

ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ГОРНЫХ ПОРОД

Шемякин Е.И.

1. Синтетическая теория прочности

1.1. Введение. Развитие представлений о прочности твердых тел продолжается в двух противоположных аспектах:

- предотвращение нежелательного разрушения конструкций или элементов конструкций из металлов, сплавов и горных пород;
- создание системы направленного управляемого разрушения (отделение от массива в горнодобывающих процессах, разделение тела на части, дробление и измельчение твердых деформируемых материалов).

И та и другая постановки опираются на особенности деформирования твердых тел вплоть до разрушения, на установление, разработку критериев «разрушения». И та и другая требуют знания некоторых основных механических свойств материала и характеристик процесса нагружения (деформирования).

В этих проблемах при постановке задач и при выборе методов исследования важно было опираться на современные разделы механики сплошных сред и на опыт исследований в физике твердого тела, т. е. фактически на уровне исследований разного типа (конечные объемы материала в механике и молекулярный или кристаллический уровень в физике твердого тела).

По-видимому, впервые эти проблемы сопоставлены очень ответственно, с соответствующими оценками и выводами, в школе академика В. Е. Панина, в которой введено понятие «мезомеханики» как раздела физики, объемлющего указанные интересы: что нужно знать и на каком уровне микроисследований о твердом теле (металлы, сплавы, горные породы), чтобы судить о поведении макроструктур, т.е. дать расчетные, технологические ответы на два вопроса, поставленные в начале [1].

С самого начала развития теоретических основ прочности преобладали позиции Сен-Венана и Треска. Первый, являясь блестящим основателем теории пластичности, образно сопоставил наблюдения за линиями скольжения, которые в истории получили название Людерса-Чернова, с теоретическими выводами о линиях максимальных касательных напряжений и пришел к выводу, что экспериментальные данные Треска могут быть положены в основу теории в силу схожести тех и других (линий скольжения и изолиний максимальных касательных напряжений). Это единственно основательное предположение, полученное в условиях плоской деформации и не дающее никаких оснований для перехода к трехмерной ситуации. Это очень важное обстоятельство в развитии общей теории пластичности и вязкой жидкости, о чем еще не раз будет сказано далее.

В альтернативном и преобладающем до сих пор развитии теории прочности и пластичности, ползучести, разрушения превалирует построение, в основе которого лежат представления о предельных условиях гладкого типа (Губер, Мизес и их обобщения). Тем не менее практический интерес к сингулярным поверхностям (Треска-Сен-Венана, Кулона-Мора) также привлекал внимание серьезных исследователей: здесь достаточно упомянуть ранние работы академика А.Ю. Ишлинского [2] и замечательные работы Д. Д. Ивлева и В. Д. Ключникова и их последователей [3, 4].

В определенном смысле предлагаемое изложение, безусловно навеянное историей и последними работами школы академика В. Е. Панина, надо считать примыкающим к направлению исследований, идущих за Т. Карманом и С. А. Христиановичем [5-7].

1.2. Опыты по исследованию нагружения деформируемых тел на эквивалентных материалах.

В начале 70-х годов в связи с вопросами о деформировании и разрушении горных пород в Институте горного дела СО РАН были начаты работы по моделированию процессов поведения материалов при различных нагрузках на эквивалентных материалах. Работы оказались достаточно плодотворными, позволили обсудить поставленные во введении вопросы и получить ряд новых выводов. Это дало возможность провести кардинальное обсуждение путей построения современной теории прочности и назвать один из ее вариантов синтетическим (смысл этого термина будет ясен из предлагаемого материала).

Как всегда, при постановке исследований, связанных с одновременным экспериментальным и теоретическим исследованием, необходимо было поставить под вопрос самые простые, исходные представления, чтобы точнее и проще оценить получаемые результаты. Этому способствовал состав исследователей, который включал и сильных теоретиков (А. Ф. Ревуженко) и опытных экспериментаторов (С. Б. Стажевский, А. П. Бобряков). В этом обзоре все эти ученые являются полноправными соавторами публикуемых результатов.

Первым этапом исследования было создание (изобретение) «ящика» — прибора для осуществления однородного сдвига в эквивалентном материале. При этом самым существенным было реализовать «жесткую» машину, которая работает в режиме заданных перемещений (деформаций) и позволяет зарегистрировать так называемую ниспадающую ветвь (или запредельное поведение материала, или послепиковую прочность). Это было очень важно и приобрело в механике твердого деформируемого тела особенное значение, а машин, реализующих такой режим, тогда практически еще не было. Напомним, что к первым машинам такого типа относились машины СН-3, предложенные А. А. Ильюшиным [8]. Конечно из дальнейшего изложения будет ясно, почему авторам [9-11] не удалось сразу реализовать состояние чистого сдвига, но будет также понятно, что реализация простого сдвига (в отличие от схемы Роско) принесла новое представление о несимметричной схеме деформирования и о локализации деформаций.

Прежде чем обсудить основные результаты испытаний и выводы, остановимся на основных представлениях механики сплошной среды, которые широко использовались для этого в прошлом.

Для описания исходного напряженного состояния элемента зададим главные нормальные напряжения

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (1.1)$$

и триэдр главных направлений.

При этом, в отличие от обычной формы главных инвариантов напряженного состояния, примем другой набор, связанный с максимальным касательным напряжением

$$\tau_{\max} \equiv T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.2)$$

и нормальным напряжением на этих же площадках

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (1.3)$$

проходящих через второе главное направление и делящих пополам углы между первым и третьим главными направлениями.

Эти величины имеют четкий физический смысл: T – усилие проскальзывания, а σ_n – препятствие для проскальзывания.

Для полного инвариантного описания исходного напряженного состояния (1.1) необходимо ввести третью величину [5, 6, 12].

$$\mu_{\sigma} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (1.3)$$

или

$$\mu_{\sigma} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{T}$$

Так что набор трех инвариантов $T = \tau_{\max}$, σ_n и μ_{σ} доставляет необходимые и достаточные условия описания произвольного напряженного состояния твердого деформируемого тела [5, 6, 13]. Не вдаваясь в подробности использования «языка» площадок для описания напряженно-деформированного состояния твердых тел, отметим, что наряду с T и σ_n , эти инварианты обеспечивают все нюансы представлений Треска-Сен-Венана и Кулона-Мора, а параметр Лодэ-Надаи μ_{σ} [2], определяющий вид напряженного состояния, играет очень важную роль, указывая на работу площадок с экстремальными значениями касательных напряжений на этих площадках, ориентированных относительно главных направлений известным образом:

$$T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{и} \quad T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{и} \quad \sigma_n = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

Так что можно различить напряженное состояние полной пластичности

$$\mu_{\sigma} = \pm 1 \begin{pmatrix} T = T_{12} \\ T_{23} = 0 \end{pmatrix}$$

и неполной пластичности (например, чистого кручения)

$$\mu_{\sigma} = \pm 1 \begin{pmatrix} T = \tau_{\max} \\ T_{12} = T_{23} \end{pmatrix}$$

Эта классификация не рассматривалась ранее детально, хотя можно считать, что именно ее имели в виду Надаи и его ученик Лодэ. Это описание напряженного состояния позволяет детализировать различные ситуации, возникающие при нагрузках в твердом теле.

Здесь очень важно подчеркнуть два обстоятельства, которые имели в виду авторы экспериментов с эквивалентными материалами при постановке опытов [9].

