

**УСИЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ СРЕД
С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ**

К настоящему времени достаточно хорошо изучены вопросы отражения электромагнитных волн от прозрачных и поглощающих сред (см., например, [1]). Как известно, в этих случаях коэффициент отражения для плоских однородных волн не превышает единицы. Еще недавно считалось, что и при отражении от сред с отрицательным поглощением коэффициент отражения также всегда меньше единицы. Однако уравнения Максвелла совместно с граничными условиями допускают существование для этих сред решений, при которых коэффициент отражения больше единицы [2, 3]*). Как показано в [2, 3], такие решения реализуются при некоторых условиях, подобных условиям полного отражения для границы раздела двух прозрачных сред. Это явление представляет интерес в связи с возможностью создания принципиально новых лазерных устройств, основанных на отражении от усиливающих сред. Следует отметить, что на возможность усиления электромагнитного излучения посредством «полного внутреннего отражения» было указано еще ранее в работе [4]. В опытах наблюдалось усиление света, выходящего из тонкого прозрачного стекловолокна, покрытого оболочкой неодимового стекла, имеющего показатель преломления меньше, чем сердцевины. Согласно представлениям феноменологической оптики, это означает, что коэффициент отражения от границы раздела с усиливающей средой при этом был больше единицы.

В работе [5] экспериментально также было получено усиление света и генерация при однократном отражении на границе раздела стекло К-8 — раствор родамина 6Ж в условиях, близких к условиям полного отражения для границы раздела указанных сред. При этом падение было близким к

* Теоретически возможность существования решений, отвечающих коэффициентам отражения большим единицы, для сред с отрицательным поглощением была установлена также в дипломной работе Г. И. Олефира (Институт физики АН БССР, 1972 г.).

скользящему (угол падения составлял около 89°). По данным авторов [5], усиление в их опытах при однократном отражении оказалось больше 25. В появившейся затем теоретической работе [2] была приведена формула для расчета коэффициентов отражения от усиливающей среды в случае, когда электрический вектор волны перпендикулярен плоскости падения (s -компонента). По мнению авторов [2], максимальное усиление при отражении теоретически ограничено величиной $\sim e^2$, причем это справедливо для обеих поляризаций.

В данной работе проводится более детальное и полное исследование явления отражения электромагнитных волн от усиливающих сред. В первой ее части показано, что теоретически максимально достижимое усиление при отражении от границы раздела прозрачной и однородной усиливающей сред

для s -поляризации равно $R_s^{\max} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \approx 5,83$, а для p -поля-

ризации — $R_p^{\max} = R_s^{\max})^2 \approx 34$. Наибольшие коэффициенты усиления в настоящее время достигаются на растворах органических красителей ($K=10 \div 100 \text{ см}^{-1}$). При таких значениях коэффициентов усиления $R_s^{\max} \simeq R_p^{\max} \simeq 5,83$. Между тем реализуемые на опыте коэффициенты отражения ($R \geq 25$) значительно превосходят эту величину. Отсюда следует, что взаимодействие излучения с усиливающей средой в условиях описанного опыта [5] имело более сложный характер. Действительно, по ряду причин можно предположить, что в усиливающей среде, вблизи ее поверхности, возникает тонкий слой с показателем преломления, несколько превышающим показатель преломления остальной ее части. Такой слой, в частности, может возникать вследствие нагрева активной среды под действием накачки, падающей со стороны границы раздела, либо как результат нелинейной зависимости показателя преломления от плотности излучения. Оценки показывают, что, например, в опытах, где имеется граница раздела стекло — раствор органического красителя, при импульсном возбуждении активной среды лазером может возникнуть слой толщиной около $0,1 \text{ мкм}$ с несколько большим показателем преломления, чем в остальной части той же среды. При этом различие в соответствующих показателях преломления может составлять несколько единиц в четвертом или даже в третьем знаке.

Как будет показано, усиление при отражении от такого слоя не ограничено и может значительно превзойти предельные значения, указанные выше. В связи с этим во второй части работы рассмотрено отражение электромагнитных волн от плоскопараллельного однородного слоя, граничащего с полубесконечной средой, как простейшей модели усиливаю-

щей структуры, допускающей к тому же точное решение задачи.

В реальных случаях вторая граница слоя, о котором говорилось выше, не может быть резкой. По-видимому, в действительности возникает некий плавный по глубине профиль показателя преломления и коэффициента поглощения (усиления). Естественно предположить, что профиль, обусловленный, например, действием накачки, имеет экспоненциальный вид. Поэтому в качестве следующего шага рассмотрена также модель усиливающей среды с экспоненциально изменяющимся по глубине показателем преломления.

§ 1. Отражение электромагнитных волн от полубесконечной однородной усиливающей среды

Рассмотрим задачу об отражении плоской однородной волны вида $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-i\omega t}$, падающей из прозрачной среды на границу раздела ее с поглощающей (усиливающей) средой (рис. 149). Здесь \mathbf{q} — единичный вектор нормали к границе раздела, направленный в усиливающую среду, а цифрами 1, 2 обозначены фазовые нормали соответственно отраженной и преломленной волн. Необычное на первый взгляд на рисунке направление фазовой нормали преломленной волны в усиливающей среде будет понятно из дальнейшего.

Пусть диэлектрическая проницаемость прозрачной среды $\epsilon_1 = n_1^2$ (n_1 — показатель преломления), а диэлектрическая проницаемость поглощающей (усиливающей) среды $\epsilon_2 = \epsilon_2 + i\tau_2 = (n_2 + i\kappa_2)^2$, где n_2 и κ_2 — главные показатели преломления и поглощения (усиления). Отметим, что при выбранной форме записи вида решения ($\sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$) для плоской волны τ_2 (и κ_2) > 0 отвечает поглощению, а τ_2 (и κ_2) < 0 — усилению волны во второй среде. При этом, как известно, преломленная волна будет неоднородной, причем поверхность раздела будет плоскостью равных амплитуд. Из граничных условий для уравнений Максвелла следует, что составляющие векторов фазовой η_1 и амплитудной η_2 нормалей преломленной волны в направлении нормали к границе раздела определяются выражением

$$\tilde{\eta} = \eta_1 + i\eta_2 = \sqrt{A + iB}, \quad (22.1)$$

где $A = \epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha$, $B = \tau_2$, α — угол падения. Отсюда

$$\eta_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A + \sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\eta_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (22.2)$$

Из (22.1) следует, что в случае сред с отрицательным поглощением ($B < 0$) произведение $\eta_1 \eta_2 < 0$, т. е. величины η_1 и η_2 имеют разные знаки. Здесь в отличие от поглощающих сред возникает проблема выбора знаков η_1 и η_2 , чтобы правильно описать ситуации, реализующиеся на опыте.

