1982 Том XXVI № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.948.32:539.125.523:523.035

А. А. КИЛБАС, Н. Н. РОГОВЦОВ

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ

(Представлено академиком АН БССР В. И. Крыловым)

1. Известно немного случаев, когда интегральное уравнение

$$S(\tau)=\lambda(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda_1(\tau')\,k(\tau-\tau')\,S(\tau')\,d\tau'+g(\tau),\quad -\infty<\tau<+\infty, \tag{1}$$

решено в замкнутой форме. При $\lambda(\tau)=\lambda_1(\tau)=1$ оно переходит в классическое уравнение с одним ядром [1, 2]. Для кусочно-постоянных $\lambda(\tau)$, $\lambda_1(\tau)$ уравнение (1) решалось в [3, 4]. Некоторые частные случаи уравнения (1) рассмотрены в [5]. Данное уравнение представляет интерес для теории переноса излучения в неоднородных плоскопараллельных средах, так как, когда $\lambda_1(\tau)=1$, $\lambda(\tau)$ — вероятность «выживания» кванта, $k(\tau)=E_1(|\tau|)/2$, его решение является функцией источников [6].

В настоящей заметке получено решение в квадратурах интегрального уравнения

$$S(\tau)=\lambda(\tau,\ \alpha,\ \beta)\int_{-\infty}^{+\infty}k(\tau-\tau')\,S(\tau')\,d\tau'+g(\tau),\quad -\infty<\tau<+\infty, \tag{2}$$

где

$$\lambda(\tau,\ \alpha,\ \beta)=\frac{\alpha+\beta\exp(-\mu\tau)}{1+\exp(-\mu\tau)},\ \mu\neq 0. \tag{3}$$

Найдены также некоторые асимптотические формулы для решений уравнений (1) и (2) в случае, когда $g(\tau)=1$, $k(\tau)=E_1(|\tau|)/2$, и даны приложения полученных результатов к вычислению ряда средних характеристик, используемых в теории переноса излучения (нейтронов).

Отметим, что уравнение (2) является модифицированным уравнением плавного перехода [2] и его решение получено методом сведения к краевой задаче Карлемана, впервые предложенного в [7].

2. Пусть $K(\tau)$ — интеграл Фурье от функции $k(\tau)$; V и V^{-1} — прямое и обратное преобразования Фурье [2]. Будем рассматривать уравнение (2) в нормальном случае:

$$1-\alpha K(\tau)\neq 0,\ 1-\beta K(\tau)\neq 0,\ -\infty<\tau<+\infty.$$

Введем обозначения:

$$D(\tau)=\frac{1-\beta K(\tau)}{1-\alpha K(\tau)},\quad H(\tau)=\frac{(\alpha-\beta)K(\tau)G(\tau)}{1-\alpha K(\tau)},$$

$$X^+(\tau) = \sqrt{D(\tau)} \exp\left(\frac{i}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln D(\tau')\, d\tau'}{\exp \dfrac{2\pi(\tau - \tau')}{\mu} - 1} \right),$$

$$F(\tau) = \frac{1}{2} H(\tau) + \frac{iX^+(\tau)}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(\tau')}{X^+(\tau')} \frac{d\tau'}{\exp \dfrac{2\pi(\tau - \tau')}{\mu} - 1}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если* $k(\tau) \in L(-\infty, +\infty)$, $g(\tau) \in L_2(-\infty, +\infty)$, $[\operatorname{Arg} D(\tau)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, *то интегральное уравнение (2) в* $L_2(-\infty, +\infty)$, *безусловно, разрешимо и его единственное решение при* $\mu > 0$ *имеет вид*

$$S(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\tau') + \exp(\pi\tau'/\mu) F(\tau')}{1 - \beta K(\tau')} e^{-i\tau\tau'} d\tau', \tag{5}$$

где функция $F(\tau)$ *определена формулой (4).*

Пусть дополнительно к предположениям теоремы 1 выполняются условия: функция $d(\tau) = V^{-1}(D(\tau) - 1) \in L(-\infty, +\infty)$ и $d'(\tau) \in L_2(-\infty, +\infty)$. Тогда аналогично ([2]) доказывается, что единственное решение уравнения (2) представимо в виде

$$S(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\tau') + X(\tau')\Psi(\tau')}{1 - \beta K(\tau')} e^{-i\tau\tau'} d\tau', \tag{6}$$

где

$$X(\tau) = \sqrt{D(\tau)} \exp\left(\frac{i}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln D(\tau')\, d\tau'}{\operatorname{th} \dfrac{\pi(\tau - \tau')}{\mu}} \right), \quad \Psi(\tau) = V\left[\frac{1}{1 + e^{-\mu t}} V^{-1}\left(\frac{H}{X} \right) \right](\tau).$$

Формулу (6) можно использовать для приближенного решения уравнения (2); см. ([2]).