Первое, по-видимому, подразумевал еще Сен-Венан, а именно: в опытах наблюдаются в основном картины по деформациям элемента (перемещениям, точнее говоря), а предвычисляются – по напряжениям (площадки максимального касательного напряжения, их ориентация в декартовой, лабораторной системе координат). Это сопоставление и было основным в теории Сен-Венана, на чем основана его гипотеза о совпадении главных направлений тензора напряжений и скоростей деформации сдвига

(плоский случай!). Затем этот экспериментально наблюдавшийся факт лег в основу практически всех построений пространственной теории пластичности, хотя наблюдался только в достаточно простых условиях. Более того, аналогичные обобщения проникли и в теорию вязкой жидкости (уже независимо от Сен-Венана). Обычные в настоящее время, эти обобщения не имеют других обоснований – и это очень печально, хотя именно выход из условий плоской деформации и, особенно, условий простого нагружения позволит определить дальнейшую судьбу теории пластичности, ползучести, прочности твердых тел.

В связи с этим продолжим схему рассуждений, связанных с введением группы основных инвариантов, определяющих деформирование твердых тел.

Дело в том, что введение той или иной группы инвариантов для описания напряженного состояния (1.2)-(1.4) не связано, вообще говоря, с деформированием твердых тел. Какими бы ни были системы нагружения деформируемого тела внешними силами, всегда, по Коши, можно ввести тензор напряжений (в отличие от закона Паскаля для жидкости и газа) и посчитать удельные усилия на отдельные площадки (напряжения). То есть напряжения вычисляются по заданным внешним усилиям и положению (включая повороты и изменения размеров) площадок. В этом принципиальная разница между определением напряжений и деформаций в теории упругости и в теории необратимых деформаций (пластичности, ползучести, разрушения).

Поэтому обратимся к введению группы инвариантов для описания деформаций, скоростей деформаций на ином уровне.

Конечно, формально можно ввести, следуя (1.2)-(1.4), группу инвариантов

$$\Gamma_{\max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \quad (1.6)$$

$$\mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (1.7)$$

Но это не имеет смысла нигде, кроме изотропной теории упругости, где это очевидно.

Для пояснения рассмотрим простой закон связи $T = T(\Gamma)$ при $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon = 0$. Этого достаточно для обсуждения и для иллюстрации основной идеи. Эта связь между максимальным касательным напряжением T и величиной главного сдвига Γ явится основной в предлагаемой модели синтетической прочности твердых тел и поэтому подлежит детальному обсуждению. Поэтому основные новые результаты по моделированию с эквивалентными материалами относятся к исследованию этой фундаментальной характеристики прочности. В статье [9] обсуждалась типичная картина деформирования материала (эквивалентного) на «жесткой» машине типа «ящик» (рис. 1).

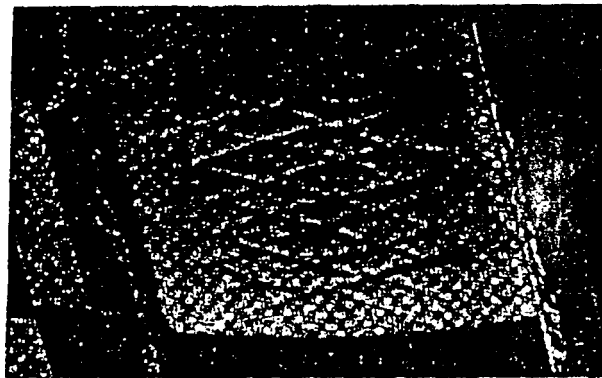


Рис. 1

Напомним еще раз идеализированную схему описания: в экспериментальной установке задавались- перемещения, по которым вычислялись сдвиги, а напряжения измерялись в ходе эксперимента по факту (*in situ*), линии I, II, III (рис.2) описывают поведение материала после максимума (постпиковое поведение, запредельное и т. п.) и указаны как возможные реализации при разных краевых условиях опыта.

Прежде чем обратиться к обсуждению основных результатов, остановимся на описании самого опыта.

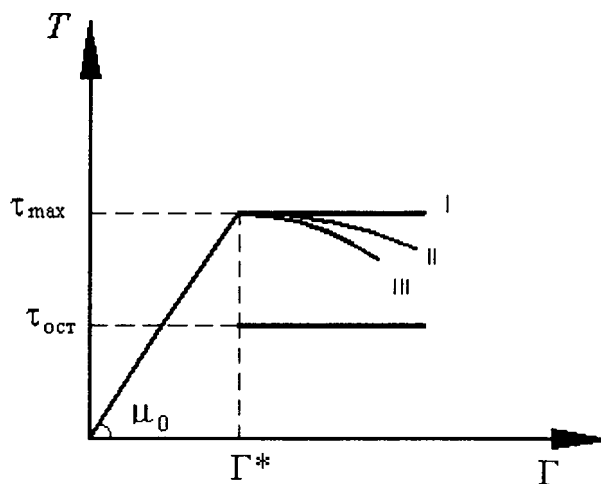


Рис.2

Вместе с ростом напряжений до некоторых максимальных τ_{\max} (критических) значений происходит рост деформаций сдвига (искажение первоначального прямого угла между избранными волокнами). Это и есть реальное преодоление прочности. Что происходит с материалом, когда $\mu = dT/d\Gamma$ падает: $\mu < \mu_0$ (μ_0 – упругое сопротивление сдвигу)? Еще Батдорф и Будянский [14] обратили внимание в одной из первых послевоенных работ, что сопротивление сдвигу на разных площадках, по-разному ориентированных относительно главных направлений тензора деформаций, будет разным. Это обстоятельство как основное использовал в своих построениях М. Я. Леонов [15]. Действительно, давайте рассмотрим две картинки: распределение (тензорное) напряжений τ_{\max} относительно главных направлений тензора напряжений (1.1) и (1.3) и распределение (тензорное) деформаций (или скоростей деформации) [5, 6] с учетом локализации деформаций. В этой ситуации, если есть линейная связь (закон Гука или Ньютона в случае вязкой жидкости и $\dot{\Gamma} \approx \Gamma$), то все в порядке. Этот закон гарантирует сохранение линейной связи, а значит изотропности состояния среды при всех

последующих значениях $T > 0$, $\dot{\Gamma} > 0$. А если закон является нелинейным, а тем более различным при $\Delta T > 0$, $\Delta T < 0$, то вопрос о «соосности» вееров по T и Γ (или $\dot{\Gamma}$) в общем случае теряет смысл: «нарисованные» по тензорным правилам напряжения по-прежнему имеют смысл, а деформации распределяются отнюдь не по тензорным правилам – происходит локализация [5, 6, 9]. Это сейчас наблюдается многими, но мало кто признает, что это одновременно означает отказ от тензорного описания деформаций и даже от скоростей деформаций. Веера распределений напряжений и деформаций (скоростей деформаций) не совпадают. Утверждение этого факта было едва ли не самым главным результатом, приведшим к следующей серии испытаний (см. [6]).

Впервые этот факт был рассмотрен академиком С. А. Христиановичем и автором в [6], где была явно отмечена необходимость сложного нагружения (по А. А. Ильюшину) [8], так как иначе нельзя было обнаружить этого различия в описании напряжения по Коши и деформаций с локализациями.

Теперь вернемся к описанию результатов опытов с «ящиком». В опытах, если оставить пока в стороне детали реализации, было обнаружено:

существование ниспадающей ветви и ее зависимости от масштаба опыта (линии I-III на рис. 2), появление размера (блоков) в изначально изотропном эквивалентном материале, проявление «проскальзывания» (перемещения) по берегам площадок скольжения; несимметрия функционирования ожидаемых площадок с $T = \tau_{\max}$ и их проявление оказались связаны с появлением локальных поворотов. При достижении $T \approx \tau_{\max}$ возникающие площадки проявляют себя по разному: до разгрузки элементы движутся друг за другом, а после разгрузки и движения в обратном направлении появляются кинематические возможности поворота. В целом проявилась новая, ранее неизвестная возможность деформаций твердого тела за пределом упругости: разделяться на регулярные блоки, так что эти блоки поворачиваются образуют в новом состоянии сплошное тело.