В случае поглощающей среды ($\kappa_2 > 0, B > 0$) знаки у η_1 и η_2 определяются, как известно, из требования затухания амплитуды поля волны на бесконечности. При выбранной

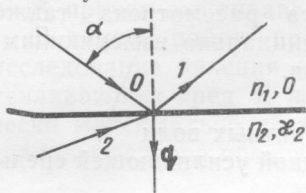


Рис. 149. Отражение электромагнитной волны ст полубесконечной однородной усиливающей среды

форме записи решения амплитуда поля во второй среде

$E_2 \sim e^{-\frac{c}{v} \eta_2 q r}$, где $q r > 0$. Следовательно, для затухания волны необходимо, чтобы $\eta_2 > 0$. Тогда из соотношения (22.1) автоматически следует $\eta_1 > 0$. Это означает, что в поглощающей среде преломленные волны всегда отходят от границы раздела и затухают с глубиной проникновения. Таким образом, в отличие от прозрачных сред здесь нет никакого критического угла и характер решения для поля во второй среде (поглощающей) сохраняется для всего интервала изменения углов падения α , а коэффициент отражения при этом всегда меньше единицы.

В случае сред с отрицательным поглощением ситуация существенно иная. Как это видно из (22.1), при τ_2 (и κ_2) < 0 имеется две возможности выбора решения для поля волны во второй среде: 1) $\eta_1 > 0, \eta_2 < 0$; 2) $\eta_1 < 0, \eta_2 > 0$. Первое решение ничем не примечательно, оно означает, что преломленные волны в усиливающей среде являются отходящими от границы раздела и усиливаются по мере распространения вглубь. Привлекает внимание второе решение, которое допускается граничными условиями, а именно: $\eta_1 < 0, \eta_2 > 0$. Это означает, что поле волны во второй среде затухает с глубиной проникновения, а преломленные волны в то же время являются подходящими к границе. На первый взгляд может показаться, что это решение не имеет физического смысла. Однако предположить, что физически реальным всегда является только первое решение при условии, что величина A может изменять знак *),

*) Изменение знака у A может происходить как в результате изменения угла α (если $\epsilon_1 > \epsilon_2$), так и вследствие изменения знака ϵ_2 — вещественной части комплексной диэлектрической проницаемости, как например у металлов, где $\epsilon_2 \leq 0$. Здесь мы будем рассматривать только такие ситуации, когда величина A изменяет знак с изменением угла α .

также нельзя. Оказывается, что при этом не сохранялся бы непрерывный переход решений для поля во второй среде в соответствующие известные решения для прозрачной среды при непрерывном стремлении поглощения к нулю как со стороны положительных, так и со стороны отрицательных значений κ_2 . Но из требования такой непрерывности по κ_2 с необходимостью следует, что в случае усиливающих сред ($\kappa_2 < 0$) характер решения для поля во второй среде должен существенно зависеть от знака выражения $A = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha = n_2^2 - \kappa_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha$. Тогда в соответствии со сказанным для $A > 0$ должно быть $\eta_1 > 0$, $\eta_2 < 0$, а для $A < 0$ — $\eta_1 < 0$, $\eta_2 > 0$. Следовательно, там, где величина A изменяет знак, должен изменяться и характер решения для поля преломленной волны. Точка $A = 0$, где составляющие η_1 и η_2 изменяются скачком, является особой точкой и решение в ней терпит разрыв. При этом, если электромагнитная волна падает из оптически более плотной среды на границу ее с менее плотной усиливающей средой, имеется большая аналогия с явлением полного отражения на границе двух прозрачных сред. Там, как известно, коэффициент отражения имеет резкую зависимость от угла падения вблизи некоторого предельного угла. В этой точке производная коэффициента отражения разрывна. Здесь же вблизи некоторого критического угла α_0 ($\sin \alpha_0 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$) в аналогичной ситуации разрыв имеет и сам коэффициент отражения. При этом, как будет видно из последующего, для углов падения, равных указанному критическому углу или больших его, коэффициент отражения больше единицы.

Для нахождения амплитудных коэффициентов отражения в данном случае ($\kappa_2 < 0$) нужно было бы решить граничную задачу для уравнений Максвелла. Аналогичная задача для границы раздела двух прозрачных сред или прозрачной и поглощающей сред уже решалась (см. [6]). Полученные там выражения для амплитудных коэффициентов отражения (r) перпендикулярной (s) и параллельной (p) поляризации имеют совершенно общий характер для любых сред и поэтому ими можно воспользоваться и здесь. При этом, согласно [6],

$$r_s = \frac{\eta_0 - \tilde{\eta}}{\eta_0 + \tilde{\eta}}, \quad r_p = \frac{\tilde{\varepsilon}_2 \eta_0 - \varepsilon_1 \tilde{\eta}}{\varepsilon_2 \eta_0 + \varepsilon_1 \tilde{\eta}} = \frac{a^2 - \eta_0 \tilde{\eta}}{a^2 + \eta_0 \tilde{\eta}} r_s, \quad (22.3)$$

где $\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha$, $a^2 = \varepsilon_1 \sin^2 \alpha$. Тогда для соответствующих энергетических коэффициентов отражения получаем

$$R_s = |r_s|^2 = \frac{(\eta_0 - \eta_1)^2 + \eta_2^2}{(\eta_0 + \eta_1)^2 + \eta_2^2}, \quad R_p = |r_p|^2 = f R_s, \quad (22.4)$$

где

$$f = \frac{(a^2 - \eta_0 \eta_1)^2 + \eta_0^2 \eta_2^2}{(a^2 + \eta_0 \eta_1)^2 + \eta_0^2 \eta_2^2}. \quad (22.4a)$$