Замечание 1. При $\mu < 0$ уравнение (2) равносильно уравнению вида (2), где $\lambda(\tau, \alpha, \beta)$ заменено на $\lambda(\tau, \beta, \alpha)$, и, следовательно, также может быть решено в замкнутой форме.

Примеры. 1. $k(\tau) = E_1(|\tau|)/2$, $0 \leqslant \alpha$, $\beta < 1$. Решение уравнения (2) при $\mu > 0$ дается формулой (5) с $K(\tau) = \operatorname{arctg} \tau / \tau \sqrt{2\pi}$.

2. $k(\tau) = \sqrt{\pi/2} \exp(-\delta|\tau|)$, $\delta > 0$; $\alpha < \beta$, причем действительные постоянные α, β, δ связаны соотношениями $\delta(\delta - \beta) = l^2$, $\delta(\delta - \alpha) = (l + \mu)^2$, где l — некоторая положительная постоянная. Решение уравнения (2) при $\mu > 0$ дается формулой (6), которая принимает вид

$$\begin{aligned} S(\tau) = g(\tau) - \frac{\alpha + \beta \exp(-\mu\tau)}{1 + \exp(-\mu\tau)} \frac{\delta}{\mu} \int\limits_0^{+\infty} [e^{-l\sigma} - e^{-(l+\mu)\sigma}]\, g(\tau - \sigma)\, d\sigma + \\ + \frac{\delta}{\mu}(2l + \mu) \int\limits_{\tau}^{+\infty} \frac{\alpha + \beta \exp(-\mu\tau)}{1 + \exp(-\mu\sigma)} e^{(l+\mu)(\tau - \sigma)} d\sigma \int\limits_0^{+\infty} [e^{-l\sigma'} - e^{-(l+\mu)\sigma'}] g(\sigma - \sigma') d\sigma'. \end{aligned} \tag{7}$$

3. Исследуем асимптотику решений уравнений (1) и (2) при $\lambda_1(\tau) \equiv 1$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функция $\lambda(\tau)$ *равномерно непрерывна на* $(-\infty, +\infty)$, *причем*

$$0 \leqslant \lambda(\tau) \leqslant m < 1, \; -\infty < \tau < +\infty;$$

2) $k_1(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda(\tau) - \lambda(\tau')| E_1(|\tau - \tau'|)\, d\tau' \in L(-\infty, +\infty)$. *Тогда при* $g(\tau) = 1$ *и* $k(\tau) = E_1(|\tau|)/2$ *решение уравнения (1) представимо в виде*

$$S(\tau) = (1 - \lambda(\tau))^{-1} + S_1(\tau), \tag{8}$$

где $S_1(\tau) \in L(-\infty, +\infty) \bigcap C(-\infty, +\infty)$.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 2 для решения уравнения (1) имеет место асимптотическая формула

$$S(\tau) = (1 - \lambda(\tau))^{-1} + o(|\tau|^{-1}),\ |\tau| \to +\infty. \tag{9}$$

Следствие 2. Пусть $g(\tau) = 1$, $k(\tau) = E_1(|\tau|)/2$, $0 \leqslant \lambda(\tau, \alpha, \beta) \leqslant m < 1$ для $\tau \in (-\infty, +\infty)$, где $\lambda(\tau, \alpha, \beta)$ дается формулой (3). Тогда для решения уравнения (2) имеют место асимптотические формулы (8) и (9), в которых $\lambda(\tau) = \lambda(\tau, \alpha, \beta)$.

Введем обозначение:

$$f(\tau, \alpha, \beta) = \frac{\lambda(\tau, \alpha, \beta)}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_1(|\tau - \tau'|)[(1 - \lambda(\tau', \alpha, \beta))^{-1} - (1 - \lambda(\tau, \alpha, \beta))^{-1}]\, d\tau'.$$

Теорема 3. *Пусть* $0 \leqslant \beta < 1$, $\beta - \alpha = \sigma(1 - \beta)^{\gamma}$, $0 < \sigma \leqslant 1$, $\gamma \geqslant 1$ *и* $S_1(\tau, \alpha)$ — *решение в* $L(-\infty, +\infty)$ *уравнения (1) при* $\lambda(\tau) \cdot \lambda_1(\tau') = \alpha$, $k(\tau) = E_1(|\tau|)/2$, $g(\tau) = f(\tau, \alpha, \beta)$. *Тогда при* $g(\tau) = 1$ *и* $k(\tau) = E_1(|\tau|)/2$ *решение уравнения (2) удовлетворяет следующим асимптотическим формулам:*

$$S(\tau) = (1 - \lambda(\tau, \alpha, \beta))^{-1} + S_1(\tau, \alpha) + O((1 - \beta)^{2\gamma - 3}),\ (\beta \to 1), \tag{10}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 - \lambda(\tau, \alpha, \beta))^{-1} g(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1(\tau, \alpha)\, g(\tau)\, d\tau + O((1 - \beta)^{2\gamma - 2,5}),\ (\beta \to 1), \tag{11}$$

где функция $\lambda(\tau, \alpha, \beta)$ *определена формулой (3),* $|g(\tau)| < \infty$.