Эта схема деформаций с существенной локализацией в окрестности площадок с $T = \tau_{\max}$ была независимо обнаружена в опытах в Новосибирске и Томске, что было отмечено общей премией Сибирского отделения АН СССР по работам этого направления [1, 9].

1.3. Предел упругости, переход к необратимым деформациям и разрушению.

В рамках предлагаемой теории основное внимание будет уделено площадкам главного сдвига с возможной локализацией и площадкам с максимальным касательным напряжением (Треска-Сен-Венан). Поэтому вернемся еще раз к обсуждению принципиально важных опытов, выполненных Лодэ [12] и приведших разных авторов к разным выводам. На рис. 3 повторены результаты замечательного рис. 46 из книги А. Надаи, по которым можно сделать заключение о влиянии среднего главного нормального напряжения σ_2 на $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Там же нанесены данные, связанные с указанным выше набором инвариантов (1.2-1.4):

$$I_2 = \tau_{\max} \sqrt{1 + \frac{\mu_\gamma^2}{3}} \quad (1.8)$$

где I_2 – второй инвариант девиатора (тензора) напряжений. Данные этого рисунка всюду в развитиях различных вариантов теории пластичности считаются основным аргументом в пользу применений гладких условий пластичности типа Губера-Мизеса взамен сингулярных типа Треска-Сен-Венана. Как следует из сравнения опытных данных и [5, 6], в диапазоне $1 \geq \mu_\sigma \geq -1$ – I влияние среднего главного направления

реализуется через параметр μ_σ . Из этих данных можно сделать разные выводы. Таким образом, можно считать, что при переходе к «языку» площадок скольжения нет необходимости вводить гладкие условия пластичности — достаточно при описании перехода учесть параметр Лодэ.

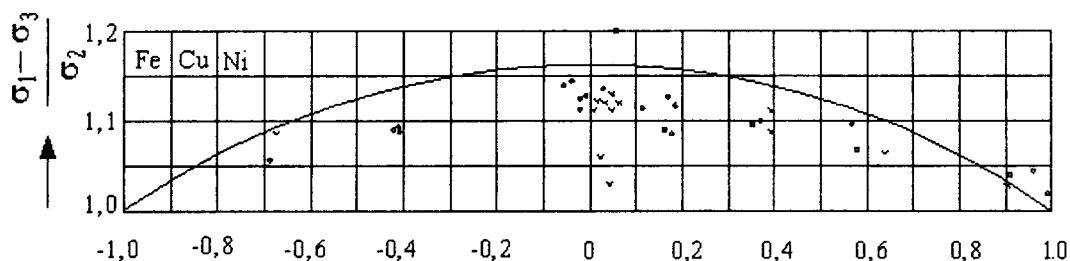


Рис.3

Таким образом, в синтетической теории прочности можно (и следует) делать оценку величины перехода к необратимым деформациям в соответствии с [16-18], но при этом – что главное – надо проследивать «историю» наступления «пластичности» (в широком смысле слова) по конкретным площадкам (их ориентации, прежде всего) и по параметру μ_σ . Это означает, в первую очередь, учет анизотропии сопротивления сдвигам в среде, которая (анизотропия) возникает на переходе к необратимым деформациям и учитывается либо параметром μ_σ , либо сингулярностью условий пластичности, либо чисто формально учетом третьего инварианта. После работ Надаи и Лодэ следующими были Ю. Янг [17] и В. В. Новожилов [16], см. также обзор в книге А. А. Лебедева и Г. С. Писаренко [19].

Отмеченный факт и новая интерпретация данных Лодэ привлекли внимание авторов [5, 6] также в связи с попытками выйти за рамки плоской деформации и предпринять попытки обобщения результатов испытаний на трехмерный случай (опыты Тэйлора-Квини в книге Л.М. Качанова [18]). Если, следуя Т. Карману (что проделали авторы [5, 6] сначала независимо, а потом с удовлетворением обнаружили, что Т. Карман мог бы получить этот же результат, используя введенные им впервые понятия неполной и полной пластичности), ввести зависимость $\mu_\sigma(\mu_\epsilon)$ или $\mu_\sigma(\mu_{\Delta\epsilon})$ то эта зависимость будет иметь различный характер при переходе от линейных связей между напряжениями и деформациями (скоростями деформаций) к нелинейным (необратимые деформации, например), [5, 6]. Эта зависимость тем больше отклоняется от биссектрисы $\mu_\sigma = \mu_\epsilon$ или $\mu_\sigma = \mu_{\Delta\epsilon}$ (что означает подобие тензоров), чем больше необратимые деформации по сравнению с предельными упругими (рис.4 [18]).

Опытный результат (рис. 4) был отмечен в упомянутой классической работе [18], но, к сожалению, практически не использовался при построении трехмерных (пространственных) моделей необратимого деформирования твердых тел и их разрушения.

Это же обстоятельство, по-видимому, имеет значение и при построении модели вязкой жидкости и турбулентности.

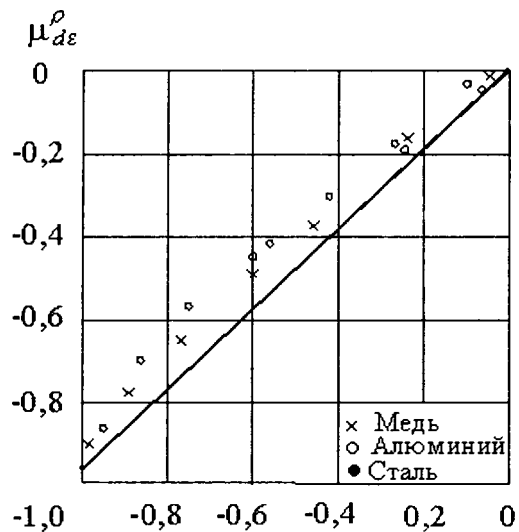


Рис.4

Но отсутствие подобия тензоров напряжений и деформаций (скоростей деформаций) не единственное препятствие на пути часто необоснованных переходов от плоского случая (плоская деформация или обобщенное плоское напряженное состояние) к пространственной (трехмерной) ситуации. Есть еще фактор локализации деформаций, на который было обращено внимание в самом начале работ в Новосибирске и Томске, и возможность в связи с этим отказа от тензорного описания деформаций (скоростей деформаций) и перехода к описанию кинематики деформирования с помощью перемещений (скоростей перемещений) и введения независимых, дополнительных кинематических параметров. Такими важными параметрами явились повороты элементов, о которых было сказано при описании опытов с эквивалентными материалами на «ящике». Введение таких параметров очень важно для описания необратимых деформаций в твердых телах, включая образование блоков (размера) в первоначально однородных и изотропных телах и появление их поворотов друг относительно друга для обеспечения сплошности «разрушенного» тела. Эти повороты, в отличие от вычисляемых по полю перемещений (или скоростей), являются новыми независимыми переменными [11].

Введение этих дополнительных параметров в теоретическом плане приводит к постановке новых краевых задач, а в практическом – означает оценку остаточной прочности «разрушенного» материала.

