УДК 621.824:51

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ВАЛИКО-КОЛЬЦЕВЫМ МЕХАНИЗМОМ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ РАУСА

Инж. ЛАПАНОВИЧ И. О.

Белорусский национальный технический университет

Валико-кольцевые механизмы (ВКМ) нашли широкое применение в технике для преобразования вращательного движения вала в возвратно-поступательное движение каретки [1]. При этом конструктивные особенности ВКМ позволяют не только преобразовывать, но и управлять исполнительным органом в процессе рабочих движений. Анализ и синтез переходных процессов такой системы возможен только на основе корректной динамической и математической модели.

Динамическая модель управляемой системы с ВКМ реализована в виде двух звеньев: вала 1 и кольца 2 с соответствующей геометрией приведения масс и моментов инерции звеньев и соответствующей схемой приведения сил, представленной на рис. 1.

Звенья приведения образуют неголономную кинематическую пару, допускающую движение вала и кольца по четырем обобщенным координатам φ, Φ, z, β. Координаты φ, Φ – углы поворота вала и кольца относительно осей z и z' соответственно; β – угол верчения кольца; z – координата перемещения кольца. Движения по двум координатам φ и β независимы, по двум другим координатам Φ и z – связаны неинтегрируемыми кинематическими соотношениями.

Передаточная кинематическая функция скоростей для преобразования вращательного движения вала в поступательное движение кольца имеет вид:

$$u_{12} = \frac{z\dot{\varphi}}{\dot{z}}, \qquad (1)$$

а во вращательное движение кольца по координате Φ

$$u_{13} = \frac{r\dot{\varphi}}{R\dot{\Phi}}, \qquad (2)$$

где r, R – радиусы вала и кольца; $\dot{\varphi}$, $\dot{\Phi}$ – угловые скорости вала и кольца; $\dot{z}$ – скорость перемещения кольца вдоль образующей вала.

Полагая u_{12}, u_{13} независимыми функциями времени, т. е. $u_{12} = f(t)$; $u_{13} = f(t)$, соотношения (1), (2) следует рассматривать как уравнения неголономных связей. Предполагается при этом, что валико-кольцевой механизм является идеальным, т. е. его кинематические передаточные функции не зависят от нагрузки, приведенные массы и моменты инерции постоянны.

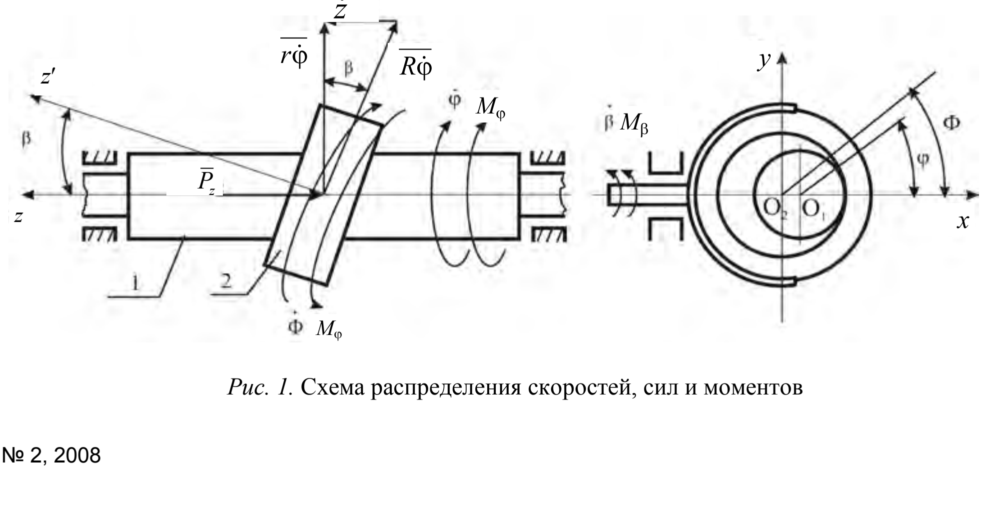

Рис. 1. Схема распределения скоростей, сил и моментов

Целесообразно введение функций u_{21}, u_{31}, обратных функциям скоростей u_{12}, u_{13} соответственно:

$$u_{21} = \frac{\dot{z}}{r\dot{\varphi}}; \tag{3}$$

$$u_{31} = \frac{R\dot{\Phi}}{r\dot{\varphi}}. \tag{4}$$

Таким образом, машина с ВКМ требует для описания движения минимум четырех обобщенных координат при двух условиях неголономных связей. Движение системы с ВКМ может быть описано с помощью методов неголономной механики. В частности, в [2] с этой целью использованы уравнения Аппеля.

