

## О РАСЧЕТЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

Кравчук А.С.

*An iterative method is proposed to the friction contact problem. Numerical implementation is given.*

**1. Введение.** Работа посвящена развитию метода расчета усилий контактного взаимодействия с учетом трения в области контакта. Постановка задачи отличается от обычно используемых постановок [1 - 3] тем, что закон трения содержит скорости – производные перемещений по времени или по параметру, определяющему изменение внешних воздействий.

Отметим, что закон трения, содержащий скорости, используется в теории качения. Однако это обстоятельство не мешает использовать традиционные методы нелинейного программирования для решения конкретных задач о качении деформируемых тел, поскольку переход к подходящей подвижной системе отсчета позволяет преобразовать эти задачи к стационарным [4-5].

Целью настоящей работы является изучение нестационарных процессов, в которых характеристики контактного взаимодействия зависят от истории нагружения. Адекватным инструментом для построения математической модели нестационарных (переходных) процессов контактного взаимодействия является вариационный метод исследования систем с односторонними связями. Исторически первой работой по исследованию систем с односторонними (неудерживающими) связями была работа М.В.Остроградского [6], в которой был указан алгоритм решения динамических задач для систем с конечным числом степеней свободы. Полное решение задачи М.В.Остроградского было дано в трудах Майера и Цермело.

Первой работой по механике деформируемого твердого тела с учетом односторонних ограничений была работа А.Синьорини [7], перепечатанная, с некоторыми дополнениями, в статье [8]. Возрождение интереса к работе Синьорини связано с тем, что развитие вычислительной техники и численных методов позволило построить обобщения задачи Синьорини как в механике деформируемого твердого тела, так и на многие задачи с другим физическим содержанием – задачи теории фильтрации, биологические мембраны, теплопроводности и многие другие [9]. Численные методы и алгоритмы решения задач с односторонними ограничениями даны в монографии [10].

Несмотря на продолжающийся рост публикаций, многие проблемы остаются нерешенными. К числу таких проблем относится рассматриваемая в данной статье проблема исследования контактного взаимодействия с переменными неизвестными заранее и зависящими от процесса нагружения границами раздела областей сцепления и проскальзывания.

**2. Постановка задачи. Математическая модель.** Пусть деформируемое тело соприкасается с жестким подвижным штампом. задается либо кинематика штампа – смещение и поворот, или же процесс силового нагружения – изменение векторов силы и момента, действующих на штамп как на абсолютно твердое тело; для определенности ниже предполагается, что задана кинематика штампа. Требуется найти напряженно-деформированное состояние тела и параметры контактного взаимодействия – область контакта, границу раздела областей сцепления и скольжения.

Математическая модель содержит уравнения равновесия тела:

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} = 0 \tag{1}$$

работающие в области  $\Omega$ , занятой деформируемым телом; в уравнении (1).  $\nabla$  - оператор Гамильтона,  $\hat{\sigma}$  - тензор напряжений, точка означает операцию свертки. Рассматривается линейно упругий материал, подчиняющийся закону Гука:

$$\hat{\sigma} = {}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{\varepsilon} \quad (2)$$

где  ${}^4\hat{a}$  тензор модулей упругости, индекс «4» означает четвертый ранг; двойная точка – операция двойной свертки. В декартовой системе отсчета уравнение (2) имеет вид:

$$(\hat{\sigma})_{ij} = ({}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{\varepsilon})_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

повторяющиеся индексы означают суммирование по этим индексам от 1 до 3.  $\hat{\varepsilon}$  - тензор малых деформаций Коши:

$$\hat{\varepsilon} = 0.5(\nabla u + \nabla u^T) \quad (4)$$

$u = u(x)$  - вектор перемещений,  $x$  - радиус-вектор точки в пространстве.

Обозначим через  $\Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma \cup \Sigma_c$  границу деформируемого тела. В точках части  $\Sigma_\sigma$  границы задан вектор поверхностных усилий с плотностью  $P = P(x, s)$ ,  $x \in \Sigma_\sigma$ ,  $s$  - параметр, определяющий процесс изменения внешних воздействий; на части  $\Sigma_u$  заданы перемещения  $U$ ; ниже предполагается, что  $U = 0$ .

Для описания движения штампа и граничных условий на части границы  $\Sigma_c$ , точки которой могут контактировать со штампом, введем, наряду с неподвижной лабораторной системой отсчета  $Ox_1x_2x_3$ , подвижную жестко связанную со штампом систему отсчета  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . В собственной системе отсчета уравнение границы штампа  $A$  запишем в виде:

$$\Psi(\xi) = 0 \quad (5)$$

По предположению, функция  $\Psi(\xi)$  в уравнении (5) обладает тем свойством, что  $\Psi(\xi) > 0$  для точек  $\xi$  вне штампа,  $\Psi(\xi) < 0$  для внутренних точек штампа.