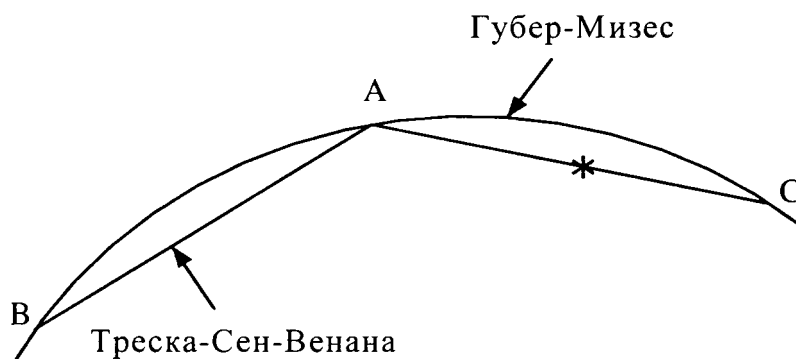


Рис.5

Для иллюстрации влияния параметра Лодэ рассмотрим нагружение материала с изменением величин главных напряжений без поворота главных направлений тензора

напряжений. На рис. 5 в сечении девиаторной плоскостью указано положение поверхности $\tau_{\max} = \text{const}$ в соответствии с (1.8), там же указано положение поверхностей по Сен-Венану-Треска и по Губеру-Мизесу.

Если иметь ввиду «историю» действия площадок с максимальным касательным напряжением, то можно «расширить» представление о простом нагружении. Если точка, отмеченная * на этой поверхности, перемещается по нормали к любой из линий Т-СВ или Г-М либо вообще вне этих линий, то это может отвечать упрочнению — увеличению $\tau_{\max} = \tau_s$, вместе с γ , главные оси неподвижны. Нетрудно рассмотреть различные реализации нагружения.

Введем исходное, соответствующее точке *, напряженное состояние $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0$

$$\frac{\sigma_1^0 - \sigma_3^0}{2} = \tau_{\max}$$

соответствующее тем самым неполной пластичности $\mu_\sigma \neq 1$, и будем увеличивать напряжение с индексом «0» пропорционально с параметром $k > 1$:

$$\sigma_1 = k\sigma_1^0, \quad \sigma_3 = k\sigma_3^0$$

Тогда

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k \frac{\sigma_1^0 - \sigma_3^0}{2} = k\tau_{\max}$$

что может отвечать упрочнению материала:

$$k = \tau_{\max} / \tau_{\max}^0 > 1$$

Но для рассматриваемого варианта с влиянием μ_σ появляется новая возможность — растут касательные напряжения на других площадках с экстремальными значениями:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = k \frac{\sigma_1^0 - \sigma_2^0}{2} = kT_{12}^0$$

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = k \frac{\sigma_2^0 - \sigma_3^0}{2} = kT_{23}^0$$

При этом приближение kT_{12}^0 (или kT_{23}^0) к величине τ_{\max} означает переход к полной пластичности — движение точки * либо к А, либо к С, т. е. изменение μ_σ либо к $\mu_\sigma = 1$, либо к $\mu_\sigma = -1$. В любом из этих вариантов существенно не перемещение * вонне линий Т-СВ либо Г-М, а изменение μ_σ , так как это означает включение, кроме главных, площадок с T_{12} или T_{23} .

Таким образом, несмотря на внешнее сходство предельных условий, важно различать «историю» развития площадок с касательными напряжениями, отвечающую $|\mu_\sigma| = 1$ и $\mu_\sigma = \pm 1$, так как эта история отвечает «физически» различной анизотропии сопротивления сдвигам в неупругом состоянии. С этой точки зрения «простым» является нагружение при

$\mu_\sigma = const$ при любом начальном значении μ_σ из общего промежутка $-1 < \mu_\sigma < 1$. Иначе говоря, параметр нагружения k должен быть единым для σ_1 , σ_3 и для σ_2 .

С этой точки зрения – возникновение анизотропии сопротивления сдвигам в первоначально изотропном упругом теле при переходе в неупругое состояние – надо различать $\mu_\sigma = const$ и μ_σ переменное. Последнее может означать, что при приближении * к А или к С перераспределяется роль площадок с экстремальными, касательными напряжениями, при этом на одних площадках они растут, а на других могут убывать. Произойдет разгрузка, и будут нарушены условия «простого» нагружения. Есть еще одна формулировка: «простым» на «языке» площадок следует считать продолжение деформирования на площадках, где наступила пластичность, включая дополнительное включение других площадок. Это «простое» нагружение происходит до тех пор, пока не наступит разгрузка на площадках с наступившей до этого пластичностью.

Наконец, при переходе от одного напряженного состояния (например, А или С вдоль линии Т-СВ или Г-М обязательно наступит разгрузка по подходящей системе площадок. С этой точки зрения, «история» возникновения точки * и ее движение вдоль указанных линий является опорной позицией в синтетической теории прочности, несмотря на почти гладкие аппроксимации предельных линий Т-СВ или Г-М.

Обратим внимание на то, что переход к площадкам скольжения (и их кинематическому смыслу) привлек внимание к так называемой ниспадающей ветви на зависимостях «напряжение-деформация», если эти зависимости могут быть построены и допускают недвусмысленную интерпретацию.

Последнее очень важно, так как при построении паспортных зависимостей материала часто используют, например, данные об одноосном растяжении тонких образцов. При этом предполагается симметрия деформирования в упругом и неупругом состояниях вплоть до разрушения, под которым понимается не только появление линий Людерса-Чернова, шейки, но и разделение образца на части. Машины с заданными перемещениями (жесткое нагружение) лишают этой иллюзии, в отличие от прессы Гагарина, – на них разрушение регистрируется более четко [8, 9].

Что происходит, например, на ниспадающей ветви в рассматриваемой модели где основное внимание уделяется деформации сдвига, а не уплотнениям (или разрыхлениям) материала, т. е. без учета дилатансии материала? Что происходит, например, на зависимости $\tau \sim \gamma$ на ниспадающей ветви? Опыты на ящике и другие опыты такого типа показали, что при переходе к ниспадающей ветви материал ведет себя внешне (по отношению нагрузкам) неустойчиво – $\Delta\tau < 0$ при $\Delta\gamma > 0$. Но, по-видимому, на ниспадающей ветви это уже другой материал, к которому неприменимы прежние требования к устойчивости (по А. А. Ильюшину или Д. Друккеру). Этот новый материал, родившийся из старого после перехода в соответствии с критериями (1.8), означает новую возможность реализации синтетической прочности – материал разделяется на блоки, которые мало изменяясь в объеме, скользят друг по другу и поворачиваются настолько, чтобы составить сплошной материал [20-22].

Обратим внимание на материал, иллюстрирующий вышесказанное. Пусть за пределом упругости имеет место зуб текучести, т. е. вместо плавно и резко ниспадающей ветви происходит скачок напряжений при ниспадающей деформации. Кстати сказать, на некоторых материалах типа мягкой стали независимо от конструкций испытательной машины это явление наблюдалось с удивительным постоянством. В одной из работ нашей группы [9] этот пример позволил прояснить эту особенность поведения материала на ниспадающей ветви как переход к новой, блочной структуре материала, первоначально изотропного и однородного.

Действительно, падение касательного напряжения от величины τ_{\max} до $\tau_{\text{ост}}$ после нагружения в упругом режиме с модулем сдвига μ_0 указывает, что на площадке скольжения происходит реальное относительное перемещение берегов площадки величины δ , которое вычисляется через указанные величины:

$$\delta = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\text{ост}}}{\mu_0} L$$

где L – размер образца. Не нужно большой фантазии, чтобы сообразить, что если скольжение происходит в заданном образце размера L и по нескольким площадкам скольжения числом n , то величина δ есть суммарное значение по всем этим площадкам. На это суммарное перемещение (проскальзывание) расходуется та часть упругой энергии, которая высвободилась при падении от величины τ_{\max} до $\tau_{\text{ост}}$.

