Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

О ВОЗМОЖНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ФОРМАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛИННЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Михасев Г.И.

Free localized vibrations of thin long non-homogeneous cylindrical shell under initial stress are studied. The Flügge type basic equations for a shell, including the effect of initial tensions due to axial compressive force and internal or external pressure, are employed, and by using the asymptotic method the solutions of the basic equations are constructed in the form of functions decreasing quickly far from some parallel on the shell surface.

Введение

Свободные колебания предварительно напряженных оболочек исследовались многими авторами [1–5]. Так в [1], Арменакас и Херманн изучили влияние кольцевых мембранных сил на свободные колебания бесконечной цилиндрической оболочки. С.Н. Кукуджанов рассмотрел влияние давления на собственные частоты цилиндрических оболочек средней длины [5]; им же установлено, что внешнее нормальное давление приводит к снижению нижнего спектра частот. Зависимость собственных частот колебаний цилиндрических оболочек от величины осевой силы изучено в [2–4]. В приведенных и других известных работах рассматривались, как правило, задачи о движении оболочек с постоянными геометрическими и физическими параметрами. Свободные колебания таких оболочек характеризуются тем, что волны покрывают всю поверхность оболочки.

В работе [6], по-видимому, впервые предложен метод, позволяющий исследовать свободные колебания цилиндрических оболочек средней длины, характеризующихся локализацией форм в окрестности так называемых «слабых» образующих (асимптотических линий). Наличие слабых образующих может быть вызвано неоднородностью как геометрических параметров (кривизны, толщины, длины образующей [7]), так и физических характеристик (модуля Юнга, плотности материала и т.п.). В данной работе на основе уравнений Флюгге исследуются свободные колебания длинной, неоднородной в осевом направлении цилиндрической оболочки с учетом действующих в срединной поверхности мембранных усилий. С использованием метода, развитого в [6, 8], решения уравнений построены в виде функций, быстро убывающих вдали от некоторой «слабой» параллели. Показано, что построение подобных собственных форм колебаний на основе уравнений Флюгге возможно лишь в случае сжимающих осевых сил.

Постановка задачи и исходные уравнения

Рассмотрим длинную упругую цилиндрическую оболочку радиуса R. Пусть x и φ – продольная и окружная координаты на срединной поверхности оболочки. Обозначим через $h^*(x)$, $E^*(x)$, $\nu(x)$, $\rho^*(x)$ соответственно толщину, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала, которые в общем случае являются функциями продольной координаты x. Считаем, что оболочка находится под действием внешних сил: сжимающей осевой силы T_1°, приложенной к торцам оболочки, и гидростатического давления q_n°, которое может быть как внешним, так и внутренним. Будем полагать, что внешнее (в общем случае комбинированное) нагружение оболочки не приводит к бифуркации начального безмоментного напряженного состояния, характеризующегося осевой и кольцевой усилиями T_1° и $T_2^\circ = R q_n^\circ$.

Поставим задачу об исследовании линейных собственных осесимметричных изгибных колебаний предварительно напряженной неоднородной цилиндрической оболочки. При этом, среди всех возможных видов колебаний будем исследовать такие, которые характеризуются локализацией форм в окрестности некоторой параллели, на которой переменные толщина оболочки, модуль Юнга (или другие параметры) достигают своих экстремальных значений. В качестве исходных используем уравнения Флюгге, которые в случае осесимметричного движения имеют вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + T_1^\circ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \rho^* h^* \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{1}{R} T_2 - T_1^\circ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} T_2^\circ u_3 - \rho^* h^* \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

Здесь t – время, u_1, u_3 – продольное и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки, а T_1, T_2, M_1 – дополнительные мембранные усилия и момент, вызванные колебанием оболочки. Для осесимметричного движения данные усилия определяются как

$$T_1 = \frac{E^* h^*}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\nu}{R} u_3\right), \quad T_2 = \frac{E^* h^*}{1-\nu^2}\left(\nu \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{R} u_3\right), \quad M_1 = -\frac{E^* h^{*3}}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Неизвестные перемещения ищем в виде

$$u_1 = RU(x)\cos\omega t, u_3 = RW(x)\cos\omega t, \tag{4}$$

где ω – искомая частота колебаний. Перейдем к безразмерным величинам по формулам:

$$x = Rs, \ E^* = E_0 E(s), \ h^* = h_0 h(s), \ \rho^* = \rho_0 \rho(s), \ T_1^\circ = \mu^2 E_0 h_0 f_1, \ T_2^\circ = E_0 h_0 f_2. \tag{5}$$

Здесь h_0, E_0, ρ_0 – характерные значения толщины, модуля Юнга и плотности материала соответственно, которые будут введены ниже (см. соотношения (19)), а $\mu^4 = h_0^2/(12R^2)$ – естественный малый параметр, характеризующий тонкостенность оболочки.