Зададим движение штампа уравнением:

$$x = U_p + \hat{A} \cdot \xi \quad (6)$$

где  $U_p$  - вектор поступательного смещения,  $\hat{A}$  - матрица, задающая вращение штампа; уравнение (6) используется для бесконечно-малых движений, в вычислениях – для приращений. Решим уравнение (6) относительно переменных  $\xi$ :

$$\xi = \hat{A}^{-1} \cdot (x - U_p) \quad (7)$$

Используя введенные выше гипотезы относительно функции  $\Psi(\xi)$ , запишем первое из условий на части границы  $\Sigma_c$ , отражающее требование непроникания точек границы деформируемого тела внутрь штампа, в виде:

$$\Psi[\hat{A}^{-1} \cdot (x + u(x, s) - U_p)] \geq 0, \forall x \in \Sigma_c \quad (8)$$

Предположим, что нормальная компонента усилий контактного взаимодействия на  $\Sigma_c$  является неотрицательной, т.е. растягивающими усилия контактного взаимодействия быть не

могут. Пусть  $\nu$  - единичный вектор внешней нормали к границе тела. Тогда, используя разложение  $\hat{\sigma} \cdot \nu|_{\Sigma_c} = \sigma_N \nu + \sigma_T$ , будем иметь:

$$\sigma_N(x) \leq 0, \forall x \in \Sigma_c \quad (9)$$

Касательная компонента  $\sigma_T$  вектора усилий контактного взаимодействия на части  $\Sigma_c$  подчиняется закону трения Амонтона – Кулона:

$$|\sigma_T| < f |\sigma_N| \Rightarrow \dot{u}_T = 0, \quad (10)$$

$$|\sigma_T| = f |\sigma_N| \Rightarrow \frac{\dot{u}_T}{|\dot{u}_T|} = -\frac{\sigma_T}{|\sigma_T|} \quad (11)$$

Соотношение (11) справедливо в тех точках, в которых  $|\dot{u}_T| \neq 0$ ; если же  $|\dot{u}_T| = 0$ , то модуль напряжения трения  $s_T$  будет определяться уравнением  $|\sigma_T| = f |\sigma_N|$ , а направление  $s_T$  будет найдено в процессе решения задачи; точка в выражении  $\dot{u}_T$  означает производную по параметру  $s$ , определяющему изменение состояния системы, в динамике – по времени. Необходимо также задать начальное состояние, например, для значения  $s = 0$ :

$$U(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega \quad (12)$$

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти перемещения, деформации, напряжения, область контакта и линию раздела областей сцепления и проскальзывания из соотношений (1)-(4), (8)-(12). Подчеркнем, что состояние исследуемой системы в момент времени  $t$  зависит от ее состояний во все предшествующие моменты, т.е. в общем случае

$$u(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (13)$$

**3. Метод решения.** Впервые поставленная задача была рассмотрена в работе [11]. Для решения было предложено использовать принцип возможных скоростей. Данный принцип приводит к неравенству:

$$a(u, \delta \dot{u}) \geq \int_{\Sigma_c} f |\sigma_N(u)| (|\dot{v}_T| - |\dot{u}_T|) d\Sigma, \quad (14)$$

$$\forall \delta \dot{u} = \dot{v} - \dot{u}, \dot{u} \in \dot{K}_u, \dot{v} \in \dot{K}_u$$

в котором  $\delta \dot{u} = \dot{v} - \dot{u}$ ,  $\dot{u}$  – истинные скорости в данный момент времени,  $\dot{v}$  – возможные скорости. В соответствии с принципом Журдена, в данный момент времени варьируются только скорости, а перемещения, ускорения и время остаются постоянными. Определение множества возможных скоростей  $\dot{K}_u$  дано, например, в [12]. Поскольку  $\dot{K}_u$  зависит от поля перемещений, то это дает основание назвать неравенство (14) квази-вариационным – в соответствии с терминологией, введенной в работах Ж.-Л.Лионса.