2. О сдвиговой прочности горных пород

2.1. Задача о прочности горных пород в окрестности подземной выработки.

В задачах механики горных пород основной является задача о прочности (устойчивости) горных пород в окрестности подземной выработки. Основной моделью для таких рассуждений является круговая выработка определенного диаметра на заданной глубине и ориентировке оси выработки относительно главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ со своими главными направлениями. (Наиболее распространенным случаем является выбор главных направлений, связанный с направлением (вертикаль) силы тяготения σ_1 и боковых напряжений, направления которых перпендикулярны главному направлению силы тяготения) [5, 6, 23] (рис. 6).

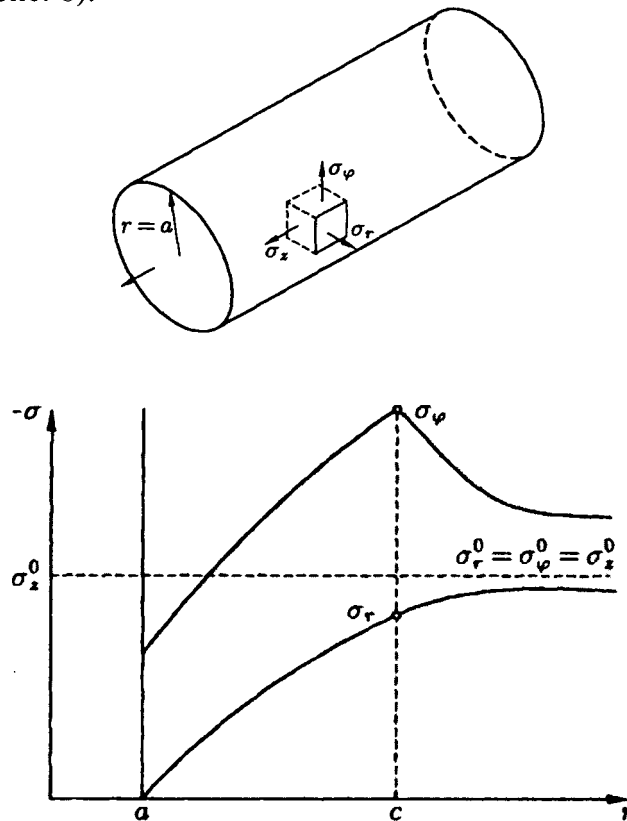


Рис. 6. Общий вид подземной выработки

Самым ответственным моментом в создании такой выработки как подземного сооружения является изменение соотношений между главными напряжениями в окрестности выработки (главные направления при этом будем считать неизменными). Хотя соотношение между главными напряжениями и главными направлениями могут изменяться и в ходе горных работ. Если принять пока для простоты, что на глубинах 1-2-3 км исходное напряженное состояние (*in situ*) было равномерным гидростатическим:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p \quad (2.1)$$

где p – литостатическое давление, то после проходки выработки, будь то скважина (горизонтальная или вертикальная) или шахтный ствол, напряженное состояние изменится.

Важно отметить, что это изменение не есть следствие фантазий, предположений о модели деформируемости среды, а отражение законов равновесия (или динамики, квазистатики в процессе проходки или бурения). Уже сам этот процесс (проходка забоя) является трехмерным, слабо изученным процессом [5, 6]. Так, например, если главные направления напряженного состояния $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, выбрать в соответствии с цилиндрической системой координат горизонтальной или вертикальной выработки, то в ходе подготовки выработки (скважины), при отходе от забоя, обязательно происходят два процесса.

Первый из них связан с тем, что радиальное напряжение обязательно падает по величине, даже если со стороны выработки (скважины, например) оказывается возможным организовать подпор, как правило, по величине меньший, чем было радиальное напряжение до проходки скважины.

Второй частью процесса является развитие касательных напряжений за счет различия в главных напряжениях исходного состояния или возникших при создании выработки. Так, в рассматриваемом примере (вертикальная или горизонтальная выработка – скважина в равномерном *in situ* напряженном состоянии) возникают касательные напряжения, которых не было до работ, а именно за счет возникающего различия в главных напряжениях. Этот этап является наименее изученным в напряженно-деформированном состоянии призабойной зоны [5, 6, 23]. В этой зоне происходит сложный переход от исходного состояния (гидростатического в этом примере) к состоянию в окрестности выработки. При этом важно оценить сдвиговую прочность, так как именно эта прочность принципиально отличает твердые тела от жидких и газообразных. Так, возникающие касательные напряжения связаны с разностями главных напряжений и равны

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2T, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2T_{12}, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2T_{23}, \quad (2.2)$$

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi, \quad \sigma_2 = \sigma_r, \quad \sigma_3 = \sigma_z \quad (2.3)$$

($\sigma_\varphi \geq \sigma_z \geq \sigma_r$, окрестности вертикальной выработки, например).

Т. Карман при этом считал, что σ_z необязательно теряет свою (упругую) связь с деформациями, существовавшую до проходки выработки или скважины. Главное, что с достижением предельной сдвиговой прочности наступает новое состояние. Возникновение анизотропии сопротивления сдвигам в результате роста касательных напряжений является едва ли не самым примечательным механическим эффектом создания выработок (скважин) в горном массиве.

Вообще говоря, о величинах касательных напряжений уместнее высказаться позже (в связи с паспортом прочности горных пород), но одно общее свойство твердых тел и горных пород должно быть отмечено. Это свойство конечного предельного сопротивления сдвигу для всех реальных тел. Здесь же уместно привести замечание об отпоре крепи или о противодавлении со стороны жидкости в скважине. Реальный отпор или крепь, которые должны заменить удаленный материал, создать технически очень

трудно, имея в виду величины отпора в сотни и тысячи тонн на квадратный метр. Во всяком случае, в задачах горного дела реальная крепь играет другую роль, удерживая (главным образом) возможный вывал за счет ползучести или разрушения призабойной зоны.

Поэтому естественно до детального подробного анализа различных вариантов (негидростатическое напряженное состояние, горизонтальная или вертикальная скважина, слоистость окружающего массива и его блочная структура) обратить внимание на этот основной процесс – изменение сопротивления сдвигу на различных площадках, включая новые современные элементы: появление ниспадающей ветви (*post-peak behavior of rock under loading*) со всеми эффектами парадоксального для сплошной среды проявления (см. ниже). Таким образом, изучение напряженно-деформированного состояния в окрестности выработки (скважины) сведено к исследованию сдвиговой прочности горного массива как определенного свойства.

При этом основное изменение объема, включая критическое разрыхление до вывала в обнаженное пространство, будет обусловлено эффектом дилатансии — изменением объема, связанным со сдвигом [24]. Это изменение объема позволит ввести в рассмотрение фильтрацию жидкости и газа (нефти и конденсата, в том числе) в объеме в окрестности скважины (выработки), подвергнутом изменению напряженного деформированного состояния.

2.2. Структурно-дилатансионная прочность горных пород. Ниже используем представление о структурно-дилатансионной прочности горных пород, позволяющее рассмотреть различие поведения горных пород при растяжении, сжатии и сдвиге вплоть до разрушения. Такое представление часто используется в литературе и служит для качественного описания деформирования и разрушения твердых тел [25].

