,33; \mu_1=0,06; s_1=1,5$	0,075	<b>0,0905</b>	20,67	0,0737	1,73	<b>0,0837</b>	11,6
$k_\mu=14,3; \mu_1=0,185; s_1=1,5$	0,26	0,242	6,92	<b>0,228</b>	12,31	0,238	8,46
$k_\mu=11,43; \mu_1=0,175; s_1=2,0$	0,235	0,235	0,0	<b>0,283</b>	20,43	0,235	0,0

Анализ результатов из таблицы 1 показывает, что все три варианта идентификации дороги с помощью нечёткой нейронной сети в подавляющем большинстве случаев адекватно распознают значение максимума  $\mu(s)$ -кривой (расхождения свыше 10% в таблице выделены жирным шрифтом). Повышения точности при использовании данного аналитического метода можно добиться двумя путями.

Во-первых, точность может возрасти за счёт увеличения количества функций принадлежности для входных переменных. Однако, это ведёт к усложнению структуры нечёткой нейронной сети и увеличению затрат времени на процесс обучения, что может препятствовать введению подобной сети в структуру алгоритма системы управления автомобиля.

Во-вторых, качество распознавания выходной переменной может быть улучшено при замене одной глобальной нечёткой нейронной сети для всех дорожных условий на несколько локальных, каждая из которых отвечает за свой тип дорожного покрытия. В рассматриваемом случае это могут быть три локальных нечётких нейронных сети – для сухой, влажной и обледенелой дороги.

### *Заключение*

Проведенный обзор и анализ моделей контактного взаимодействия шины с опорной поверхностью позволяет сделать ряд принципиальных выводов.

1) Разработка моделей шины как объекта прикладной динамики нацелена в настоящее время на их последующее использование в алгоритмах управления системами автомобиля. С этой позиции специалистам приходится постоянно разрешать конфликт между простотой аппаратного представления модели шины и её точностью. С одной стороны, большинство статических моделей шины не вызывает сложностей при их процессорной обработке, однако их надежность напрямую связана с объемом сбора предварительной экспериментальной информации. Кроме этого, статические модели не могут претендовать на универсальность из-за большого набора эмпирических коэффициентов, необходимых для математического описания. Напротив, в динамических моделях используются, как правило, универсальные параметры механики и трибологии, но при этом описание подобных моделей усложняется на несколько порядков по сравнению со статическими моделями.

2) Принципиально новым решением для исследований контактного взаимодействия шины может стать использованием методов теории нечетких множеств. В представленной работе было показано, что нечеткие процедуры позволяют достичь приемлемой точности результатов детерминации коэффициента сцепления при минимальном наборе входной информации. Кроме этого, уже известно много продвинутых методик нечеткого управления, успешно используемых в различных областях техники, которые могут быть перенесены и на системы управления автомобиля, требующие информацию о параметрах взаимодействия шины с дорогой.

В развитие данной работы авторы планируют представить результаты детального анализа для моделирования других, не менее важных для динамики автомобиля, параметров, характеризующих работу шины – в первую очередь, коэффициента сопротивления качению и гистерезисных потерь.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Burckhardt, M., Fahrwerktechnik: Radschlupfregelsysteme, Vogel-Verlag, Germany, 1993
2. Kiencke, U. and Daiss, A., "Estimation of Tyre Friction for Enhanced ABS Systems," Proceedings of the AVEG'94, 1994
3. Canudas de Wit, C., Horowitz, R. and Tsotras, P., "Model-Based Observers for Tire/Road Contact Friction Prediction," In New Directions in Nonlinear Observer Design, Nijmeijer, H. and T.I Fossen (Eds), Springer Verlag, Lectures Notes in Control and Information Science, May 1999.
4. Hans B. Pacejka. Tire and Vehicle Dynamics. – UK.: Elsevier. – 2006. – 642 p.
5. Dahl, P.R., "Solid Friction Damping of Mechanical Vibrations," AIAA Journal, 1976. – Vol. 14. – No. 12. – pp. 1675-1682.
6. D. A. Haessig and B. Friedland. On the modelling and simulation of friction. J Dyn Syst Meas Control Trans ASME. – September 1991. – 113H31:354-362.
7. Canudas de Wit, C. and Tsotras, P., "Dynamic Tire Friction Models for Vehicle Traction Control," In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, AZ. – 1999. – pp. 3746–3751.
8. Deur, J., "Modeling and Analysis of Longitudinal Tire Dynamics Based on the LuGre Friction Model," In Proceedings of the IFAC Conference on Advances in Automotive Control, Karlsruhe, Germany. – 2001. – pp. 101–106.
9. Ivanov V., Algin V., Shyrokau B. Intelligent control for ABS application with identification of road and environmental properties, International Journal of Vehicle Autonomous System. – 2006. – Vol. 4. – No. 1. – pp. 44-67.
10. Крагельский И.В., Михин Н.М. Узлы трения машин: Справочник. – М.: Машиностроение, 1984. – 280 с.
11. Fischlein, H., R. Gnadler and H.-J. Unrau. Der Einfluss der Fahrbahnoberflächenstruktur auf das Kraftschlussverhalten von Pkw-Reifen bei trockener und Nasser Fahrbahn. ATZ Automobiltechnische Zeitschrift, 2001. – №103. – p. 950-962.