Из приведенных формул видно, что для $\eta_1 > 0$ ($\eta_2 < 0$) R_s и R_p оба меньше единицы, а для $\eta_1 < 0$ ($\eta_2 > 0$) $R_s, R_p > 1$, причем, как видно из структуры выражения для R_p , в этом случае всегда $R_p > R_s$. В дальнейшем нас будет интересовать величина этих коэффициентов в интервале углов падения, удовлетворяющих условию $\sin^2 \alpha \geq \varepsilon_3/\varepsilon_1$. Вводя относительные величины $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ и $\tau = |\tau_2|/\varepsilon_2$ и переходя в (22.4) к углам, получаем соответствующие развернутые выражения R_s и R_p для этого случая в виде

$$\begin{aligned} R_s &= \left[\cos^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2} + \sqrt{2} \times \right. \\ &\times \cos \alpha \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2}} \left. \right] \times \\ &\times \left[\cos^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2} - \sqrt{2} \times \right. \\ &\times \cos \alpha \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2}} \left. \right]^{-1}, \\ R_p &= R_s \left[\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2} + \sqrt{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \times \right. \\ &\times \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2}} \left. \right] \times \\ &\times \left[\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2} - \right. \\ &\left. - \sqrt{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Иногда выражение для R_p удобно представить также в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_p &= \left[\varepsilon^2 (1 + \tau^2) \cos^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2} + \right. \\ &+ \sqrt{2} \cos \alpha \left(\sin^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2} \right) \left. \right] \times \\ &\times \left[\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2}} \right] \times \\ &\times \left[\varepsilon^2 (1 + \tau^2) \cos^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2} - \right. \\ &\left. - \sqrt{2} \cos \alpha \left(\sin^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2} \right) \right. \\ &\left. \times \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \alpha + \sqrt{(\varepsilon - \sin^2 \alpha)^2 + (\varepsilon \tau)^2}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (22.5a)$$

Из выражений (22.5) и (22.5а) следует, что оба коэффициента принимают наибольшие значения вблизи критического угла $\alpha_0 = \arcsin \varepsilon$. При дальнейшем увеличении угла они резко уменьшаются, стремясь к 1 при $\alpha \rightarrow \pi/2$.

Рассмотрим несколько более подробно случай падения излучения вблизи критического угла $\alpha_0 \rightarrow 0$. При этом формулы (22.5) для R_p и R_s упрощаются и принимают вид

$$R_s^{(\alpha_0 \rightarrow 0)} = \frac{1 - \varepsilon + \varepsilon\tau + \sqrt{2\varepsilon(1 - \varepsilon)\tau}}{1 - \varepsilon + \varepsilon\tau - \sqrt{2\varepsilon(1 - \varepsilon)\tau}},$$

$$R_p^{(\alpha_0 \rightarrow 0)} = \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 + \tau^2) + \tau + (1 + \tau)\sqrt{2\varepsilon(1 - \varepsilon)\tau}}{\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 + \tau^2) + \tau - (1 - \tau)\sqrt{2\varepsilon(1 - \varepsilon)\tau}}. \quad (22.6)$$

Представляет интерес поведение коэффициентов отражения (22.6) в зависимости от относительных значений показателя преломления $n = n_2/n_1$ и коэффициента усиления $\kappa = |\kappa_2|/n_2$. Анализ выражений (22.6) удобно проводить непосредственно в зависимости от ε и τ , не переходя в них сразу к n и κ , имея в виду, что входящие в (22.6) величины ε и τ связаны с соответствующими им значениями n и κ следующей зависимостью

(см. выше): $\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{n_2^2 - \kappa_2^2}{n_1^2} = n^2(1 - \kappa^2)$ и $\tau = \frac{|\tau_2|}{\varepsilon_2} = \frac{2n_2|\kappa_2|}{n_2^2 - \kappa_2^2} = \frac{2\kappa}{1 - \kappa^2}$.

Проведем вначале общий анализ формул (22.6), не ограничиваясь условием малости поглощения κ . Из них сразу видно, что неограниченное увеличение τ (а следовательно, и κ) не приводит, однако, к бесконечному возрастанию R_s и R_p . Более того, при этом обе величины стремятся к 1, что имеет место также при τ (и κ) $\rightarrow 0$. Следовательно, при заданных ε (или n) существуют оптимальные значения κ , для которых усиление при отражении максимально. Легко видеть, что максимум $R_s^{(\alpha_0 \rightarrow 0)}$ по τ достигается при условии

$$\varepsilon\tau = 1 - \varepsilon. \quad (22.7)$$

В этом случае его максимальное значение не зависит от ε и равно

$$R_s^{\max} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \simeq 5,83. \quad (22.8)$$

Существенно, что с ростом ε (или n) максимальные значения R_s достигаются при меньших значениях коэффициентов отрицательного поглощения κ . Нетрудно также показать, что при любом заданном τ существуют такие значения ε (и n), для кото-

рых достигается максимальное значение (22.8). Они определяются при этом из того же условия (22.7) и равны

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \tau}. \quad (22.9)$$

Поведение параллельной компоненты излучения более сложное. Во-первых, теоретически существует некий абсолютный максимум ее коэффициента отражения $R_p^{(\alpha_0+0)}$. Он достигается при $\varepsilon = 1/2$ и $\tau = 1$ ($\kappa \simeq 0,4$). В этом случае

$$R_p^{(\alpha_0+0)} = (R_s^{\max})^2 = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^2 \simeq 34. \quad (22.10)$$

Очевидно, реализовать этот максимум в настоящее время практически трудно.

В условиях опыта обычно мы имеем ситуации, когда величина κ оказывается заданной. В то же время относительный показатель преломления при этом может быть изменен в более или менее широких пределах. Естественно поэтому изучить зависимость $R_p^{(\alpha_0+0)}$ при изменении n , считая κ заданным. Анализ показывает, что в этом случае существуют три значения ε , при которых достигаются экстремальные значения $R_p^{(\alpha_0+0)}$. Одно из них $\varepsilon = 1/2$. При этом

$$R_p^{(\alpha_0+0)} = \left(\frac{1 + \tau + \sqrt{2\tau}}{1 + \tau - \sqrt{2\tau}} \right)^2. \quad (22.11)$$

Как видно, соответствующее этому значению ε экстремальное значение $R_p^{(\alpha_0+0)}$ изменяется с ростом τ от некоторого минимального значения $R_p^{(\alpha_0+0)} \simeq 1$, достигая максимума при $\tau = 1$, и при дальнейшем возрастании τ снова стремится к 1. При практически реализуемых значениях κ ($10^{-5} \div 10^{-4}$) значение $R_p^{(\alpha_0+0)}$ (22.11) близко к единице.