В рассматриваемой модели были указаны определяющие соотношения на основе структуры материала, состоящего из зерен и связующего. При этом максимальное касательное напряжение на площадке главного сдвига T и нормальное напряжение на той же площадке связаны известными соотношениями:

$$T = -tg(\varphi + \nu)\sigma_n + c \quad (2.4)$$

где $\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$, а коэффициент c (сцепление) определяется через параметр ξ - коэффициент в скелете без зерен (без связующего) и напряжения g_1 и g_2 от усилий, переданных от зерен первому материалу-связующему:

$$c = \frac{\xi g_1 + g_2}{1 + \xi}$$

При одноосном растяжении величину g_2 можно отождествить с пределом всего материала на растяжение: $g_2 = \sigma_{расм}$. Структура среды характеризуется углом дилатансии.

Таким образом, для описания прочности горной породы в рамках принятой модели следует:

- угол трения рассчитывать с учетом дилатансии;
- сцепление практически считать по прочности связующего (заполнителя) на растяжение.

Эти ранее не учитываемые результаты оказываются настолько существенными, что могут дать наиболее значительный вклад в понимание прочности таких «составных» синтетических материалов, как горные породы и композиты.

2.3. Основные особенности сдвигового деформирования. Рассмотрим прежде основные особенности сдвигового деформирования, принимая гипотезу Т. Кармана о том, что наступление предельной деформации сдвига (и максимального касательного напряжения) на основных площадках с касательными напряжениями T не нарушает упругих (или других) связей между напряжениями и деформациями во втором главном направлении. В этом приближении можно считать, что на системах площадок с напряжениями T_{12} и T_{23} повторится (возможно, с некоторыми небольшими вариациями) та же самая ситуация, что и на главных площадках с касательным напряжением T ; роль и значение этих площадок учитываются параметром Лодэ – параметром вида напряженного состояния. Поэтому рассмотрим внимательнее поведение среды при сопротивлении сдвигу на диаграмме $T = T(\Gamma)$, где T – максимальное касательное напряжение, а Γ – главный сдвиг, $\Gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ (при совпадающих главных направлениях напряженного и деформированного состояний) (рис.7). На этом рисунке из [26] представлены описательные результаты реальных испытаний опытных образцов

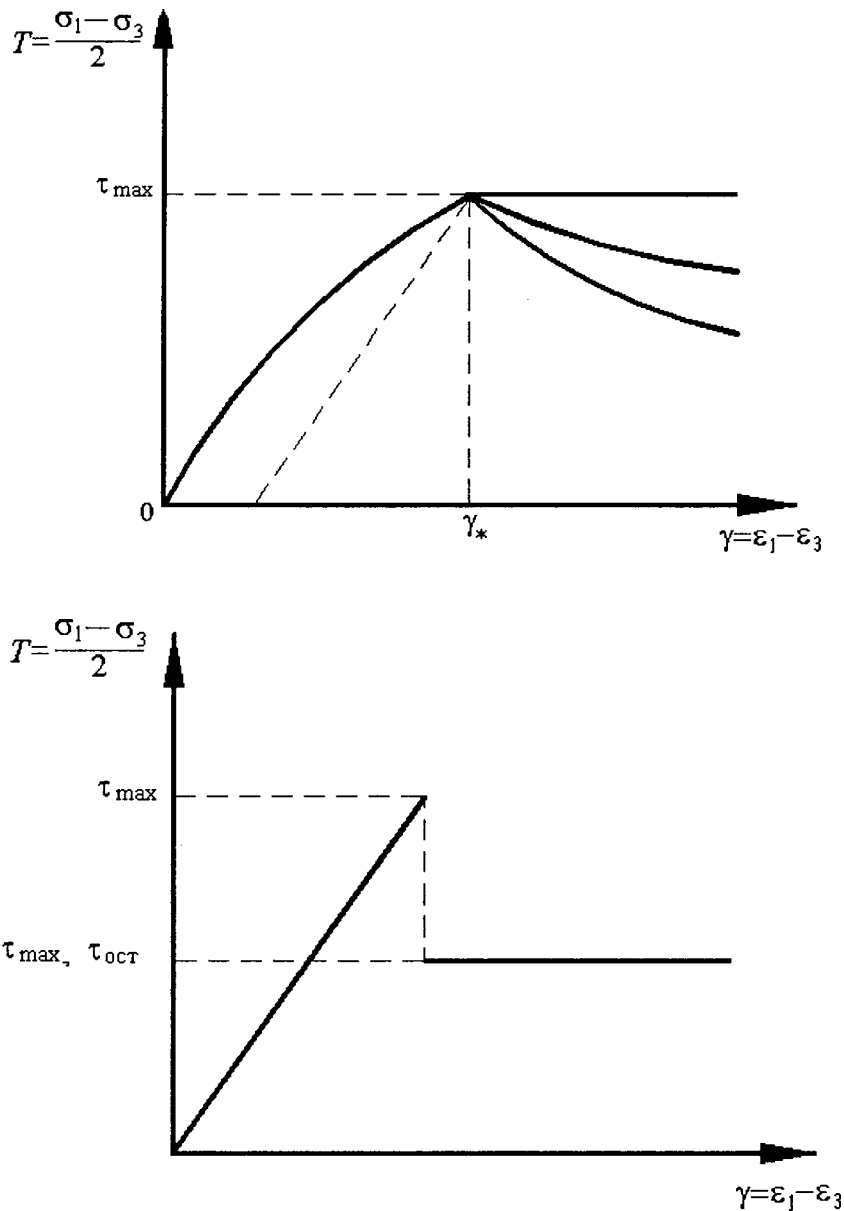


Рис.7 Зависимость максимальных касательных напряжений от главных сдвигов с учетом ниспадающей ветви

грунтов (в том числе с эквивалентными материалами) и горных пород [25, 26]. После практически обратимых деформаций до пика касательных напряжений дальнейшее сопротивление сдвигу с ростом деформаций падает. Это состояние — послепиковое поведение – иногда называют разупрочнением, имея в виду уменьшение касательного напряжения с одновременным ростом сдвига.

Это – самый важный для современных задач горного дела и механики грунтов участок необратимого поведения горной среды, который стал доступным после создания “жестких” машин для испытаний грунтов и горных пород, взамен машин с заданным нагружением по усилиям (напряжениям). Таким методом испытаний в частности стал “ящик” сибиряков, который явился планомерной реализацией идей А.А. Илюшина о создании машин с нагружением по деформациям, а не по программе напряжений, как до него. В последние годы внимание ученых привлечено к исследованиям послепикового поведения горных пород, хотя, по мнению автора, это внимание совершенно недостаточно.

Что обнаружилось в этих новых результатах?

1. Возникновение структуры в изначально однородном и изотропном материале, вполне согласованной подготовленными площадками максимальных касательных напряжений (возможно, с учетом трения и дилатансии по площадкам реального скольжения) [25, 26].

2. Асимметрия функционирования площадок скольжения (в отличие от предсказаний механики сплошной среды), которая явно проявляется уже при малых деформациях на пределе обратимых напряжений как основной процесс (асимметрия) при развитии деформаций вплоть до разрушения.

3. В области, где элементы горной породы и грунтов находятся в послепиковом состоянии, деформация в целом, в конечном объеме осуществляется как скольжение блоков (практически жестких) друг по другу с вращением этих блоков относительно друг к другу так, чтобы составить квазисплошную среду [24, 25].

В целом, это новое представление о деформации грунтов и горных пород за счет сдвигов и преодоления прочности на сдвиге сводится к тому, что в рассматриваемом конечном объеме реально проявляются различные площадки скольжения, разделение тела на блоки, и, значит, несущая способность такой среды должна рассчитываться по этой схеме вплоть до разрушения среды [24, 25].