В работе [11] для решения неравенства (14) было предложено использовать метод локального потенциала, однако этот подход не был реализован ввиду его сложности. Более эффективным оказался принцип возможных перемещений Лагранжа, использованный для нахождения приращения перемещений  $u^{t+dt} - u^t = u(x, t+dt) - u(x, t)$ . Здесь, вместо неравенства (14) возникает неравенство:

$$a(u, \delta u) \geq \int_{\Sigma_c} f |\sigma_N(u)| (|v_T - u_T^t| - |u_T - u_T^t|) d\Sigma, \quad (15)$$

$$\forall \delta u = v - u, u \in K, v \in K, u \equiv u^{t+dt}$$

$K$  - множество полей перемещений, удовлетворяющих условию непроникания (8). Заменяя здесь приращения их главной линейной частью, можно перейти к неравенству (14). Производя разбиение отрезка  $[0, T]$  на конечное число элементов, можно построить конечно-разностную схему, позволяющую учесть историю нагружения. Используя смешанные вариационные принципы, строгое обоснование которых дано в монографии [13], задачу можно преобразовать к последовательности задач разыскания седловой точки некоторых функционалов, для решения которых имеются эффективные итерационные алгоритмы.

Впервые это было сделано в работе [14] сразу для случая пространственной задачи с использованием решений Буассинеса и Черрутти для упругого полупространства. Точность решения была невысокой – было использовано всего 3 шага по нагружению и 100 граничных элементов при дискретизации по пространственным переменным. Однако развитый подход позволил сделать некоторые важные качественные выводы и получить количественные оценки влияния истории нагружения.

Развитие вычислительной техники за прошедшее время дало возможность уточнить эти выводы и оценки и получить новые, позволяющие убедиться в работоспособности развитой методики. Приведем некоторые новые результаты.

#### 4. Численные результаты и их анализ.

4.1. *Плоская задача.* Пусть жесткий шероховатый штамп внедряется в прямоугольник из линейно упругого изотропного материала – см. Рис.1.

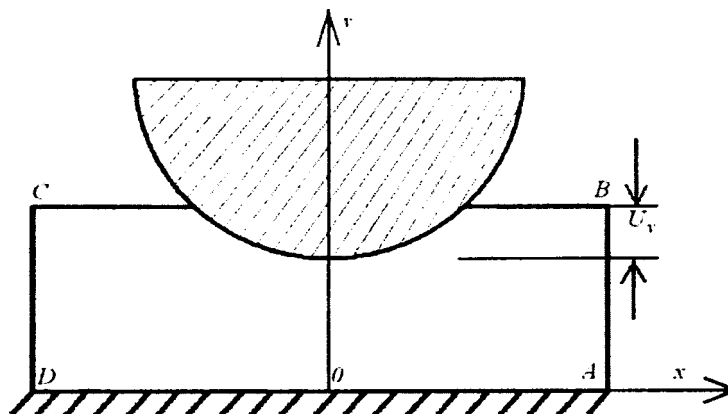


Рис.1: расчетная схема

Сторона  $DA$  жестко закреплена, стороны  $AB$  и  $CD$  свободны от напряжений. Область  $\Sigma_c$ , которая была введена в п.2, совпадает со стороной  $BC$ . Задан процесс внедрения штампа  $U_y$ . Для дискретизации задачи по пространственным переменным был использован метод граничных элементов. Эпюры напряжения трения  $\sigma_T$  для шести шагов внедрения, каждый из которых равен  $0.02AB$ , показаны на Рис.2 (всего было использовано 10 шагов); по горизонтальной оси откладываются номера узлов сетки на стороне  $BC$ , начиная от точки  $B$ . Решение для первого шага, равного  $0.01AB$  показано пунктиром, штриховая кривая – решение для одного шага, равного  $0.1AB$ . Заметим, что для построения аналитических решений [2] обычно используется определение величины  $\sigma_T$  как проекции вектора усилий контактного взаимодействия на ось  $Oy$ . Здесь же  $\sigma_T$  определяется как проекция усилий контактного взаимо-

действия на внутреннюю нормаль к штампу. Другие входные данные:  $AB = CD = 1$ ,  $BC = DA = 2$ , число граничных элементов  $AB$  и  $CD$  равно 50, на  $BC$  и  $DA$  - 200; радиус круга равен 4, коэффициент трения 0.2. Один из важных результатов заключается в том, что итерационный процесс, полное описание которого имеется, например, в работе [15], является весьма чувствительным к выбору нулевого приближения для напряжений трения. В частности, если выбрать  $\sigma_T^{(0)}$  для очередного шага погружения равным значению  $\sigma_T$  на предыдущем шаге (после окончания итераций), то найти решение за приемлемое число итераций машинного