Два других значения ε , отвечающие максимальным значениям $R_p^{(\alpha_0+0)}$, определяются из уравнения

$$\varepsilon^2 - \varepsilon + \frac{\tau}{1 + \tau^2} = 0 \quad (22.12)$$

и соответственно равны

$$\varepsilon = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\tau}{1 + \tau^2}}}{2}. \quad (22.12a)$$

При этом

$$R_p^{\max} = \frac{\sqrt{2(1+\tau^2)+1+\tau}}{\sqrt{2(1+\tau^2)-1-\tau}} \quad (22.13)$$

Как видно из (22.13), с ростом τ (соответственно κ) величина максимумов растет. Однако здесь τ не может увеличиваться сколь угодно. Его наибольшее значение ограничено требованием вещественности корней уравнения (22.12). Это приводит к тому, что значения τ , для которых существуют действительные значения ε , отвечающие $\max R_p^{(\alpha_0 \pm 0)}$, должны находиться в интервале $0 < \tau \leq 2 - \sqrt{3}$. (Второе значение $\tau \geq 2 + \sqrt{3}$, при котором ε также вещественно, практически особенно трудно реализовать).

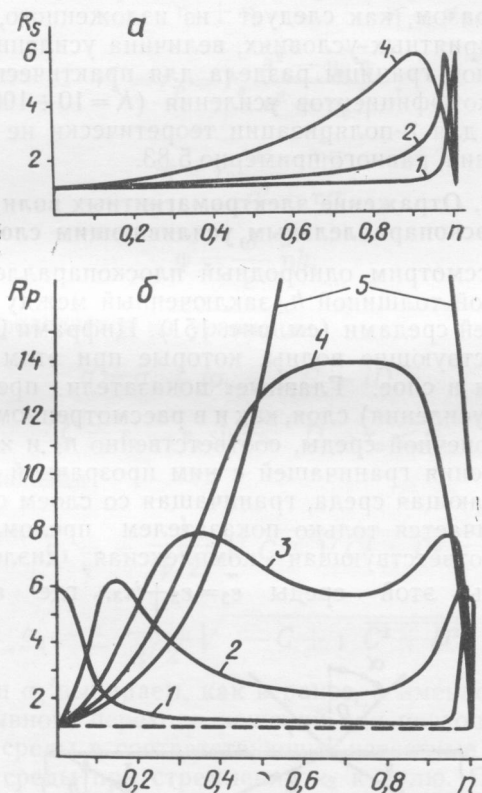


Рис. 150. Зависимость коэффициента отражения от показателя преломления n при различных значениях κ :

1— $5 \cdot 10^{-4}$; 2— 10^{-2} ; 3— $5 \cdot 10^{-2}$; 4—0,15; 5—0,4 (а—для перпендикулярной поляризации, б—для параллельной)

Представляет интерес анализ полученных выражений для коэффициентов R_s и R_p вблизи $\alpha_0 \neq 0$ для практически важного случая малых поглощений ($\kappa \ll 1$). Оказывается, что при этом $R_s^{(\alpha_0 \neq 0)}$ и $R_p^{(\alpha_0 \neq 0)}$ одновременно достигают максимальных значений при $\varepsilon \simeq 1 - \tau$ ($n \simeq 1 - \kappa$), причем по величине они равны приблизительно $R_s^{\max} \simeq 5,83$. Кроме того, $R_p^{(\alpha_0 \neq 0)}$ достигает максимума при значении $\varepsilon = \tau$ ($n \simeq \sqrt{2\kappa}$), которое, правда, практически не реализуется. Следует отметить, что, несмотря на небольшое различие в усилении, параллельная поляризация в генерирующих системах все же имеет преимущество. Можно ожидать, что излучение этой поляризации и будет генерироваться на опыте. Для иллюстрации на рис. 150 приведены соответствующие зависимости $R_s^{(\alpha_0 \neq 0)}$ и $R_p^{(\alpha_0 \neq 0)}$ от n при различных значениях κ .

Таким образом, как следует из изложенного, даже при самых благоприятных условиях, величина усиления при отражении от одной границы раздела для практически достижимых сейчас коэффициентов усиления ($K = 10 \div 100 \text{ см}^{-1}$) как для s , так и для p -поляризации теоретически не может превысить значения, равного примерно 5,83.

§ 2. Отражение электромагнитных волн плоскопараллельным усиливающим слоем

Рассмотрим однородный плоскопараллельный усиливающий слой толщиной h , заключенный между прозрачной и усиливающей средами (см. рис. 151). Цифрами 0—4 обозначены соответствующие волны, которые при этом могут распространяться в слое. Главные показатели преломления и поглощения (усиления) слоя, как и в рассмотренном выше случае полубесконечной среды, соответственно n_2 и κ_2 , а показатель преломления граничащей с ним прозрачной среды — n_1 . Пусть усиливающая среда, граничащая со слоем с другой его стороны, отличается только показателем преломления $n_3 = n_2 - \Delta$. (Соответствующая комплексная диэлектрическая проницаемость этой среды $\varepsilon_3 = \varepsilon_3 + i\tau_3$, где $\varepsilon_3 = n_3^2 - \kappa_2^2$, а

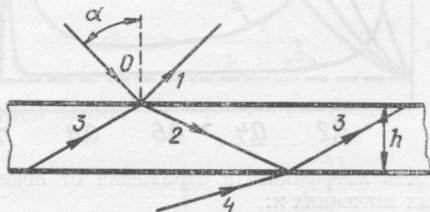


Рис. 151. Отражение электромагнитной волны ст плоскопараллельного слоя

$\tau_3 = 2n_3 \kappa_2 < 0$). Одновременно и главные показатели усиления слоя и граничащей с ним усиливающей среды также должны несколько различаться. Но ввиду того что в реальных случаях сами эти величины малы, их различием при решении задачи можно пренебречь.