Что же является новым? Введение новой группы инвариантов, описывающих напряженно-деформированное состояние горной породы в окрестности подземной выработки (скважины), взамен величин главных напряжений, но, конечно в силу инвариантности, пригодных и для других ситуаций в горном массиве.

В соответствии с этим вместо (2.1) или аналогичных утверждений предлагается рассмотреть три инварианта:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \\ \mu_\sigma &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Нетрудно видеть, что этот набор инвариантов опирается на параметры T и σ_n и вводится в рассмотрение параметр Лодэ-Надаи, характеризующий роль прочности массива по упругим площадкам T_{12} и T_{23} :

$$\mu_\sigma = \frac{T_{23} - T_{12}}{T}$$

Это простое физическое истолкование, по-видимому, более адекватно обсуждению вопросов прочности твердых тел [24, 25, 26].

Набор инвариантов (2.5), конечно, представляет определенные удобства при оценке прочности массива в конкретных ситуациях (так, например, сечение поверхности $T(\sigma_n, \mu_\sigma)$ при $\mu_\sigma = 0$ дает вполне удовлетворительное описание огибающей кругов Мора, как это широко принято). Введение T отвечает тому, что было сказано выше о предельной прочности сдвигу в твердых телах. С этой точки зрения введение инварианта T означает, что предельная прочность достигается на площадках скольжения с максимальным касательным напряжением, положение которых обычно известно из предыдущего состояния, чаще всего упругого:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad \mu_\sigma = \frac{T_{23} - T_{12}}{T}$$

$$T_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad T_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

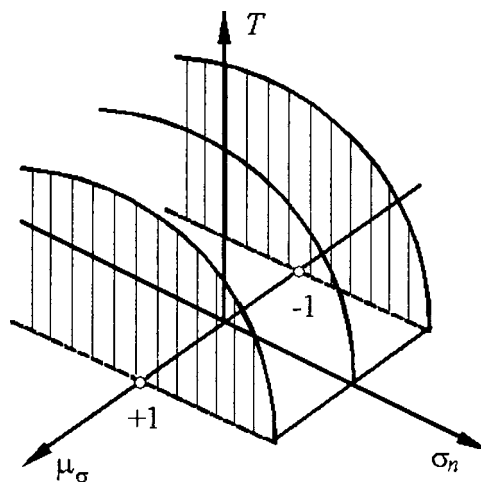


Рис.8 Паспорт прочности трехосного напряженного состояния

Это позволяет ввести новый “паспорт прочности” (рис.8) в переменных (2.5). Точка, представляющая напряженное состояние, находится под предельной поверхностью, когда рассматривается исходное напряженное состояние, близкое к гидростатическому, равновесному. Затем, при развитии горных работ по сооружению выработки или бурению скважины точка перемещается на поверхность и движется вдоль нее в соответствии с ростом T и σ_n по абсолютной величине. Если и происходит реальный рост сопротивления сдвигу на площадках скольжения, то за счет трения. В влияние параметра Лоде-Надаи сказывается на включении других площадок T_{12} и T_{23} в работу.

Но этого недостаточно. Достижение предельного напряженного состояния (в смысле величин (2.5)) недостаточно для суждения о достижении предела прочности или исчерпаниии несущей способности сплошной среды в конкретных ситуациях (в окрестности скважины, выработки, на откосе, при оползнях и т.д.).

Главным дополнительным рецептом исследования послепикового поведения горных пород является исследование деформаций

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \quad (2.6)$$

Если при последовательном нагружении исходного (*in situ*) состояния не возникает вопрос ни о соответствии знаков в (2.1) и (2.6), ни о соответствии главных направлений напряженного и деформированного состояний, то в целом для характеристики необратимых деформаций и разрушения необходимо также ввести три новых инварианта:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\
\varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \\
\mu_\varepsilon &= \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

И дело здесь не только в том, что $T = T(\Gamma)$ -зависимость, которая должна быть определена в “чистых” условиях, т.е. при $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon = 0$, в состоянии основного сопротивления материала сдвигу, а еще и в том, что на ниспадающей ветви напряжения и деформации не связаны однозначной зависимостью (вспомните идеальную пластичность!), а представляют собой независимо и по отдельности определяемые из законов механики величины:

- напряжения (усилия) определяются из законов равновесия или движения;
- деформации (и перемещения)- из законов сохранения массы с учетом дилатансии [24].

Конечно, отсутствие прямых зависимостей между напряжениями и деформациями является основным свойством при описании остаточной прочности $T_{ост}$.

О роли напряжения σ_z при равновесии объемного элемента можно сказать только одно: при условии плоской деформации вклад этой компоненты оказывается несущественным по сравнению с изменением других напряжений. В целом напряженное состояние в окрестности слабо подкрепленного пласта в окрестности скважины оказывается близким к состоянию чистого сдвига $\mu_\sigma = 0$.

Для иллюстрации рассмотрим равновесие кольца из материала, окружающего выработку (рис.6, 9). Под действием внешних сил материал находится в равновесии, если в нем созданы напряжения σ_φ , σ_z , σ_r :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0
\tag{2.8}$$

или

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r)$$

т.е. изменение σ_φ целиком определяется изменением σ_r по радиусу r . В рассуждениях всюду рассматриваются изменения напряжений, т. е. приращения напряжений по сравнению с исходным, в данном случае гидростатическим, в других ситуациях надо ввести неоднородность в правой части (2.8).

Это явление, связанное с ролью кольцевых усилий, до сих пор не получило бы признания, если бы не работы наших теоретиков в области механики грунтов и горных пород [5]. Дело в том, что непонимание этого явления связано с отсутствием подробных, детальных опытных фактов и наблюдений за поведением материалов на ниспадающей ветви. Поэтому очевиден наш интерес к ниспадающей ветви на диаграмме $T = T(\Gamma)$ (а как следствие, и на диаграмме $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ одноосного сжатия) (рис. 7). В области $T > T_{max}$ (послепиковое давление) развиваются не только общие деформации, но и деформации сдвига (а значит, и дилатансия) – и этот эффект в изменении объема (сумма изменений объема за счет изменения среднего напряжения изменения объема за счет сдвига) оказывается самым существенным (рис. 8).

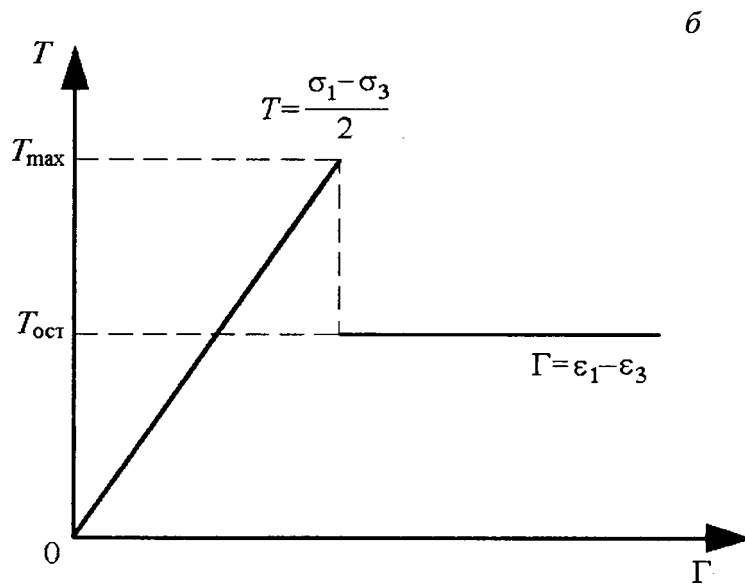
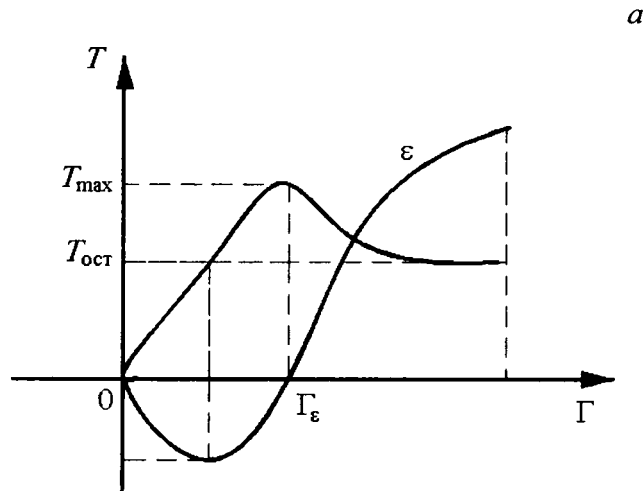


