Известия АН СССР
ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ
И ОКЕАНА
Том 26 • № 10
1990

УДК 551.521.3

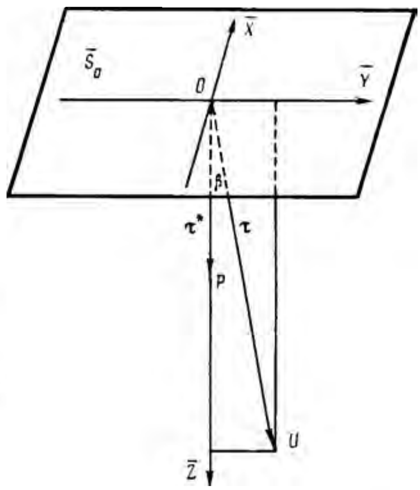
Н. Н. РОГОВЦОВ

О ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ГЛУБИНЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ МУТНОЙ СРЕДЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТОЧЕЧНЫЙ НАПРАВЛЕННЫЙ ИСТОЧНИК

Выведено асимптотическое выражение для интенсивности излучения на большой оптической глубине полубесконечной однородной среды, которая ограничена зеркально отражающей поверхностью и содержит точечный мононаправленный источник. Получена также аналогичная асимптотика функции Грина уравнения переноса излучения для двуслойной среды.

1. Цель данной статьи — отыскание асимптотического выражения для интенсивности излучения на большой оптической глубине τ_0 в однородной полубесконечной мутной среде, ограниченной зеркально отражающей поверхностью и содержащей точечный мононаправленный стационарный источник, причем без дополнительных ограничений на положение точки «наблюдения» и каких-либо других существенных предположений о характеристиках элементарного объема. При этом не делается никаких допущений о структуре поля излучения и считается только, что индикатриса рассеяния — непрерывная функция. Решение частного случая этой задачи, когда однородная полубесконечная среда ограничена полностью прозрачной для излучения границей и источник находится на ней самой, было дано в статье [1], в которой, в свою очередь, были обобщены асимптотики, полученные ранее в работах [2, 3]. Существенное ограничение, каковым является предположение об однородности среды, будет частично снято в конце статьи при отыскании асимптотики поля излучения в двуслойной среде. Заметим, что вопросы, относящиеся к нахождению строгих асимптотических решений уравнения переноса для сред, облучаемых узкими пучками, в литературе практически не рассматривались. Исключением являются упомянутые выше статьи, а также работы [4—7], в которых получены асимптотики функций Грина для бесконечной среды и оптически толстых шара и цилиндра. Однако целый ряд теоретических результатов, полученных в рамках различных приближенных методов решения уравнения переноса излучения и метода Монте-Карло, и экспериментальных исследований, посвященных изучению закономерностей распространения узких пучков в мутных средах, были изложены и выполнены в работах (см., например, [2, 8—16] и ссылки в них). Полученные ниже результаты представляют не только самостоятельный интерес, но могут быть также полезными при проверке применимости приближенных методик для описания глубинного режима. Везде далее под областью реализации глубинного режима будем понимать такие оптические глубины, на которых форма тела яркости практически не зависит от положения точки «наблюдения». При этом, однако, абсолютные значения интенсивности излучения могут существенно изменяться. Соответствующим образом нормированное тело яркости (см. ниже) в области глубинного режима будем называть глубинным телом яркости. Отметим, что описанная выше постановка задачи соответствует, в частности, наличию мононаправленного источника в море, подстилающей поверхностью для которого является граница вода — атмосфера.