Теоретический и практический интерес для анализа сил системы имеет вывод уравнений движения ВКМ, преобразующего вращательное движение в поступательное, на основе уравнений Рауса. Так как минимальное число обобщенных координат, определяющих всевозможные конфигурации модели ВКМ четыре, для описания его движения в форме Рауса необходимо составить четыре уравнения вида и дополнить их уравнениями неголономных связей вида:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} + \lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{21}; \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial z} = Q_z + \lambda_1 A_{12}; \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \Phi} = Q_{\Phi} + \lambda_2 A_{23}; \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \beta} = Q_{\beta}; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} r\dot{\varphi} - \dfrac{1}{u_{21}}\dot{z} = 0; \\ r\dot{\varphi} - \dfrac{1}{u_{31}}R\dot{\Phi} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

В уравнениях (5) $Q_{\varphi}, Q_z, Q_{\Phi}, Q_{\beta}$ – обобщенные силы, выражающие действия внешних активных сил:

$$Q_{\varphi} = M_{\varphi};\ Q_z = -P_z;\ Q_{\Phi} = -M_{\Phi};\ Q_{\beta} = M_{\beta},$$

где M_{φ} – движущий момент, приведенный к валу; P_z – приведенная к кольцу в точке контакта с валом сила технологического сопротивления, действующая на каретку вдоль оси Oz; M_{Φ} – приведенный момент сил сопротивления качению кольца; M_{β} – то же сил верчения кольца на угол $\pm\beta$; $A_{11}, A_{21}, A_{12}, A_{23}$ – соответствующие коэффициенты уравнений неголономных связей (6), т. е.

$$A_{11} = r;\ A_{21} = r;\ A_{12} = -\frac{1}{u_{21}};\ A_{23} = -R\frac{1}{u_{31}};$$

λ_1, λ_2 – неопределенные множители, пропорциональные обобщенным силам реакций неголономных связей по координатам z и Φ соответственно.

Кинетическая энергия T движущихся масс двузвенной модели машины с ВКМ:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(m\dot{z}^2 + I_2\dot{\Phi}^2\right) + \frac{1}{2}I_3\dot{\beta}^2,$$

где I_1 – момент инерции всех звеньев ведущей части машины с ВКМ, приведенный к валу; m – масса поступательно перемещающейся каретки, приведенная к кольцу; I_2 – момент инерции вращающегося кольца, приведенный к кольцу относительно оси Oz'; I_3 – то же масс звеньев управляющей части, приведенный к кольцу относительно оси O_2x.

Выполнив соответствующие операции дифференцирования по уравнениям (5), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1\ddot{\varphi} = M_{\varphi} + \lambda_1 r + \lambda_2 r; & (7а) \\ m\ddot{z} = -P_z - \lambda_1\dfrac{1}{u_{21}}; & (7б) \\ I_2\ddot{\Phi} = -M_{\Phi} - \lambda_2 R\dfrac{1}{u_{31}}; & (7в) \\ I_3\ddot{\beta} = M_{\beta}. & (7г) \end{cases}$$

Вместе с уравнениями связи (6) уравнения (7) образуют достаточную систему для определения шести неизвестных функций λ_1, λ_2, $\ddot{\varphi}, \ddot{z}, \ddot{\Phi}, \ddot{\beta}$.