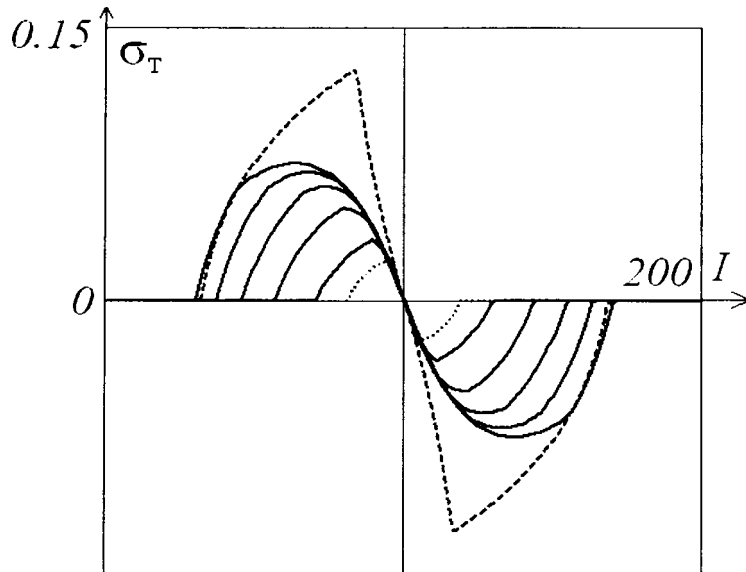


Рис. 2

времени с хорошей точностью невозможно. Оптимальным (найденным методом проб и ошибок) является либо выбор  $\sigma_T^{(0)} = 0$ , либо  $\sigma_T^{(0)} = -f |\sigma_N^{(0)}| x$ , где  $\sigma_N^{(0)}$  - решение задачи без трения для текущего значения глубины погружения. Из Рис. 2 видно также, что решение, соответствующее одному шагу, дает сильно завышенные значения напряжений трения; заметим, что один шаг соответствует замене скоростей в законе трения Кулона относительными перемещениями – именно такая постановка используется в большинстве работ по контактным задачам с трением. Кроме того, учет истории нагружения приводит к сглаживанию кривых распределения напряжений трения, в то время как имеющиеся аналитические решения [2] имеют разрыв производной в точке, разделяющей области сцепления и скольжения. Отметим также, что решение, соответствующее проецированию усилий контактного взаимодействия на ось  $Oy$ , располагается между решениями для одного шага и для десятого шага при многошаговом процессе.

Для того, чтобы убедиться в достоверности численных решений, была решена задача Л.А.Галина [16, 17] о внедрении жесткого прямоугольника в упругую полуплоскость; оказалось, что, как и в [16, 17], граница раздела зон сцепления и скольжения зависит только от коэффициента трения и коэффициента Пуассона, ее положение такое же, как и в решениях Л.А.Галина и Спенса. Кроме того, во всех задачах производилось измельчение граничных элементов и шагов по погружению, а также увеличение количества итераций. Представленные результаты соответствуют стабилизации численных решений, т.е. дальнейшее увеличение указанных параметров процесса численного решения не приводит к заметным поправкам. Стабилизация нормального давления в центре области контакта и напряжения трения в точке, отстоящей на  $0.5BC$  от центра иллюстрируется кривыми на Рис. 3. По горизонтальной оси откладывается номер итерации  $k$ , по вертикальной – значения  $\sigma_N^{(k)}$  (сплошная кри-

вая) и  $\sigma_r^{(k)} \cdot 5$  (пунктир; умножение на 5 производится для выравнивания масштабов). Видно, что стабилизация решения происходит при  $k \approx 60-70$ . Кроме того, стремление решений к стабильному значению является немонотонным.

4.2. *Пространственная задача.* Эта задача исследована не так подробно как плоская. Имеющиеся здесь результаты подтверждают выводы, сформулированные для случая плоской задачи. Приведем в качестве примера распределение квадрата модуля контактных напряжений для задачи о внедрении прямого кругового цилиндра конечной длины в линейно упругое изотропное полупространство – Рис. 4.