2. Пусть точечный мононаправленный стационарный источник мощности Q находится на оптической глубине $\boldsymbol{\tau}^*$ однородной полубесконечной рассеивающей среды $V_{(0,\infty)}$, граница S_0 которой является зеркально отражающей. Введем в рассмотрение безразмерную прямоугольную декартову систему координат $O\bar X\bar Y\bar Z$ ($\bar V_{(0,\infty)}$ и $\bar S_0$ — образы $V_{(0,\infty)}$ и S_0 в этой системе, полученные с помощью отображения вида $\mathbf{r}\to\alpha\mathbf{r}'=\boldsymbol{\tau}'$, где $\boldsymbol{\tau}'$ — оптический радиус-вектор, $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор, α — показатель ослабления), которая расположена следующим образом: плоскость $O\bar X\bar Y$ совпадает с $\bar S_0$; ось $\bar Z$ проходит через источник P, и ее направление совпадает с направлением внутренней нормали к $\bar S_0$; ось $\bar Y$ принадлежит плоскости, перпендикулярной $\bar S_0$ и проходящей через источник P, положение которого определяется оптическим радиусом-вектором $\boldsymbol{\tau}^*(\boldsymbol{\tau}^*=\alpha\mathbf{r}^*)$, а также точку «наблюдения» U, задаваемую $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau}=\alpha\mathbf{r})$, причем $\boldsymbol{\tau}$ имеет неотрицательную проекцию на ось $\bar Y$. Обозначим угол между осью $\bar Z$ и $\boldsymbol{\tau}$ через β, где $\beta\in$ $\in[0,\pi/2)$. Из сказанного следует, что $\boldsymbol{\tau}=(0,\tau_0\operatorname{tg}\beta,\tau_0)$ в системе $O\bar X\bar Y\bar Z$. Положения системы $O\bar X\bar Y\bar Z$, точки U и источника P изображены на рисунке.



Приведем основные соотношения, которые будут использованы при выводе искомой асимптотики. В качестве наиболее важного из них будет служить следующее общее соотношение инвариантности:

$$I_1(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\Omega})=\widetilde G_\infty(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\tau}^*,\boldsymbol{\Omega}^*)-\iint\limits_{\bar S_0} d\bar S_0'\int\limits_{\Omega}\widetilde G_\infty(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\tau}',\boldsymbol{\Omega}')(\mathbf{n}\boldsymbol{\Omega}')\,I_1(\boldsymbol{\tau}_-',\boldsymbol{\Omega}')\,d\Omega', \quad (1)$$

которое является частным случаем соотношения (9) из работы [17]. *Способы получения такого рода соотношений были предложены в [17—21]*. В (1) величины имеют следующий смысл: $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к $\bar S_0$; $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}'$ и $\boldsymbol{\Omega}^*$ — единичные векторы, задающие соответственно направления распространения и испускания излучения; $\widetilde G_\infty(\ldots)$ — функция Грина безразмерного уравнения переноса для однородной бесконечной среды (она соответствует «источнику» вида $\delta(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*)\delta(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}^*)$); $I(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega})=\alpha^2QI_1(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\Omega})$ — интенсивность излучения в среде $V_{(0,\infty)}$ в точке «наблюдения» с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ при указанной выше постановке задачи, т. е. считаем, что в $V_{(0,\infty)}$ находится источник вида $Q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^*)\times$ $\times\delta(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}^*)$; $\boldsymbol{\tau}_-'=\boldsymbol{\tau}'-0\mathbf{n}$, где $0\mathbf{n}$ — бесконечно малый вектор, имеющий направление, совпадающее с направлением $\mathbf{n}$; Ω — единичная сфера.

Без дополнительной содержательной информации из (1) нельзя получить асимптотику для $I_1(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\Omega})$ при $\tau_0\to\infty$ $(\boldsymbol{\tau}=(0,\tau_0\operatorname{tg}\beta,\tau_0))$. В качестве таковой используем, в частности, асимптотическое выражение для $\widetilde G_\infty(\ldots)$ при $|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*|\to\infty$, найденное в [5]. Его можно также получить непосредственно из формулы (10.36) работы [4], если принять во внимание асимптотику [22] для функции Грина уравнения переноса для случая источников, обладающих плоскопараллельной симметрией. Представим эту асимптотику в виде [7]

$$\widetilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}'', \boldsymbol{\Omega}'') = \frac{k \exp(-k|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}''|)}{2\pi^2 M |\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}''|} \times \tag{2}$$

$$\times i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}\frac{\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}''}{|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}''|}\right)\right) i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}''\frac{\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}''}{|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}''|}\right)\right) + \eta_1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}'', \boldsymbol{\Omega}''),$$

$$\eta_1(\ldots) = q_1 + q_2, \; q_2 = O(|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}''|^{-1}\exp(-k|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}''|),$$

$$|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}''| \to \infty \quad (0 < \Lambda < 1).$$