Из решения граничной задачи для уравнений Максвелла в этом случае получаются следующие выражения для амплитудных коэффициентов отражения ρ_j ($j = s, p$) плоскопараллельного слоя

$$\rho_j = \frac{r_1^{(j)} + r_2^{(j)} e^{2i\varphi}}{1 + r_1^{(j)} r_2^{(j)} e^{2i\varphi}}. \quad (22.14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_1^s = r_s &= \frac{\eta_0 - \tilde{\eta}}{\eta_0 + \tilde{\eta}}, \quad r_2^s = \frac{\tilde{\eta} - \sigma}{\tilde{\eta} + \sigma}, \\ r_1^p = r_p = r_s &= \frac{a^2 - \eta_0 \tilde{\eta}}{a^2 + \eta_0 \tilde{\eta}}, \\ r_2^p &= r_2^s \frac{a^2 - \tilde{\eta} \sigma}{a^2 + \tilde{\eta} \sigma}, \\ \varphi &= \frac{\omega}{c} \tilde{\eta} h, \end{aligned} \quad (22.15)$$

причем σ определяется из уравнения

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 = \sqrt{C + iD}, \quad (22.16)$$

где

$$C = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha, \quad D = \tau_3 < 0.$$

Из (22.16) находим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{C + \sqrt{C^2 + D^2}}, \\ \sigma_2 &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-C + \sqrt{C^2 + D^2}}. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Знаки у σ_1 и σ_2 выбираем, как и ранее, а именно, из требования непрерывного перехода решений для поглощающей (усиливающей) среды в соответствующие известные решения для прозрачной среды при стремлении κ_2 к нулю. При этом для $C > 0$ — $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, а для $C < 0$ — $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$. Последнее означает, что возникающие в граничащей со слоем усиливающей среде волны и здесь являются подходящими к границе и затухающими вглубь. Для энергетических коэффициентов отра-

жения слоя, определяемых как отношения нормальных составляющих потоков отраженной и падающей волн, тогда имеем

$$R_s^{cл} = |\rho_s|^2 = \frac{R_1 + \beta^2 R_2 + 2\beta \sqrt{R_1 R_2} \cos(2\Theta + \Delta_1 - \Delta_2)}{1 + \beta^2 R_1 R_2 + 2\beta \sqrt{R_1 R_2} \cos(2\Theta - \Delta_1 - \Delta_2)}, \quad (22.18)$$

$$R_p^{cл} = |\rho_p|^2 = \frac{f_1 R_1 + \beta^2 f_2 R_2 + 2\beta \sqrt{f_1 f_2 R_1 R_2} \cos(2\Theta + \Delta_1 - \Delta_2 + \delta_1 - \delta_2)}{1 + \beta^2 f_1 f_2 R_1 R_2 + 2\beta \sqrt{f_1 f_2 R_1 R_2} \cos(2\Theta - \Delta_1 - \Delta_2 - \delta_1 - \delta_2)},$$

где

$$R_1 = |r_1^s|^2 = |r_s|^2 = R_s, \quad R_2 = |r_2^s|^2 = \frac{(\eta_1 - \sigma_1)^2 + (\eta_2 - \sigma_2)^2}{(\eta_1 + \sigma_1)^2 + (\eta_2 + \sigma_2)^2},$$

$$f_1 = f, \quad f_2 = \frac{(a^2 - \eta_1 \sigma_1)^2 + \eta_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2) + 2a^2 \eta_2 \sigma_2}{(a^2 + \eta_1 \sigma_1)^2 + \eta_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2) - 2a^2 \eta_2 \sigma_2},$$

$$\Delta_1 = \arctg \frac{2\eta_0 \eta_2}{\eta_0^2 - (\eta_1^2 + \eta_2^2)},$$

$$\Delta_2 = \arctg \frac{2(\sigma_1 \eta_2 - \sigma_2 \eta_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - (\eta_1^2 + \eta_2^2)},$$

$$\delta_1 = \arctg \frac{2a^2 \eta_0 \eta_2}{a^4 - \eta_0^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2)},$$

$$\delta_2 = \arctg \frac{2a^2 (\eta_1 \sigma_2 + \eta_2 \sigma_1)}{a^4 - (\eta_1^2 + \eta_2^2) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}, \quad (22.19)$$

$$\Theta = 2\pi \eta_1 \frac{h}{\lambda}, \quad \beta = e^{-4\pi \eta_2 \frac{h}{\lambda}}.$$

Самый общий анализ выражений для коэффициентов отражения слоя показывает, что оба они возрастают с увеличением угла падения, достигая при некотором угле максимального значения. При дальнейшем возрастании угла оба коэффициента начинают уменьшаться, стремясь при $\alpha \rightarrow \pi/2$ к 1 уже со стороны значений R , больших единицы.

Рассмотрим вначале более подробно случай перпендикулярной поляризации ($R_s^{cл}$). Во-первых, нетрудно видеть, что при выполнении условий

$$R_1 R_2 \beta^2 \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad \cos(2\Theta - \Delta_1 - \Delta_2) \rightarrow -1 \quad (22.20)$$

величина $R_s^{cл}$ может стать сколь угодно большой. Заметим, что оба соотношения в случае знака равенства представля-

ют собой не что иное как энергетическое и фазовое условия самовозбуждения слоя. Следовательно, при выполнении указанных условий рассматриваемая усиливающая структура переходит в режим генерации без каких-либо внешних зеркал, и дальнейшее увеличение коэффициента усиления κ_2 в стационарном режиме становится невозможным. Отметим лишь одну особенность условий самовозбуждения (22.20), которая состоит в том, что в данном случае коэффициент K_2 может быть больше единицы, т. е. вторая граница слоя является здесь своего рода усиливающим зеркалом. Значения $R_2 \geq 1$ достигаются, как видно из (22.19), при $\sigma_1 < 0$ ($\sigma_2 > 0$), т. е. при $C \leq 0$, что означает $\sin^2 \alpha \geq \varepsilon_3/\varepsilon_1$. Расчет по-

казывает, что, например, для $\alpha = \alpha_0 = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2 - n^2 \kappa^2}$ (аналог предельного угла полного отражения для второй границы слоя) при вполне реальных условиях, когда Δn_{32} порядка κ и $\kappa \ll 1$, $-R_2 \simeq 2,1$ ($\Delta n_{32} \simeq 1 - n_{32}$, где $n_{32} = n_3/n_2$).

Что касается фазового условия генерации (22.20), то его выполнение обеспечивается, как правило, автоматически, если слой не слишком тонкий ($h/\lambda > 10$), а ширина полосы усиления достаточно велика. Тогда небольшое изменение λ может привести к изменению параметра Θ в нужных пределах, так что второе условие (22.20) всегда выполняется.