Подстановка соотношений (4), (5) в (1)–(3), приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[g(s)\left(\frac{\partial U}{\partial s} - \nu W\right)\right] + \mu^2 f_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \lambda\gamma(s)U = 0,$$

$$\mu^4 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[d(s)\frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\right] - \nu g(s)\frac{\partial U}{\partial s} + g(s) + \mu^2 f_1 \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} - f_2 W - \lambda\gamma(s)W = 0, \tag{6}$$

где

$$d = \frac{Eh^3}{1-\nu^2}, \ g = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \ \gamma = \rho h, \ \lambda = \frac{\rho_0 R^2}{E_0}\omega^2. \tag{7}$$

Среди всех возможных решений уравнений (6) будем искать решения, удовлетворяющие условиям затухания на бесконечности:

$$W, U \to 0 \ \text{ при } \ s \to \pm\infty. \tag{8}$$

Тогда, считая оболочку достаточно длинной, краевыми условиями на ее торцах можно пренебречь.

Задача заключается в определении положительного собственного значения λ и соответствующих собственных функций W, U задачи (6), (8).

Построение локализованных форм колебаний

Полученные уравнения являются сингулярно возмущенными, ибо содержат малый параметр при старшей производной. Классификация интегралов подобных уравнений была проведена в [9]. Среди всех возможных форм осесимметричных колебаний нас интересуют колебания, сопровождающиеся образованием большого количества волн в осевом направлении, для которых $\partial/\partial s \sim \mu^{-1}$ при $\mu \to 0$. Следуя [9], для исследования изгибных форм колебаний с большой изменяемостью в осевом направлении, положим

$$W = w \sim 1, \ U = \mu u, \ \text{ где } \ u \sim 1. \tag{8}$$

Пусть $s=s_0$ есть параллель на поверхности оболочки, в окрестности которой наблюдается локализация изгибных форм колебаний, удовлетворяющих условиям $w,u\to 0$ при $s\to\pm\infty$. Выполним растяжение масштаба в окрестности параллели $s=s_0$:

$$s=s_0+\mu^{1/2}\xi. \tag{9}$$

Функции $d(s), g(s), \gamma(s)$, входящие в уравнения (6), разложим в ряды по степеням малого параметра $\mu^{1/2}$ в окрестности параллели $s=s_0$.

Решение краевой задачи (6), (8) будем искать в виде [8]

$$w=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k/2}w_k(\xi)\exp\left\{i\left(\mu^{-1/2}p\xi+\tfrac{1}{2}b\xi^2\right)\right\}, \qquad \operatorname{Im} b>0, \tag{10}$$

$$\lambda=\lambda_0+\mu\lambda_1+\mu^2\lambda_2+\ldots, \tag{11}$$

где $w_k(\xi)$ –полиномы аргумента ξ, число p характеризует изменяемость решения в осевом направлении, а параметр b, с учетом последнего неравенства в (10), определяет скорость затухания амплитуды волн при удалении от параллели $s=s_0$. Функция u ищется в том же виде (10), с заменой полиномов w_k на u_k.

Процедура отыскания неизвестных величин, входящих в разложения (10), (11), подробно описана в монографии [8] при исследовании потери устойчивости цилиндрических оболочек в окрестности «наиболее слабой» образующей. Опустим детали данного метода, а приведем лишь расчетные формулы, имеющие отношение к нашей задаче.