Здесь k — наименьший неотрицательный корень характеристического уравнения; Λ — альбедо однократного рассеяния; $i(\ldots)$ — глубинное тело яркости (предполагаем, что оно нормировано условием $\int\limits_{-1}^{1} i(\mu')\,d\mu' = 2/\Lambda$ [23]); $M = 2\int\limits_{-1}^{1} \mu i^2(\mu)\,d\mu$; q_1 — обобщенная функция, описывающая прямое и первые три кратности рассеянного излучения, q_2 — ограниченная функция. При выводе асимптотики для $I_1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega})$ нам понадобится также неравенство

$$I_1(\boldsymbol{\tau}'_-, \boldsymbol{\Omega}') \leqslant \widetilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}'_-, \boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) + \widetilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}'_-, \boldsymbol{\Omega}', -\boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^{**}), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\Omega}^{**} = \Omega_1^*\mathbf{i} + \Omega_2^*\mathbf{j} - \Omega_3^*\mathbf{k}$; $\boldsymbol{\Omega}^* = (\Omega_1^*, \Omega_2^*, \Omega_3^*)$; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — ортонормированный базис системы $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$. Справедливость неравенства (3) легко доказать. Если зеркально отражающую границу $\bar{S}_0$ среды $\bar{V}_{(0,\infty)}$, содержащей «источник» $\delta(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*)\delta(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}^*)$, заменить на зеркально отражающую поверхность с альбедо, равным единице, то решение безразмерного уравнения переноса при этом не уменьшится. Из сказанного и соображений симметрии следует неравенство (3).

3. Теперь приступим непосредственно к выводу асимптотики для $I_1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega})$ при $\tau_0 \to \infty$. Пусть $\bar{S}_1$ — круг, принадлежащий $\bar{S}_0$ с центром в точке O. Обозначим радиус $\bar{S}_1$ через τ_1, причем $\tau_1 \to \infty$ и $(\tau_1^2/\tau_0) = O(1)$ при $\tau_0 \to \infty$. Будем считать, что функция $i(\mu)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ (это весьма слабое физически разумное допущение) и вектор $\boldsymbol{\tau}' = (\bar{x}', \bar{y}', 0)$ задает точки, лежащие на $\bar{S}_1$. При сделанных выше предположениях, используя геометрические соображения, непрерывность функции $i(\ldots)$ и формулу Тейлора, можно показать, что имеют место следующие асимптотические формулы:

$$|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}'| = \frac{\tau_0}{\cos\beta}(1+\omega_1), \quad i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}'\frac{\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}'}{|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}'|}\right)\right) =$$

$$= i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}'\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right) + \omega_2, \quad i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}\frac{\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}'}{|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}'|}\right)\right) =$$

$$= i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right) + \omega_3, \quad \exp\left[k\left(\frac{\tau_0}{\cos\beta} - |\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}|\right)\right] = (1+\omega_4)\exp(k\bar{y}'\sin\beta); \tag{4}$$

$\omega_1 = O(1)$, $\omega_2 = O(1)$, $\omega_3 = O(1)$, $\omega_4 = O(1)$ при $\tau_0 \to \infty$.