Минимальное значение κ (соответственно K), при котором уже возможно самовозбуждение слоя, можно найти из условия $R_1 R_2 \beta^2 = 1$. В самом общем случае при этом получается трансцендентное уравнение относительно κ , которое трудно решить. Однако грубую оценку для κ_{\min} вблизи упомянутого угла $\alpha_0 + 0$ можно получить в предположении, что величина Δn_{32} гораздо больше κ . Тогда $R_2 \simeq 1$,

$$R_1 \simeq \left(\frac{\sqrt{1 - n_{31}^2} - n \sqrt{1 - n_{32}^2}}{\sqrt{1 - n_{31}^2} + n \sqrt{1 - n_{32}^2}} \right)^2, \quad (22.21)$$

$$\beta = e^{\frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{n_2 \kappa}{\sqrt{1 - n_{32}^2}} h},$$

где $n_{31} = n_3/n_1$, $n = n_2/n_1$. При этом из соотношения $R_1 R_2 \beta^2 = 1$ находим примерную верхнюю границу произведения $K_{\min} h$ ($K = \frac{4\pi}{\lambda} n_2 \kappa$), а именно

$$K_{\min} h \leq \sqrt{1 - n_{32}^2} \ln \frac{\sqrt{1 - n_{31}^2} + n \sqrt{1 - n_{32}^2}}{\sqrt{1 - n_{31}^2} - n \sqrt{1 - n_{32}^2}}. \quad (22.22)$$

Формула (22.22) допускает дальнейшие упрощения при условии, что n , n_{31} и n_{32} мало отличаются от единицы. Тогда, вводя $\Delta n = 1 - n$ и $\Delta n_{31} = 1 - n_{31}$, приближенно имеем

$$K_{\min} h \leq \sqrt{2\Delta n_{32}} \ln \frac{\sqrt{\Delta n_{31}} + \sqrt{\Delta n_{32}}}{\sqrt{\Delta n_{31}} - \sqrt{\Delta n_{32}}}. \quad (22.23)$$

Так как при этом параметры Δn , Δn_{31} и Δn_{32} связаны между собой соотношением

$$\Delta n \simeq \Delta n_{31} - \Delta n_{32}, \quad (22.24)$$

то независимыми являются только два из них. Пусть, например, $\Delta n \simeq 1 \cdot 10^{-4}$, $\Delta n_{31} \simeq 2 \cdot 10^{-4}$. Тогда $K_{\min} h \simeq 2,5 \cdot 10^{-2}$. Если $h/\lambda \simeq \approx 100$ ($\lambda \simeq 5,8 \cdot 10^{-5}$ см), то $K_{\min} \simeq 4$ см⁻¹ ($\kappa \simeq 2 \cdot 10^{-5}$).

Аналогичным путем можно рассмотреть и условия самовозбуждения слоя в случае параллельной поляризации ($R_p^{ст}$). Соответствующий анализ показывает, однако, что для ее самовозбуждения требуются большие коэффициенты усиления. Следовательно, здесь в отличие от модели полубесконечной усиливающей среды в более выгодных условиях находится перпендикулярная поляризация, и на опыте следует ожидать генерации излучения именно с такой поляризацией.

Отметим, что полученные здесь выводы строго справедливы лишь для неограниченных плоских структур. Для реальных же структур они становятся приближенными и удовлетворительного совпадения опытных данных с расчетными можно ожидать только в том случае, когда размеры усиливающей структуры в направлении вдоль границы ее раздела значительно превосходят смещение луча за одно отражение.

§ 3. Отражение от неоднородной усиливающей среды

Рассмотрим теперь усиливающую среду, показатель преломления которой n_2 изменяется по закону

$$n_2 = n_2^0 - \Delta(1 - e^{-2k\gamma q r}). \quad (22.25)$$

Здесь n_2^0 — показатель преломления этой среды на границе ее раздела с прозрачной средой; γ — параметр, характери-

зующий скорость изменения показателя преломления по глубине неоднородного слоя $z = \mathbf{q}\mathbf{r}$; Δ — величина перепада показателя преломления от границы раздела до бесконечно удаленных от нее точек; $k = \omega/c$. Будем считать при этом, что $\kappa_2 = \text{const}$.

Пусть, как и в ранее рассмотренных случаях (полубесконечная среда и слой), на границу раздела данной усиливающей среды с прозрачной средой (показатель преломления ее n_1) падает плоская однородная волна (см. § 1). Рассмотрим случай, когда электрический вектор волны перпендикулярен плоскости падения (плоскости xz на рис. 149, где ось z направлена по \mathbf{q} , а ось x лежит в плоскости чертежа и направлена вдоль границы раздела вправо). Нас по-прежнему будут интересовать амплитуды отраженной и преломленной волн. Что касается отраженной волны, то решение для нее и в этом случае естественно искать в таком же виде, как и для падающей волны, а именно, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^0 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t}$, где \mathbf{k}_1 — волновой вектор отраженной волны, \mathbf{E}_1^0 — ее векторная амплитуда. Для нахождения поля преломленных волн, возникающих при этом в неоднородной среде, воспользуемся уравнением [7]

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} = 0. \quad (22.26)$$

В нашем случае $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_2(z) = [n_2(z) + i\kappa_2]^2$, где зависимость $n_2(z)$ дается выражением (22.25). Так как вдоль оси x свойства среды не меняются, то соответствующая зависимость для поля во второй среде должна иметь тот же характер, что и для падающей волны. Поэтому решение для преломленной волны можно искать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = F(z) e^{i \frac{\omega}{c} n_1 x \sin \alpha} \mathbf{s}, \quad (22.27)$$

где \mathbf{s} — единичный вектор нормали к плоскости падения. Подстановка этого решения в (22.26) приводит к уравнению (см. также [7])

$$F'' + k^2 g F = 0, \quad (22.28)$$

где $g = \tilde{\varepsilon}_2 - \kappa_2^2$, $\mathbf{a}^2 = \varepsilon_1 \sin^2 \alpha$ (см. § 1).

При произвольной функции $\varepsilon_2(z)$ точного решения уравнения (22.28) не найдено. Одним из приближенных методов его решения является так называемый метод фазовых интегралов (или метод ВКБ). Достаточное условие, которому при этом должна удовлетворять функция $\varepsilon_2(z)$ имеет вид [8]

$$\lambda/2\pi \frac{\sqrt{\left[d \left(\frac{n_2 \cos \psi}{dz} \right) \right]^2 + \left(\frac{d\kappa_2}{dz} \right)^2}}{n_2 \cos^2 \psi + \kappa_2^2} \ll 1, \quad (22.29)$$

где ψ — угол преломления. Физически это условие означает, что параметры среды n_2 и κ_2 мало меняются на расстояниях, сравнимых с длиной волны λ .