Подстановка (8)–(11) в уравнения (6) приводит к последовательности алгебраических уравнений

$$\mathbf{L}_0\mathbf{X}_0=0, \quad \mathbf{L}_0\mathbf{X}_1+\mathbf{L}_1\mathbf{X}_0=0, \quad \mathbf{L}_0\mathbf{X}_2+\mathbf{L}_1\mathbf{X}_1+\mathbf{L}_2\mathbf{X}_0=0, \quad \ldots, \tag{12}$$

где $\mathbf{X}_k=(u_k, w_k)^{\mathrm{T}}$ – двухмерный вектор, $\mathbf{L}_k$ – матрицы размерности 2×2. Элементы матрицы $\mathbf{L}_0$ определяются как

$$l_{11}=-g(s_0), \quad l_{12}=-i\nu(s_0)g(s_0)p,$$

$$l_{21}=l_{12}, \quad l_{22}=d(s_0)p^4+g(s_0)-f_1p^2-f_2-\lambda_0\gamma(s_0), \tag{13}$$

а матрицы $\mathbf{L}_k$ при $k\geq 1$ определены в работе [10] (см. соотношения (2.6), в которых слагаемые, содержащие производные по времени, следует опустить).

Рассматривая первое из уравнений (12), находим

$$u_0=-i\,\frac{\nu(s_0)}{p}\,w_0(\xi), \tag{14}$$

$$\lambda_0=\lambda_0(p,s_0)=\frac{1}{\gamma(s_0)}\left\{d(s_0)p^4+\left[1-\nu^2(s_0)\right]g(s_0)-f_2-f_1p^2\right\}. \tag{15}$$

Из (15) следует, что собственное значение λ_0 есть функция параметров p и s_0.

В [8] показано, что условие разрешимости неоднородной системы уравнений, возникающей во втором приближении (см. второе уравнение в (12)), эквивалентно условию стационарности функции $\lambda_0(p,s_0)$:

$$\lambda_p=0, \quad \lambda_s=0. \tag{16}$$

Индексы p и s в (16) и ниже означают дифференцирование функции $\lambda_0(p,s_0)$ по p и s_0 соответственно.

Подставляя (15) в (16), приходим к двум уравнениям

$$\gamma\left[\tfrac{1}{4}f_1^2d_sd^{-2}-\left(\nu^2g\right)_s\right]-\gamma_s\left[\left(1-\nu^2\right)g-f_2-\tfrac{1}{4}f_1^2d^{-1}\right]=0, \tag{17}$$

$$p^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2} f_1 / d(s_0^\circ)} \tag{18}$$

относительно чисел $p = p^\circ$, $s_0 = s_0^\circ$, доставляющих стационарное значение для функции (15). Уравнение (17) служит для определения параллели $s = s_0^\circ$, которую, следуя терминологии принятой в [8], будем называть «слабой».

После нахождения параллели $s = s_0^\circ$ можно ввести характерные значения геометрических и физических параметров задачи:

$$h_0 = h^*(s_0^\circ),\ \ E_0 = E^*(s_0^\circ),\ \ \rho_0 = \rho^*(s_0^\circ). \tag{19}$$

Подстановка (18) в (15) дает нулевое приближение параметра λ в разложении (11):

$$\lambda_0^\circ = \frac{1}{\gamma(s_0^\circ)} \left\{ \left[1 - \nu^2(s_0^\circ)\right] g(s_0^\circ) - f_2 - \frac{f_1^2}{4d(s_0^\circ)} \right\}. \tag{20}$$

Следует отметить, что кроме значения p°, определяемого в соответствии с (18), число $p = 0$ также является решением первого из уравнений (16). Однако, принимая во внимание соотношение (14), в качестве расчетного значения следует брать (18), где $f_1 > 0$. Таким образом, конструируемое здесь решение задачи (6), (8) в виде (10), (11) имеет место лишь при $f_1 > 0$, что соответствует случаю сжимающих осевых сил.

Из (20) следует, что безразмерные усилия f_1, f_2 должны удовлетворять неравенству $\lambda_0^\circ > 0$. Более того необходимо потребовать, чтобы f_1 и f_2 не превышали некоторых критических значений f_1^b и f_2^b, при которых имеет место потеря устойчивости оболочки. Ниже, для случая однопараметрического нагружения будут приведены условия, гарантирующие выполнение неравенств $\lambda_0^\circ > 0$, $f_j < f_j^b$.