Разбивая интеграл по $\bar{S}_0$ в (1) на сумму интегралов по $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_0 \setminus \bar{S}_1$ (знак $\setminus$ обозначает операцию разности двух множеств), а затем подставляя в интеграл по $\bar{S}_1$ асимптотики (2) и (4), с помощью ряда элементарных преобразований получим такое выражение:

$$I_1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}) = \widetilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\Omega}^*) -$$

$$- \frac{k\cos\beta\exp(-k\tau_0/\cos\beta)}{2\pi^2 M\tau_0} i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right) \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} (\mathbf{n}\boldsymbol{\Omega}')\, i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}'\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right) d\Omega' \iint\limits_{\bar{S}_0} \exp(k\bar{y}'\sin\beta)\, I_1(\boldsymbol{\tau}'_-, \boldsymbol{\Omega}')\, d\bar{S}'_0 -$$

$$- \frac{k\cos\beta\exp(-k\tau_0/\cos\beta)}{2\pi^2 M\tau_0} i\left(\left(\boldsymbol{\Omega}\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right) \times$$

$$\times \int_{\Omega} (\mathbf{n}\Omega')\, i\left(\left(\Omega' \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right) \left[\iint_{\overline{S}_1} \omega_4 \exp(k\overline{y}' \sin\beta)\, I_1(\boldsymbol{\tau}'_-, \Omega')\, d\overline{S}'_0 - \right.$$

$$\left. - \iint_{\overline{S}_0 \setminus \overline{S}_1} \exp(k\overline{y}' \sin\beta)\, I_1(\boldsymbol{\tau}'_-, \Omega')\, d\overline{S}'_0 \right] d\Omega' - \frac{\cos\beta}{\tau_0} \exp\left(-\frac{k\tau_0}{\cos\beta}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{k}{2\pi^2 M} \iint_{\overline{S}_1} d\overline{S}'_0 \int_{\Omega} \omega_5 \exp(k\overline{y}' \sin\beta)(\mathbf{n}\Omega')\, I_1(\boldsymbol{\tau}'_-, \Omega')\, d\Omega' + \right.$$

$$+ \frac{\tau_0}{\cos\beta} \exp\left(\frac{\tau k_0}{\cos\beta}\right) \iint_{\overline{S}_1} d\overline{S}'_0 \int_{\Omega} \eta_1(\boldsymbol{\tau}', -\Omega', \boldsymbol{\tau}, -\Omega)(\mathbf{n}\Omega')\, I_1(\boldsymbol{\tau}'_-, \Omega')\, d\Omega' +$$

$$\left. + \frac{\tau_0}{\cos\beta} \exp\left(\frac{k\tau_0}{\cos\beta}\right) \iint_{\overline{S}_0 \setminus \overline{S}_1} d\overline{S}'_0 \int_{\Omega} \widetilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}', -\Omega', \boldsymbol{\tau}, -\Omega)(\mathbf{n}\Omega')\, I_1(\boldsymbol{\tau}'_-, \Omega')\, d\Omega' \right\}, \tag{5}$$

$$\omega_5 = O(1) \text{ при } \tau_0 \to \infty, \ (0 < \Lambda < 1).$$

Соотношение (5) справедливо при выполнении условий $\tau_1 \to \infty$ и $(\tau_1^2/\tau_0) = O(1)$ при $\tau_0 \to \infty$. Если теперь учесть неравенство (3) и асимптотику (2), то можно показать, что при фиксированном положении источника ($\tau^* = |\boldsymbol{\tau}^*| = \mathrm{const}$) сумма членов в правой части (5), начиная с третьего, представима в виде суммы $\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2$, где $\tilde{q}_1$ — обобщенная функция, описывающая особенности прямого и первых трех кратностей рассеянного излучения, которое отражено от границы, а величина $\tilde{q}_2$ удовлетворяет условию $\tilde{q}_2 = O\left(\frac{\cos\beta}{\tau_0} \exp(-(k\tau_0/\cos\beta))\right)$ при $\tau_0 \to \infty$. При доказательстве этого утверждения было также учтено элементарно выводимое неравенство $\frac{\tau_0}{\cos\beta} - |\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}| \leqslant \sqrt{(\overline{x}')^2 + (\overline{y}')^2} \sin\beta$, где $\boldsymbol{\tau}'$ задает любую точку на $\overline{S}_0$. Принимая во внимание сказанное, из (5) находим искомую асимптотическую формулу