Продифференцировав по времени уравнения связи (6), найдем значение ускорения перемещения кольца:

$$\ddot{z} = ru_{21}\ddot{\varphi} + r\dot{u}_{21}\dot{\varphi}, \tag{8}$$

и значение углового ускорения кольца

$$\ddot{\Phi} = \frac{r}{R}u_{31}\ddot{\varphi} + \frac{r}{R}\dot{u}_{31}\dot{\varphi}. \tag{9}$$

Неопределенный множитель λ_1 определяется совместным решением уравнений (7б), (8)

$$\lambda_1 = -P_z u_{21} - mru_{21}^2\ddot{\varphi} - mru_{21}\dot{u}_{21}\dot{\varphi}, \tag{10}$$

а неопределенный множитель λ_2 – совместным решением уравнений (7в), (9)

$$\lambda_2 = -M_\Phi \frac{1}{R}u_{31} - I_2\frac{r}{R^2}u_{31}^2\ddot{\varphi} - I_2\frac{r}{R^2}u_{31}\dot{u}_{31}\dot{\varphi}. \tag{11}$$

Подставив (10), (11) в уравнение (7а) и выполнив соответствующие преобразования, получим основную систему двух дифференциальных уравнений, составленных относительно углового ускорения ведущего вала $\ddot{\varphi}$ и углового ускорения верчения кольца $\ddot{\beta}$:

$$\begin{cases} \left(I_1 + mr^2u_{21}^2 + I_2\dfrac{r^2}{R^2}u_{31}^2\right)\ddot{\varphi} + \\ +\left(mr^2u_{21}\dot{u}_{21} + I_2\dfrac{r^2}{R^2}u_{31}\dot{u}_{31}\right)\dot{\varphi} = \\ = M_\varphi - P_z ru_{21} - M_\Phi\dfrac{r}{R}u_{31}, \\ I_3\ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \tag{12}$$

Для получения уравнений движения машины с ВКМ относительно параметров движения ведомого кольца используем уравнения связи в виде:

$$\begin{cases} r\dot{\varphi} - u_{12}\dot{z} = 0; \\ r\dot{\varphi} - u_{13}R\dot{\Phi} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

После операций дифференцирования уравнений (5) с учетом (13) имеем систему:

$$\begin{cases} I_1\ddot{\varphi} = M_\varphi + \lambda_1 r + \lambda_2 r; \\ m\ddot{z} = -P_z - \lambda_1 u_{12}; \\ I_2\ddot{\Phi} = -M_\Phi - \lambda_2 Ru_{13}; \\ I_3\ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \tag{14}$$

Дифференцируя уравнение связи (13), найдем значение углового ускорения

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}u_{12}\ddot{z} + \frac{1}{r}\dot{u}_{12}\dot{z}. \tag{15}$$

Совместным решением уравнений (13) и последующим дифференцированием получаем выражение для углового ускорения

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{R}\frac{u_{12}}{u_{13}}\ddot{z} + \frac{1}{R}\left(\frac{u_{12}}{u_{13}}\right)^{\bullet}\dot{z}. \tag{16}$$

Совместным решением уравнений (14), (15), (16) окончательно получаем систему дифференциальных уравнений, составленных относительно параметров ведомого управляемого кольца:

$$\begin{cases} \left[m + \dfrac{I_1}{r^2}u_{12}^2 + \dfrac{I_2}{R^2}\left(\dfrac{u_{12}}{u_{13}}\right)^2\right]\ddot{z} + \\ +\left[\dfrac{I_1}{r^2}u_{12}\dot{u}_{12} + \dfrac{I_2}{R^2}\dfrac{u_{12}}{u_{13}}\left(\dfrac{u_{12}}{u_{13}}\right)^{\bullet}\right] = \\ = \dfrac{M_\varphi}{r}u_{12} - P_z - \dfrac{M_\Phi}{R}\left(\dfrac{u_{12}}{u_{13}}\right); \\ I_3\ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \tag{17}$$

ВЫВОД

Таким образом, на основе метода Рауса получены уравнения движения (12), (17) неголономного механизма с двумя степенями свободы. Уравнения представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Uhing J.** Rolling nut for transforming a rotary movement of a shaft into a thrust movement of the rolling unit. United States Patent № 4,614,124. U.S. Cl. 74/89, 74/25, Int. Cl. F16H 21/16. Date of Patent: Sept. 30, 1986.

2. **Насонова, Л. С.** Уравнения движения машинного агрегата с валико-кольцевым механизмом, преобразующим вращательное движение в поступательное / Л. С. Насонова // Машиностроение… (Изв. высш. учеб. заведений). – 1975. – № 4. – С. 52–55.

Поступила 10.01.2007