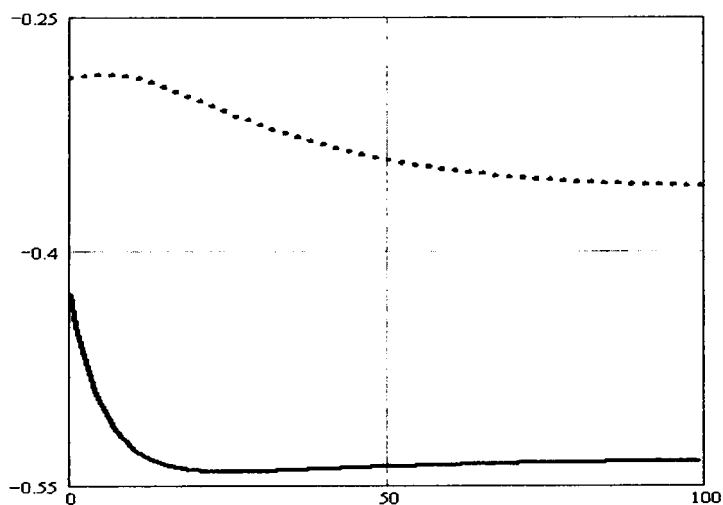


Рис.3

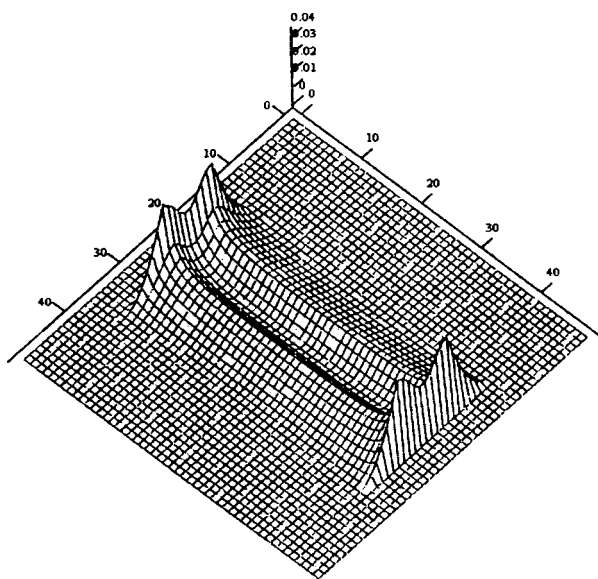


Рис.4

Видно, что напряжение трения имеет два максимума, наличие которых можно объяснить сложным взаимодействием процессов в областях сцепления и скольжения. Естественно, что точное решение содержит особенности вблизи острых кромок цилиндра. Полученное численное решение можно интерпретировать – как это обычно делают – как решение для цилиндра со скругленными краями, причем радиус скругления определяется размером элемента дискретизации. В рассматриваемом примере было использовано 10000 граничных элемен-

тов, длина стороны граничного элемента равнялась 0.01 длины стороны квадрата, в которую заключалась возможная область контакта.

**Заключение.** Таким образом, в результате выполнения данной работы развит метод решения контактных задач с учетом законов трения, содержащих скорости относительного скольжения и позволяющих учесть историю нагружения системы контактирующих тел. Решены плоские и пространственные задачи, из анализа решений которых сделаны важные для теории и приложений выводы об особенностях предложенной методики и распределений напряжений трения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 05-01-00591.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М: МИР, 1989. – 509 с.
2. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
3. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. – Киев: Наукова Думка, 1985. – 175 с.
4. Kalker J.L. Rolling with slip and spin in presence of dry friction//Wear.– 1966. V.9. – P. 20-31.
5. Гольдштейн Р.В. и др. Решение вариационными методами пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением// Успехи механики. – 1982. Т.5, №3/4. – С.61-102.
6. Остроградский М.В. Полное собрание трудов. Том 2. – Киев. АН УССР. С. 32-59.
7. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica// Atti Soc. Ital. Progr. Sei. – 1933.– P. 513–533.
8. Signorini A. Questioni di elastostatica non linearizzata e semilinearizzata// Rend. Mat. Appl. 1959. – V. 18. N 1–2. – P.95–130.
9. Дюво Ж., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
10. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Трёмольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
11. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикладная математика и механика. – 1980. Т. 44. Вып. 1. – С. 122–129.
12. Kravchuk A., Neittaanmaki Pekka. Dynamic Identification of the Deformed Body Parameters. In: Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation “Waves 2003”. Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation “Waves 2003” held at Jyvaskyla, Finland, 30 June – 4 July 2003. Springer, ed. by G.C.Cohen, E.Heikkola, P.Joly, P.Neittaanmaki, 2003. – P.577–581.
13. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. –М.: МГАПИ, 1997. – 345 с.
14. Кравчук А.С. Решение некоторых трехмерных контактных задач с учетом трения// Трение и износ. – 1981. Т. II. № 4. – С. 589–595.
15. Кравчук А.С. , Нейтгаанмяки П. Решение контактных задач с использованием метода граничных элементов// Прикладная математика и механика. – 2006. Т. 70. №5.
16. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии сил трения и сцепления// Прикладная математика и механика. – 1945. Т. 9. Вып. 5. – С. 413–424.
17. Spence D.A. An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction//Proc. Camb.Phil.Soc.– 1973. Vol.73. – P. 249–268.