ВКБ-решение уравнения (22.29) записывается в виде

$$F(z) = \text{const} (k^2 g)^{-1/4} \exp \left[\pm ik \int^z \sqrt{g} dz \right]. \quad (22.30)$$

Оно расходится вблизи некоторой точки $z=z_0$, где функция g обращается в нуль. Точку z_0 обычно называют точкой поворота. Функция g в нашем случае является комплексной функцией действительного переменного z . В дальнейшем нам удобнее перейти к комплексной переменной $\xi = z + i\chi$ и сделать аналитическое продолжение решения (22.30) с действительной оси на комплексную плоскость. Тогда выражение (22.30) переписывается в виде

$$F(\xi) = (k^2 g)^{-1/4} \left[C_1 \exp \left(ik \int_{\xi}^{\xi_0} \sqrt{g} d\xi \right) + C_2 \exp \left(-ik \int_{\xi}^{\xi_0} \sqrt{g} d\xi \right) \right]. \quad (22.31)$$

Решая уравнение $g = \tilde{\epsilon}_2 - a^2 = 0$, находим точку поворота $\xi_0 = z_0 + i\chi_0$, где

$$\begin{aligned} \frac{z_0}{\lambda} &= \frac{1}{8\pi\gamma} \ln \frac{\Delta^2}{(|a| - n_2^0 + \Delta)^2 + \kappa_2^2}, \\ \frac{\chi_0}{\lambda} &= \frac{1}{4\pi\gamma} \arctg \frac{\kappa_2}{|a| - n_2^0 + \Delta}. \end{aligned} \quad (22.32)$$

При $z_0 < 0$ точка поворота находится выше границы раздела поглощающей (усиливающей) и прозрачной сред. Нас интересует случай, когда она находится в толще усиливающей среды. Именно в этом случае имеет место захождение падающей электромагнитной волны вглубь усиливающей неоднородной среды с последующим ее «внутренним» отражением. Так как условием существования точки поворота в толще среды является условие $z_0 \geq 0$ ($\gamma \geq 0$), то из (22.32) получаем

$$\Delta \geq \frac{(n_2^0 - |a|)^2 + \kappa_2^2}{2(n_2^0 - |a|)}. \quad (22.33)$$

Поскольку $\Delta \geq 0$, то $n_2^0 - |a| > 0$. Из (22.32) видно, что при заданных n_2^0 , κ_2 , Δ и γ величина $\frac{z_0}{\lambda}$ максимальна, если

$$|a| - n_2^0 + \Delta = 0. \quad (22.34)$$

При этом

$$\frac{z_0}{\lambda} = \frac{1}{4\pi\gamma} \ln \frac{\Delta}{|\kappa_2|}. \quad (22.35)$$

При $\kappa_2 \rightarrow 0$ условие (22.35) означает, что точка поворота «уходит» на бесконечность.

Предположим, что точка поворота лежит достаточно далеко от поверхности усиливающей неоднородной среды, так что вблизи границы раздела $z=0$ выполняется условие (22.29) и можно воспользоваться выражением (22.31). Для решения граничной задачи надо найти связь между произвольными постоянными C_1 и C_2 . Метод фазовых интегралов позволяет это сделать, если, в частности, известен вид решения за точкой поворота, т. е. в области $z \gg z_0$.

Чтобы найти это решение, рассмотрим поведение решения уравнения (22.28) для очень больших значений $z > 0$. Из (22.25) видно, что при $z \rightarrow \infty$ усиливающая неоднородная среда становится однородной с показателем преломления $n_2 = n_2^0 - \Delta$. Решение уравнения (22.28) для однородной усиливающей среды нами рассматривалось в § 1. Как уже отмечалось, вид его существенно зависит от знака выражения $A = Re(\epsilon_2 - a^2)$, а именно, в случае $A \leq 0$ оно представляет собой неоднородную электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении к границе раздела (в данном случае — к точке поворота) и затухающую в противоположном направлении. Очевидно, такой же вид на бесконечности должно сохранить и ВКБ-решение уравнения (22.28). Чтобы записать это решение, нам нужно лишь выбрать соответствующую ветвь функции \sqrt{g} . При этом решение уравнения (22.28) для $z \gg z_0$ будет иметь вид

$$F(\xi) = C_1 (k^2 g)^{-1/4} \exp \left[ik \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{g} d\xi \right]. \quad (22.36)$$

Выражение (22.36) представляет собой убывающее асимптотическое решение уравнения (22.28) для $z \gg z_0$. Известно (см. [9]), что в случае убывающего решения можно однозначно установить вид решения этого уравнения для $z \ll z_0$ и одновременно получить связь между коэффициентами C_1 и C_2 в (22.31). Тогда решение (22.28) вблизи границы раздела будет иметь следующий вид:

$$F(\xi) = C_1 (k^2 g)^{-1/4} \left[\exp \left(ik \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{g} d\xi \right) + i \exp \left(-ik \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{g} d\xi \right) \right]. \quad (22.37)$$

Поскольку нас интересуют решения на действительной оси z , а любая ветвь функции \sqrt{g} аналитическая, то результат

интегрирования не зависит от пути. При этом верхний предел интегрирования ξ в (22.37) можно заменить на z и переписать его следующим образом:

$$F(z) = C_1(k^2g)^{-1/4} \left[\exp\left(ik \int_{\xi_0}^z \sqrt{g} d\xi\right) + i \exp\left(-ik \int_{\xi_0}^z \sqrt{g} d\xi\right) \right]. \quad (22.38)$$

Теперь мы можем решить граничную задачу об отражении плоской электромагнитной волны от границы раздела с рассматриваемой усиливающей средой (22.25). Используя граничные условия для соответствующих векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{H} на границе раздела $z = \mathbf{qr} = 0$ имеем

$$1 + r = F, \\ (1 - r)n_1 \cos \alpha = -\frac{i}{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}, \quad (22.39)$$

где r — амплитудный коэффициент отражения. Отсюда получаем выражение для r :

$$r = \frac{ikn_1F \cos \alpha - \frac{\partial F}{\partial z}}{ikn_1F \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (22.40)$$