$$I_1(\boldsymbol{\tau}, \Omega) = \widetilde{G}_\infty(\boldsymbol{\tau}, \Omega, \boldsymbol{\tau}^*, \Omega^*) - \frac{k \cos\beta \exp(-(k\tau_0/\cos\beta))}{2\pi^2 M \tau_0} \times$$

$$\times i\left(\left(\Omega \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right) \int_{\Omega} (\mathbf{n}\Omega')\, i\left(\left(\Omega' \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right) I_2(\Omega')\, d\Omega' + \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2, \tag{6}$$

$$I_2(\Omega') = \iint_{\overline{S}_0} \exp(k\overline{y}' \sin\beta)\, I_1(\boldsymbol{\tau}'_-, \Omega')\, d\overline{S}'_0, \quad \tau_0 \to \infty$$

$$(0 < \Lambda < 1). \tag{7}$$

Из (7) и определения $I_1(\boldsymbol{\tau}, \Omega)$ следует, что величина $I_2(\Omega') = I_3(+0, \mu', \varphi', \mu^*, \varphi^*)$ ($\mu' = -(\mathbf{n}\Omega')$, $\mu^* = -(\mathbf{n}\Omega^*)$; φ', φ^* — азимутальные углы, соответствующие Ω' и Ω^*) является предельным значением решения следующей краевой задачи:

$$\mu \frac{\partial I_3(\tau, \mu, \varphi, \mu^*, \varphi^*)}{\partial \tau} = -(1 - k\sqrt{1-\mu^2} \sin\beta \sin\varphi) \times$$

$$\times I_3(\tau, \mu, \varphi, \mu^*, \varphi^*) + \frac{\Lambda}{4\pi} \int_{\Omega} x(\mu_0)\, I_3(\tau, \mu', \varphi', \mu^*, \varphi^*)\, d\Omega' +$$

$$+ \delta(\tau - \tau^*)\, \delta(\mu - \mu^*)\, \delta(\varphi - \varphi^*), \quad \tau \geqslant +0, \tag{8}$$

$$I_3(+O, |\mu|, \varphi, \mu^*, \varphi^*) = R(|\mu|)\, I_3(+O, -|\mu|, \varphi, \mu^*, \varphi^*), \tag{9}$$

где $\mu = -(\mathbf{n}\Omega)$, φ — азимутальный угол, соответствующий Ω, $\mu_0 = (\Omega\Omega')$, $R(\ldots)$ — коэффициент отражения от $\overline{S}_0$, $x(\mu_0)$ — индикатриса рассеяния. Если умножить (6) на $\alpha^2 Q$, то получим асимптотику для интенсивности излучения в глубине полубесконечной среды $V_{(0,\infty)}$, содержащей точечный мононаправленный источник мощности Q. Отметим, что (6) значительно упрощается, если представить в ней $\tilde{G}_\infty(\ldots)$ в виде (2).

4. Сделаем еще несколько замечаний общего характера и укажем на некоторые возможности обобщения. Заметим, что только при $\beta=0$ решение (8), (9) сводится к исследованию классической задачи о переносе излучения в плоскопараллельной однородной полубесконечной среде, ограниченной зеркально отражающей границей [23]. Если $R(\mu)=0$ ($\mu\in[0, 1]$) и $\tau^*=0$, то асимптотика (6) совпадает с формулой (7) из работы [1]. Положив дополнительно в этом выражении $\beta=0$, придем к результату, полученному в [2, 3]. Заметим, что при $\beta=0$ и $R(\ldots)\equiv 0$ ограничение $\tau^*=\mathrm{const}$ возможно ослабить. В частности, можно положить $\tau^*=\sqrt{\tau_0 f(\tau_0)}$, где неотрицательная функция $f(\tau_0)$ такова, что $\tau^*\to\infty$ и $f(\tau_0)=O(1)$ при $\tau_0\to\infty$. При этом в (6) надо заменить Ω на Ω_+ (Ω_+ — полусфера, определяемая условием $(\mathbf{n}\mathbf{\Omega}')>0$).