Замечание 2. Если $g(\tau) \in L(-\infty, +\infty)$, $k(\tau) = E_1(|\tau|)/2$, $\lambda(\tau) \cdot \lambda_1(\tau') = \mathrm{const} = \alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$, то единственное решение уравнения (1) в $L(-\infty, +\infty)$ имеет вид

$$S(\tau) = g(\tau) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\infty(|\tau - \tau'|, \alpha)\, g(\tau')\, d\tau',$$

где $\Phi_\infty(\tau, \alpha)$ — известная функция; см., например, [8].

4. Для задач теории переноса (в частности, ее приложений в астрофизике) представляют интерес различные средние характеристики. Отметим, что средние числа $N_0(\tau)$, $N_1(\tau)$ перепоглощений кванта, ведущих к его «гибели» (под «гибелью» кванта понимается безвозвратное выбывание его из поля излучения), являются решениями интегрального уравнения (1), когда $k(\tau) = E_1(|\tau|)/2$, $g(\tau) \equiv 1$ соответственно при $\lambda_1(\tau) \equiv 1$ и $\lambda(\tau) \equiv 1$. Величины $N_0(\tau)$ и $N_1(\tau)$ имеют указанный смысл для кванта, соответственно поглощенного и испущенного на оптической глубине τ. Между ними имеет место соотношение $N_0(\tau) = 1 + \lambda(\tau) N_1(\tau)$. Для источников, распределенных в среде, аналогами $N_0(\tau)$ и $N_1(\tau)$ являются N_2 и N_3, которые вычисляются по формулам

$$N_2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, d\tau\right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_0(\tau)\, g(\tau)\, d\tau,$$

$$N_3 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, d\tau \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Отметим, что $N_0(\tau)$ и $N_1(\tau)$ в астрофизической литературе (см., например, ([9])) обычно называют средними числами рассеяний фотона. Подчеркнем, что $N_0(\tau) \equiv N_1(\tau)$ и $N_2 \equiv N_3$ только для случая однородной среды.

Из теорем 2 и 3 вытекают следующие результаты:

Следствие 3. При выполнении условий теоремы 2

$$N_0(\tau) = (1 - \lambda(\tau))^{-1} + o(|\tau|^{-1}), \quad |\tau| \to +\infty.$$

Следствие 4. При выполнении условий теоремы 3

$$N_0(\tau) = S(\tau), \quad N_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, d\tau \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau)\, g(\tau)\, d\tau,$$

где для $S(\tau)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau)\, g(\tau)\, d\tau$ имеют место асимптотические формулы (10) и (11) соответственно.

Исходя из указанной выше связи между $N_0(\tau)$ и $N_1(\tau)$, можно получить соответствующие асимптотические формулы для $N_1(\tau)$, N_3.

В заключение отметим, что формула (7) при $\delta = 1$, $l^2 > 1 - 1/\sqrt{2\pi}$, $l + \mu \leqslant 1$ дает решение интегрального уравнения для функции источников в случае одномерной неоднородной среды.

Summary

The special integral equations of a convolution type are solved in a closed form. Asymptotic formulas for the solutions are obtained. Applications to the radiation transfer and the neutron transfer theories are given.

Литература

[1] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.— М.—Л.: Гостехиздат, 1948.— 479 с. [2] Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки.— М.: Наука, 1978.— 295 с. [3] Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса.— М.: Мир, 1972.— 384 с. [4] Раковщик Л. С. Труды Ленинградского инженерно-экономического института, 1966, вып. 63, с. 69—77. [5] Роговцов Н. Н. ДАН БССР, 1980, т. 24, № 11, с. 974—977. [6] Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Физматгиз, 1972.— 335 с. [7] Черский Ю. И. ДАН СССР, 1970, т. 190, № 1, с. 57—60. [8] Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел.— М.: Физматгиз, 1969.— 468 с. [9] Соболев В. В. Астрофизика, 1966, т. 2, вып. 3, с. 239—250.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина,
Белорусский политехнический институт

Поступило 25.06.81