Вычисляя интеграл, входящий в (22.38), имеем

$$k \int_{\xi_0}^0 \sqrt{\tilde{\epsilon}_2 - a^2} d\xi = k \int_{\xi_0}^0 \sqrt{[n_2^0 - \Delta(1 - e^{-2k\gamma z}) + i\kappa_2]^2 - a^2} d\xi = \\ = -\frac{1}{2\gamma} \left\{ \sqrt{(n_2^0 + i\kappa_2)^2 - a^2} + (n_2^0 - \Delta + i\kappa_2) \times \right. \\ \times \ln \frac{n_2^0 + i\kappa_2 + \sqrt{(n_2^0 + i\kappa_2)^2 - a^2}}{|a|} - \sqrt{a^2 - (n_2^0 - \Delta + i\kappa_2)^2} \times \\ \left. \times \left[\pi - \arccos \frac{(n_2^0 + i\kappa_2)(n_2^0 - \Delta + i\kappa_2) - a^2}{\Delta |a|} \right] \right\}. \quad (22.41)$$

Введем следующее обозначение:

$$ik \int_{\xi_0}^0 \sqrt{\tilde{\epsilon}_2 - a^2} d\xi = m_1 - im_2. \quad (22.42)$$

Тогда, используя (22.38), (22.40) и (22.42), получим выражение для энергетического коэффициента отражения $R = |r|^2$ в виде

$$R = [(a_1^2 + b^2 + c^2 + d^2) \operatorname{ch} 2m_1 - 2(a_1c + bd) \operatorname{sh} 2m_1 - \\ - 2(a_1d - bc) \cos 2m_2 - (a_1^2 + b^2 - c^2 - d^2) \sin 2m_2] \times \\ \times [(a_2^2 + b^2 + c^2 + d^2) \operatorname{ch} 2m_1 + 2(a_2c - bd) \operatorname{sh} 2m_1 + \\ + 2(a_2d + bc) \cos 2m_2 - (a_2^2 + b^2 - c^2 - d^2) \sin 2m_2]^{-1}, \quad (22.43)$$

где

$$a_1 = n_1 \cos \alpha (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 + \gamma \kappa_2 \Delta (n_2^{02} + a^2 + \kappa_2^2), \\ a_2 = n_1 \cos \alpha (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 - \gamma \kappa_2 \Delta (n_2^{02} + a^2 + \kappa_2^2), \\ b = \gamma n_2^0 \Delta (n_2^{02} - a^2 + \kappa_2^2), \quad (22.44)$$

$$c = \eta_1 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2, \quad d = \eta_2 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2$$

и

$$\eta_1 + i\eta_2 = \sqrt{(n_2^0 + i\kappa_2)^2 - a^2}.$$

Выражение (22.43) получено в ВКБ-приближении, то есть при условии, что показатель преломления усиливающей среды изменяется очень медленно с глубиной. Поэтому членами, пропорциональными γ , здесь нужно пренебречь. Тогда получим:

$$R = [(\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2) \operatorname{ch} 2m_1 - 2\eta_0\eta_1 \operatorname{sh} 2m_1 - 2\eta_0\eta_2 \times \\ \times \cos 2m_2 - (\eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2) \sin 2m_2][(\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2) \operatorname{ch} 2m_1 + \\ + 2\eta_0\eta_1 \operatorname{sh} 2m_1 + 2\eta_0\eta_2 \cos 2m_2 - (\eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2) \sin 2m_2]^{-1}, \quad (22.45)$$

где $\eta_0 = n_1 \cos \alpha$.

Параметры η_1 и η_2 представляют собой не что иное, как проекции векторов фазовой и амплитудной нормали на ось z на границе раздела. А так как на самой границе раздела происходит не полное, а лишь частичное отражение света, то в соответствии с правилом выбора знаков, обеспечивающим непрерывный переход решений через $\kappa_2 = 0$, знаки η_1 и η_2 выбраны так: $\eta_1 > 0$, $\eta_2 \leq 0$. Аналогично можно показать, что в этом случае знак параметра m_1 должен совпадать со знаком κ_2 . Тогда из (22.45) получаем, что при $\kappa_2 \geq 0$ $R \leq 1$, а при $\kappa_2 \leq 0$ $R \geq 1$.

Так как параметр m_1 обратно пропорционален γ , то при достаточно малом γ $\operatorname{ch} 2m_1$ и $\operatorname{sh} 2m_1 \gg 1$. При этом, пренебре-

гая в (22.45) слагаемыми, содержащими $\sin 2m_2$ и $\cos 2m_2$ и предполагая $\Delta \gg |\chi_2|$, получим

$$R = [\cos^2 \alpha + n^2 - \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \operatorname{th} 2m_1] \times \\ \times [\cos^2 \alpha + n^2 - \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \operatorname{th} 2m_1]^{-1}, \quad (22.46)$$

где $n = n_2^0/n_1$. Наиболее интересен случай «полного отражения» на максимальной глубине. Из (22.32) видно, что это происходит, когда $\sin \alpha = n(1 - \Delta')$, где $\Delta' = \Delta/n_2^0$. В этом случае усиление должно быть максимальным. Тогда получаем

$$R = [1 - n^2 + 4n^2\Delta' - 2\sqrt{2n^2\Delta'(1 - n^2 + 2n^2\Delta')}] \operatorname{th} 2m_1 \times \\ \times [1 - n^2 + 4n^2\Delta' + 2\sqrt{2n^2\Delta'(1 - n^2 + 2n^2\Delta')}] \operatorname{th} 2m_1]^{-1}. \quad (22.47)$$

В свою очередь оказывается, что это выражение имеет максимум при $n^2 \approx 1$, равный

$$R = \frac{1 - \operatorname{th} 2m_1}{1 + \operatorname{th} 2m_1}. \quad (22.48)$$

При предельном угле «полного внутреннего отражения» и условии $\Delta' \gg |\chi'|$, где $\chi' = \frac{\chi_2}{n_2^0}$, из (22.41) можно получить $2|m_1| \approx \frac{\pi \sqrt{|\chi'|}}{\gamma}$. При малых γ , когда $\operatorname{th} 2m_1 \rightarrow 1$, $R \rightarrow \infty$. Следовательно, в этой вполне реальной модели усиливающей структуры коэффициент отражения может быть сколь угодно большим.