Из (2) и (6) следует, что угловая структура тела яркости при фиксированном $\boldsymbol{\tau}$ ($\tau_0\gg 1$) определяется линейной комбинацией функций $i\left(\left(\Omega\frac{\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*}{|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*|}\right)\right)$, $i\left(\left(\Omega\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right)$, причем при $\tau_0\to\infty$ она стремится по форме с точностью до множителя к классическому глубинному телу яркости $i\left(\left(\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right)$[23]. Величина этого множителя зависит от $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}^*$, $\mathbf{\Omega}^*$ и $R(\ldots)$. Явное аналитическое выражение для данного множителя нетрудно выписать, например, при $\beta=0$ и $R(\ldots)\equiv 0$, если использовать результаты работы [24]. При $\beta=0$, $R(\ldots)\equiv 0$ и $\tau^*=0$ этот множитель найден в [3]. Заметим, что при небольших значениях τ^* ось симметрии тела яркости на предельно больших оптических глубинах проходит близко от положения источника. К тому же форма тела яркости при $\tau_0\to\infty$ не зависит от вида $R(\ldots)$. Используя (2), (6), нетрудно прийти к заключению, что пространственное распределение интенсивности излучения в плоскости $\bar{z}=\tau_0=\mathrm{const}$ при достаточно больших τ_0 не описывается двумерным нормальным распределением. Отметим, что это справедливо и для того случая, когда источник излучения имеет такое распределение. Следует также подчеркнуть, что формула (6) позволяет свести анализ зависимости $I_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega})$ от пространственных и угловых *переменных для любого* $\beta\in(0, \frac{\pi}{2})$ к *решению задачи* (8), (9) *для случая* однородной анизотропно поглощающей среды, содержащей источники, обладающие плоскопараллельной симметрией. Заметим, что при $\beta=0$ задача (8), (9) соответствует случаю изотропно поглощающей среды и поддается решению с помощью строгих и приближенных методов, изложенных, например, в [16, 23—25].

Схему доказательства, примененного при выводе асимптотики (6), можно использовать также для получения асимптотики интенсивности излучения в рассеивающей среде $\tilde{V}_1$, состоящей из двух примыкающих друг к другу однородных полубесконечной среды и плоского слоя. При этом следует предположить, что выполняется неравенство $k_{\mathrm{I}}\geqslant k_{\mathrm{II}}$, где k_{I} и k_{II} — наименьшие неотрицательные корни характеристических уравнений, соответствующих слою и полупространству. Будем также считать, что в полубесконечной среде находится точечный мононаправленный «источник» $\delta(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}^*)\delta(\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}^*)$, где векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}^*$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}^*$ имеют тот же смысл, что и в п. 2. Для описанной ситуации формула (6) при замене в ней $(\tilde{q}_1+\tilde{q}_2)$ на функцию $\tilde{q}_3$ (она удовлетворяет условию $\tilde{q}_3=O((\cos\beta/\tau_0)\exp(-(k\tau_0/\cos\beta)))$ при $\tau_0\to\infty$), величины $I_1(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega})$ на $I_4(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega})$ ($I_4(\ldots)$ — «интенсивность» излучения в полупространстве) и $I_2(\mathbf{\Omega}')$ на $I_5(\mathbf{\Omega}')$ ($I_5(\mathbf{\Omega}')$ равно выражению (7), когда $I_1(\boldsymbol{\tau}_-', \mathbf{\Omega}')$ заменено на $I_4(\boldsymbol{\tau}_-', \mathbf{\Omega}')$) дает асимптотику для $I_4(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{\Omega})$ при $\tau_0\to\infty$. Здесь τ_0 — оптическая глубина, на которой находится точка «наблюдения». При этом используем безразмерную прямоугольную декартову систему координат, положение которой в полупространстве таково же, что и положение системы координат $O\overline{XYZ}$ в среде $\overline{V}_{(0,\infty)}$, описанной в п. 2. Заметим также, что $I_5(\Omega')=I_6(+0, \mu', \varphi', \mu^*, \varphi^*)$, где $I_6(\tau, \mu', \varphi', \mu^*, \varphi^*)$ является решением следующей задачи:

$$\mu\frac{\partial I_6(\tau,\mu,\varphi,\mu^*,\varphi^*)}{\partial\tau}=-(1-k\sqrt{1-\mu^2}\sin\beta\sin\varphi)\times$$
$$\times I_6(\tau,\mu,\varphi,\mu^*,\varphi^*)+\frac{\Lambda(\tau)}{4\pi}\int\limits_{\Omega}x(\tau,\mu_0)I_6(\tau,\mu',\varphi',\mu^*,\varphi^*)d\Omega'+$$
$$+\delta(\tau-\tau^*)\delta(\mu-\mu^*)\delta(\varphi-\varphi^*),\quad \tau\in[-\tau_2,\infty),$$
$$I_6(-\tau_2,|\mu|,\varphi,\mu^*,\varphi^*)=0. \tag{10}$$

Здесь τ_2 — оптическая толщина слоя; функция $\Lambda(\tau)$ равна Λ_{I} и Λ_{II} соответственно при $\tau\in[-\tau_2, 0)$ и $\tau\in(0, \infty)$, где Λ_{I} и Λ_{II} — альбедо однократного рассеяния в слое и полупространстве; величина $x(\tau, \mu_0)$ равна $x_{\text{I}}(\mu_0)$ для слоя и $x_{\text{II}}(\mu_0)$ для полупространства, где $x_{\text{I}}(\mu_0)$ и $x_{\text{II}}(\mu_0)$ — индикатрисы рассеяния, соответствующие слою и полупространству. Подчеркнем, что при $\tau_2=\infty$ и $\beta=0$ решение задачи (10) представляет собой функцию Грина уравнения переноса для двух примыкающих друг к другу однородных полубесконечных сред. Нулевая азимутальная гармоника данной функции Грина была найдена в [24], что позволяет для этого случая выписать асимптотику для $I_4(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Omega})$ в явной форме. Отметим, что глубинное тело яркости в среде $\overline{V}_1$ при $\tau_0\to\infty$ будет стремиться к величине, пропорциональной $i\left(\left(\Omega\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right)$, т. е. будет по форме приближаться к телу яркости в области реализации глубинного режима в полубесконечной среде $\overline{V}_{(0,\infty)}$. Следует, однако, подчеркнуть, что значения множителей, стоящих перед $i\left(\left(\Omega\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|}\right)\right)$ и соответствующих задачам о глубинном режиме в $\overline{V}_{(0,\infty)}$ и $\overline{V}_1$ (при наличии в них точечных мононаправленных источников с одинаковыми параметрами) могут значительно отличаться друг от друга.

Заметим, что непосредственно из полученных в работе асимптотических выражений с помощью операции интегрирования по переменным $\boldsymbol{\tau}^*$, $\boldsymbol{\Omega}^*$ нетрудно получить асимптотики интенсивности излучения на большой оптической глубине при наличии в $\overline{V}_{(0,\infty)}$ (или $\overline{V}_1$) распределенных источников или облучении $\overline{V}_{(0,\infty)}$ произвольным внешним излучением. При этом надо считать, что источники отсутствуют вне подслоя $[0, c]$, причем $c\ll\tau_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Роговцов Н. Н.* Асимптотика поверхностной функции Грина уравнения переноса излучения для случая однородной полубесконечной среды//Докл. АН БССР. 1988. Т. 32. № 12. С. 1085—1088.
2. *Романова Л. М.* Световое поле в глубине мутной среды, освещаемой узким пучком//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1968. Т. 4. № 3. С. 311—320.
3. *Роговцов Н. Н.* О некоторых асимптотиках полей излучения в плоских однородных средах, содержащих точечные источники//Астрофизика. 1988. Т. 29. № 3. С. 602—612.
4. *Фано У., Спенсер Л., Бергер М.* Перенос гамма-излучения. М.: Госатомиздат, 1963. 284 с.
5. *Долин Л. С.* Методика расчета яркости на больших оптических расстояниях от источников излучения//Оптика моря. М.: Наука, 1983. С. 118—122.
6. *Колесов А. К.* Функция Грина уравнения переноса излучения в бесконечной однородной среде со сферически симметричным распределением источников//Астрофизика. 1984. Т. 20. № 1. С. 133—147.
7. *Роговцов Н. Н.* Асимптотики полей излучения в сферически и цилиндрически симметричных оптически толстых рассеивающих средах//Докл. АН БССР. 1986. Т. 30. № 10. С. 901—904.