Рис.9 Зависимость ε от Γ (дилатансия) [28] (а), идеализация данных рис.7 (б)

Трудно переоценить эту гипотезу по сравнению с другими (изменение объема скелета, объема пористости, эффекта проницаемости), так как проявление площадок скольжения, связанной с ним дилатансии являются, по-видимому, основными причинами для закона фильтрации. Изменение объема вследствие дилатансии оказывается в интересующей нас области (для задач нефти и газа) генеральным [23, 24]. В связи с этим надо рассматривать и влияние остаточной сдвиговой прочности [29] (рис. 9), которую надо оценивать в массиве, а не по образцам, как T_{\max} .

Можно сказать, что последняя определяется по прочности по М. М. Протодьяконову (половина прочности при одноосном сжатии), а первая – $T_{\text{ост}}$ – М.М. Протодьяконову (мл.) или С. Е. Чиркову [30].

2.4. Равновесие кольца из материала, окружающего выработку

Для иллюстрации рассмотрим равновесие кольца из материала, окружающего выработку (скважину) (рис. 10). Под действием внешних сил материал кольца находится в равновесии, если в нем созданы напряжения σ_φ , σ_z , σ_r , при этом имеет место уравнение равновесия (2.8).

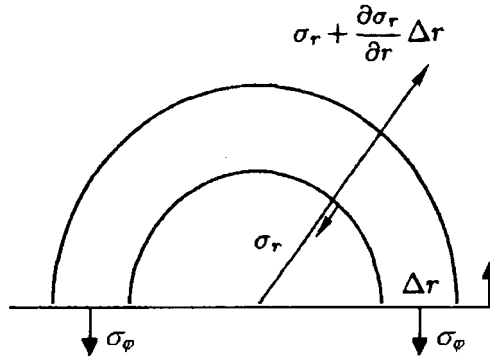


Рис. 10 О законе равновесия и роли кольцевых напряжений. Уравнение равновесия плоского кольца [27]:

при $\sigma_r \rightarrow 0, r \rightarrow a \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\phi - \sigma_r}{r} \approx \frac{T_{ост}}{r}, \sigma_\phi > \sigma_z \approx \frac{1}{2}(\sigma_\phi + \sigma_r) > \sigma_r,$ т.е. $\mu_\sigma = 0$ – чистый сдвиг

Соотношение (2.8), следующее только из уравнения равновесия (без привлечения конкретной модели сплошной среды!), можно проинтегрировать по площади кольца в окрестности выработки и оценить кольцевую прочность. Это очень важно, тогда

$$T_{max} a \approx T_{ост} r^*$$

где r^* – радиус кольца с наибольшим кольцевым напряжением, $r^* > a$. При этом механические параметры в массиве и на образцах определяются как указано выше.

По мере удаления от выработки (r растет) или неподкрепленной (слабо подкрепленной) скважины (σ_r по величине растет) σ_ϕ растет. Это важный вывод, так как именно кольцевые напряжения «душат» скважину, препятствуя фильтрации в нефтегазовых задачах, но защищают выработку от горного давления в типичных горных задачах.

В заключение пункта подчеркнем, что именно здесь проявляется конечность сопротивления сдвигу в твердых телах.

Таким образом, вне конкретных представлений о математической модели прочности только уравнения равновесия определяют напряженное состояние горного массива в окрестности выработки – таким важным эффектом оказывается возникновение кольцевых напряжений в окрестности выработки или скважины. Перемещения и деформации определяются из другого закона механики – закона сохранения масс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под. ред. В.Е. Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. I.– 298 с. Т. 2. –320 с.
2. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журнал. 1954. – Т. 6. – №3.
3. Ивлев Л Д Теория идеальной пластичности. Наука, 1966.
4. Ключников В.Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4.
5. Христианович С. Л., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности // МТТ. 1967.– №4.
6. Христианович С. Л., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности // МТТ. 1969. №5. – С. 138-149.
7. Карман Т., Хаар Л. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности. М., 1948.

8. Ильющин А.Л. Деформация вязко-пластического тела // Ученые записки МГУ. М. Вып. 39.1940.
9. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. 1974.– №3.– С. 130-133.
10. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О несимметрии пластического течения в сходящемся симметричном канале // ФТПРПИ. 1977. – № 3. – С. 3-9.
11. Ревуженко А. Ф. О деформировании сыпучей среды. Ч. 4. Микровращения // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 1983. – №6. – С. 8-17.
12. Надаи А. Пластичность. ОНТИ СССР, 1936.
13. Шемякин Е.И. Две задачи механики горных пород, связанные с освоением глубоких месторождений угля и руды // ФТПРПИ. 1975. – №6.
14. Батдорф С., Будянский Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика. 1962. – № 1.
15. Леонов М.Я., Швайко Н.Ю. Сложная пластическая деформация // ДАН СССР. 1954. – Т. 150.– №5.
16. Новожилов В. В. О физическом смысле инвариантов напряжения // ПММ. 1951. – Т. 15. – Вып. 2.
17. Янг Ю.И. II Вестник инженеров и техников. 1931. – № 6.
18. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
19. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев, 1976. – 415 с.
20. Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. Некоторые постановки краевых задач Л-пластичности // ПМТФ. 1979. – №2. С. – 128-137.
21. Шемякин Е.И. О хрупком разрушении твердых тел // МТТ. 1997. –№2. – С. 145-150.
22. Шемякин Е.И. Сейсмозврывные волны в процессе горного производства. М.: ННЦ ГП-ИГД им. А. А. Скочинского, 2004. – 76 с.
23. Христианович С.А., Желтов Ю.П. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР, ОТН. 1955. №5. – С. 3-41.
24. Шемякин Е.И. Синтетическая теория прочности // Физ. мезомех. 1999. – Т. 2. – №6.– С. 63-69.
25. Ревуженко Л.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О структурно-дилатансионной прочности горных пород // ДАН СССР. 1989. –Т. 305. – С. 1077-1080.
26. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. Задачи механики сыпучих сред в горном деле // ФТПРПИ. 1982. № 3. С. 19-25.
27. Стажевский С. Б. Приложение механики сыпучих сред к решению некоторых задач механики горных пород // ФТПРПИ. 1987. – № 3. – С. 3-15.
28. Адигамов Н. С. и др. Об учете дилатансии и разупрочнения при деформировании горных пород / Сб. посв. 70-летию И. Т. Айтматова. Бишкек, 2001.
29. Замахаяев В. С. Переходные процессы в пластах при первичном вскрытии // Бурение (Приложение к сб. «Нефть и капитал»), 2001. – № 2.
30. Чирков С.Е. Влияние масштабного фактора. М.: Наука, 1969.