Рассмотрим неоднородную систему уравнений (12), возникающую в третьем приближении. Условие совместности последней, с учетом (16), приводит к дифференциальному уравнению [8]

$$-\tfrac{1}{2}\lambda_{pp} w_0'' + a\xi w_0' + \left(\eta - \lambda_1 + \tfrac{1}{2}a + c\xi^2\right) w_0 = 0 \tag{21}$$

относительно $w_0(\xi)$. Здесь

$$a = -\mathrm{i}\left(b\lambda_{pp} + \lambda_{sp}\right), \qquad 2c = b^2\lambda_{pp} + 2b\lambda_{sp} + \lambda_{ss}, \qquad \eta = \frac{2d_s(s_0^\circ) p^{\circ 3}}{\gamma(s_0^\circ)}. \tag{22}$$

Условие $c = 0$ необходимо для существования решения уравнения (21) в виде полинома. Обозначим через

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_{pp} & \lambda_{sp} \\ \lambda_{sp} & \lambda_{ss} \end{Vmatrix} \tag{23}$$

матрицу, составленную из вторых производных функции (15) при $p = p^\circ$, $s_0 = s_0^\circ$. Предположим, что Λ – положительно-определенная матрица. Тогда из квадратного уравнения $c = 0$ находим единственную величину b, такую, что $\mathrm{Im}\, b > 0$. Отсюда, при

$$b^2\lambda_{pp} + 2b\lambda_{sp} + \lambda_{ss} = 0,$$
$$\lambda_1 = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)a + \eta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

уравнение (21) имеет решение в виде полинома Эрмита $w_0 = H_n(\xi)$ степени n.

Неизвестные w_k, λ_k при $k \geq 1$ находятся из последующих приближений (см. подробнее в [8]).

Поправка (24) к собственной частоте колебаний учитывает степень неоднородности параметров задачи (толщины, модуля Юнга и т.д.) и зависит от порядка n полинома Эрмита. В случае однородной оболочки поправка (24) обращается в ноль.

Отделяя в (10) вещественную и мнимую части, получаем две собственные формы колебаний, локализованные вблизи параллели $s = s_0^\circ$. Таким образом, собственное значение (11) является асимптотически двукратным.

Примеры

В качестве первого примера рассмотрим цилиндрическую оболочку, у которой толщина $h(s)$ является переменной, а остальные параметры постоянны. Пусть $E \equiv 1$, $\rho \equiv 1$, $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$, $h''(0) \sim 1$. Здесь уравнение (17) упрощается, принимая вид $h'(s) = 0$. Тогда $s_0^\circ = 0$, а условие $\Lambda > 0$ эквивалентно неравенству

$$\left[f_2 + (1-\nu^2) f_1^2\right] h''(0) > 0 . \tag{25}$$

В данном случае получаем

$$b = \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{f_2 + \left(1-\nu^2\right) f_1^2}{f_1}\, h''(0)}\ , \tag{26}$$

$$\omega^2 = \frac{E_0 R^2}{\rho_0}\left\{\left[1 - f_2 - \frac{(1-\nu^2) f_1^2}{4}\right] + 2\mu\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{f_1\left[f_2 + (1-\nu^2) f_1^2\right] h''(0)} + O\left(\mu^2\right)\right\}. \tag{27}$$

Из неравенства (25) следует, что локализация форм колебаний возможна в двух случаях:

1) $h''(0) > 0,\qquad f_2 + (1-\nu^2) f_1^2 > 0$,

2) $h''(0) < 0,\qquad f_2 + (1-\nu^2) f_1^2 < 0$.

В первом случае колебания локализуются вблизи линии s =0, где толщина минимальна; при этом безразмерное кольцевое усилие f_2 может быть как сжимающим (при внешнем давлении), так и растягивающим (при внутреннем давлении). Во втором случае колебания концентрируются в окрестности параллели, на которой толщина максимальна, однако усилие $f_2 < 0$ здесь является растягивающим.