8. *Романова Л. М.* Нестационарное световое поле в глубине мутной среды, освещаемой узким пучком//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1969. Т. 5. № 5. С. 463—472.
9. *Долин Л. С.* Автомодельная теория многократного малоуглового рассеяния света и ее уточнение//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18. № 8. С. 840—849.
10. *Васильков А. П., Долин Л. С., Монин А. С.* Уравнение переноса излучения и основные методы его решения//Оптика океана. Т. 1. Физическая оптика океана. М.: Наука, 1983. С. 55—95.
11. *Иванов А. П.* Физические основы гидрооптики. Минск: Наука и техника, 1975. 503 с.
12. *Зуев В. Е., Кабанов М. В.* Перенос оптических сигналов в земной атмосфере (в условиях помех). М.: Сов. радио, 1977. 368 с.
13. *Захаров А. К., Гольдин Ю. А.* Расчет методом Монте-Карло структуры узкого нестационарного пучка света в морской воде до больших оптических глубин//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 5. С. 533—540.
14. *Ремизович В. С., Рогозкин Д. Б., Рязанов М. И.* Распространение света в стратифицированной среде с сильно анизотропным рассеянием//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 7. С. 736—742.
15. *Зеге Э. П., Полонский И. Н., Чайковская Л. И.* Особенности распространения излучения при наклонном освещении поглощающей, анизотропно рассеивающей среды//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23. № 5. С. 486—492.
16. *Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л.* Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.
17. *Роговцов Н. Н.* Установление связи между полями излучения внутри и на границах рассеивающего объекта произвольной конфигурации на основе метода частично инвариантного доопределения//Журн. прикл. спектроскопии. 1981. Т. 34. № 2. С. 335—342.
18. *Роговцов Н. Н.* Восстановление внутреннего распределения поля излучения по его характеристикам на границах рассеивающей среды//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 3. С. 244—253.
19. *Роговцов Н. Н.* О некоторых приложениях общего принципа инвариантности применительно к теории переноса излучения//Журн. прикл. спектроскопии. 1981. Т. 35. № 6. С. 1044—1050.
20. *Пикичян О. В.* Общие соотношения инвариантности для исследования задач переноса в средах с геометрическими и физическими характеристиками произвольной сложности//Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 4. С. 860—863.
21. *Роговцов Н. Н.* К расчету характеристик полей излучения в рассеивающих объектах сложной формы на основе общих соотношений инвариантности//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 10. С. 1111—1112.
22. *Иванов В. В., Волков Е. В.* Перенос излучения: Принципы инвариантности для функций Грина//Уч. зап. ЛГУ. 1978. № 400. Вып. 57. С. 3—30.
23. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука, 1972. 335 с.
24. *Mika J. R.* Neutron transport with anisotropic scattering//Nucl. Sci. Eng. 1961. V. 11. № 4. P. 415—427.
25. *Минин И. Н.* Теория переноса излучения в атмосферах планет. М.: Наука, 1988. 264 с.

Белорусский политехнический институт

Поступила в редакцию 3.VIII 1989, после доработки 23.V 1990

RADIATION FIELD IN THE DEEP LAYERS OF TURBID MEDIUM CONTAINING MONODIRECTIONAL POINT SOURCE

ROGOVTSOV N. N.

The asimptotic expression for intensity of radiation at large optical depth of a uniform semi-infinite medium containing a monodirectional point source and restricted specularly reflecting surface are derived. The analogous asimptotic formulae for the Green's function of equation of radiative transfer for two-layer medium is obtained.