Как уже отмечалось, безразмерные усилия f_j должны быть меньше своих бифуркационных значений f_j^b и удовлетворять неравенству

$$1 - f_2 - \frac{(1-\nu^2) f_1^2}{4} > 0 . \tag{28}$$

Рассмотрим частный случай, когда оболочка подвержена действию только сжимающих осевых сил ($f_1 > 0$, $f_2 = 0$). Переходя к размерным усилиям в соответствии с (5), нетрудно доказать (см. стр. 61 в [8]), что если

$$T_1^\circ < T_1^* = \frac{E_0 h_0^2}{\sqrt{3\left(1-\nu^2\right)}R} \quad \text{и} \quad \frac{L^2}{R^2} < \frac{\pi^2\sqrt{3\left(1-\nu^2\right)}}{2}\frac{R}{h_0}, \tag{29}$$

то $T_1^* < T_1^b$, где $T_1^b = \frac{1}{2}\pi^2 R E_0 h_0 L^{-2}$ – критическое осевое усилие [8], при котором очень длинная оболочка длиной L теряет устойчивость как стержень. Первое из неравенств (29) гарантирует выполнение условия (28), а второе – сохранение докритического напряженного состояния оболочки.

Во втором примере рассмотрим оболочку с переменным модулем Юнга $E(s)$ и постоянными значениями остальных параметров. Здесь принимаем $h \equiv 1$, $\rho \equiv 1$, $E(0) = 1$, $E'(0) = 0$, $E''(0) \sim 1$. Уравнение (17) дает $E'(s) = 0$, то есть $s_0^\circ = 0$. А условие $\Lambda > 0$ эквивалентно неравенству $E''(0)>0$. Таким образом, локализация колебаний имеет место на кривой, где модуль Юнга имеет локальный минимум. Получаем

$$b=\frac{i}{2}\sqrt{\frac{4+\left(1-\nu^2\right)f_1^2}{6f_1}E''(0)}, \tag{30}$$

$$\omega^2=\frac{E_0R^2}{\rho_0}\left\{\left[1-f_2-\frac{(1-\nu^2)f_1^2}{4}\right]+3\mu\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{\tfrac{1}{6}f_1\left[4+(1-\nu^2)f_1^2\right]E''(0)}+O\left(\mu^2\right)\right\}. \tag{31}$$

Как видно, во втором примере параметр b, а также поправка к частоте, учитывающая неоднородность модуля Юнга, не зависят от величины кольцевых усилий f_2.

Формулы (27) и (31) показывают, что увеличение сжимающих осевых усилий приводит, с одной стороны, к уменьшению частоты собственных колебаний (см. первое слагаемое в квадратных скобках), что хорошо согласуется с результатами работ [2–4], а с другой стороны – к увеличению относительной поправки, учитывающей степень неоднородности оболочки.

Выводы

Таким образом, в работе построены локализованные формы собственных колебаний и найдены соответствующие собственные частоты длинных, предварительно напряженных неоднородных цилиндрических оболочек. Показано, что используемые уравнения Флюгге, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява, допускают построение локализованных форм колебаний лишь в случае сжатой в осевом направлении неоднородной оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Armenakas, A.E. Vibrations of infinitely long cylindrical shells under initial stress / A.E. Armenakas // AIAA journal. – 1963. – Vol.1, № 1. – P.100–106.
2. Hermann, G. Vibrations of thin shells under initial stress / G. Hermann, J. Shaw // Journal of the Engineering Mechanics Division: Proceedings of the American Society of Civil Engineers. – 1965.–Vol.91, № EM5.–P.37–59.
3. Reismann, H. Dynamics of initially stressed hyperelastic solids / H. Reismann, P. Pawlik // Solid Mechanics Archives. – 1977.– Vol. 2, № 2. – 129–185.
4. Neu, W.L. Dynamics of the prestressed solid with application to thin shells / W.L. Neu, H. Reismann // Solid Mechanics Archives. –1982. –Vol.7.–P.97–129.
5. Кукуджанов, С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек / С.Н. Кукуджанов // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. – 1968. – № 3. – С. 140–144.
6. Товстик П.Е. Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны / П.Е. Товстик // Докл. АН СССР. – 1983. –Т. 271, № 1. –С.69–71.
7. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек / Г.И. Михасев // Прикладная механика. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 50–55.
8. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320с.
9. Mikhasev G.I. Travelling wave packets in an infinite thin cylindrical shell under internal pressure / G.I. Mikhasev // J. Sound and Vibr. – 1998. – V. 209, N. 4. – P. 543–559.
10. Михасев Г.И. О волновых формах движения бесконечной цилиндрической оболочки с переменными параметрами / Г.И. Михасев // Изв. РАН. Механика тверд. тела. – 1995. – № 6. – С. 129–137.