Белорусский национальный технический университет. Минск

УРАВНЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.

Ботогова М.Г.

The governing equations of free vibrations of thin composite laminated cylindrical shell with variable parameters are obtained.

Постановка задачи и основные гипотезы. Будем считать, что оболочка пологая и составлена из N изотропных вязкоупругих слоев, характеризующихся переменной толщиной $h_k(\alpha_1,\alpha_2)$, модулем Юнга E_k, плотностью ρ_k, коэффициентом Пуассона ν_k, модулем поперечного сдвига G_k..

В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-то слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs, \alpha_2 = R\theta$. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, θ, s – окружная и продольная координаты соответственно.

Введем следующие обозначения:

безразмерные жесткостные характеристики к-го слоя:

$$\gamma_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1}, \tag{1}$$

$$\tilde{c}_k = 1 - c_k, \quad c_k = \int_0^{+\infty} K_k(s) e^{-i\Omega s} ds,$$

где $K_k(s)$ – ядро релаксаций напряжений материала для к-го слоя;

приведенный коэффициент Пуассона

$$\nu(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\nu_k E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1}; \tag{2}$$

осредненный модуль упругости

$$E(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1-\nu^2}{h(\alpha_1,\alpha_2)}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\right), \quad h(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{k=1}^{N} h_k(\alpha_1,\alpha_2). \tag{3}$$

Тогда из равенств (1)-(3) имеем

$$\frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2} = \frac{E(\alpha_1,\alpha_2)h(\alpha_1,\alpha_2)}{1-\nu(\alpha_1,\alpha_2)^2}\gamma_k. \tag{4}$$

Будем считать, что выполняются гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [1]:

1. Поперечные касательные напряжения изменяются по толщине k-ого слоя оболочки по заданному закону $\sigma^{(k)}{}_{i3} = f_0(z)\mu_i^{(0)}(\alpha_1,\alpha_2) + f_k(z)\mu_i^{(k)}(\alpha_1,\alpha_2)$, где

$$f_0(z) = \frac{1}{h^2(\alpha_1,\alpha_2)}(z - \delta_0(\alpha_1,\alpha_2))(\delta_N(\alpha_1,\alpha_2) - z), \qquad z \in [\delta_0(\alpha_1,\alpha_2), \delta_N(\alpha_1,\alpha_2)];$$

$$f_k(z) = \frac{1}{h_k^2(\alpha_1,\alpha_2)}(z - \delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2))(\delta_k(\alpha_1,\alpha_2) - z); z \in [\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2), \delta_k(\alpha_1,\alpha_2)].$$

Здесь $\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)$ – расстояние между исходной поверхностью и верхней границей k - ого слоя.

2. Нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных исходной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений.

3. Тангенциальные перемещения распределены по толщине пакета слоев согласно обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко:

$$u_i^{(k)}(\alpha_1,\alpha_2,z) = u_i(\alpha_1,\alpha_2) + z\Theta_i(\alpha_1,\alpha_2) + g(z)\Psi_i(\alpha_1,\alpha_2).$$

Функции $\mu_i^{(0)}$, $\mu_i^{(k)}$, Ψ_i определены в монографии [1].

4. Прогиб не зависит от поперечной координаты α_3.

Вывод уравнения: Принимая во внимание принятые выше гипотезы, перемещения запишем в следующем виде [1]

$$u_i^{(k)} = u_i - zw_{,i} + g(z)\psi_i,$$

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + z\kappa_{ij} + g(z)\psi_{ij}; \;\; \varepsilon_{i3} = f_0(z)\psi_i, \tag{5}$$

где

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + k_{ij}w,$$

$$\psi_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}\right), \quad \kappa_{ij} = -w_{,ij}, \; i,j = 1,2. \tag{6}$$

Здесь дифференцирование по координате α_i обозначено нижним индексом после запятой.

В теории упругих оболочек уравнения состояния имеют вид [1]:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k(\alpha_1,\alpha_2)}{1-\nu_k^2}\Xi\varepsilon_{ij}, \tag{7}$$

$$\Xi\varepsilon_{ij} = (1 - \nu(\alpha_1,\alpha_2))\,\varepsilon_{ij} + \nu(\alpha_1,\alpha_2)\delta_{ij}\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}),$$

δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$).

Принимая во внимание вязкоупругие свойства материала, уравнения (7) могут быть переписаны в виде

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1-\nu_k^2} \Xi \mathrm{J}_k(\varepsilon_{ij}), \tag{8}$$

$$\mathrm{J}_k(z) = z - \int_0^t K_k(t-s) z(s) \mathrm{d}s. \tag{9}$$

Удельные мембранные усилия и изгибающие моменты определяются стандартным способом [1]:

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} \sigma_{ij} \mathrm{d}z, \quad M_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} z\sigma_{ij} \mathrm{d}z \ . \tag{10}$$

В дополнение к классическим силам и моментам изотропной теории оболочек, обобщенные удельные силы Q_i и моменты L_{ij} можно представить следующим образом [1]:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} f_0(z) \sigma_{i3} \mathrm{d}z, \quad L_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} g(z) \sigma_{ij} \mathrm{d}z \ . \tag{11}$$

Для исследования свободных колебаний положим $(T_{ij}, M_{ij}, L_{ij}, Q_i, \kappa_{ij}, \psi_{ij}) = e^{i\Omega t}(T'_{ij}, M'_{ij}, L'_{ij}, Q'_i, \kappa'_{ij}, \psi'_{ij})$. Далее штрих будет опущен.

Принимая во внимания уравнения (4), (5), (8), (10), (11), получим следующие выражения для усилий и моментов

$$T_{ij} = \frac{E(\alpha_1,\alpha_2) h(\alpha_1,\alpha_2)}{1-\nu^2(\alpha_1,\alpha_2)} \Xi e_{ij} + \frac{E(\alpha_1,\alpha_2) h^2(\alpha_1,\alpha_2)}{2\left(1-\nu^2(\alpha_1,\alpha_2)\right)} \left(c_{13} \Xi \kappa_{ij} + c_{12} \Xi \psi_{ij}\right), \tag{12}$$

$$M_{ij} = \tfrac{1}{2} h c_{13} T_{ij} + \frac{E(\alpha_1,\alpha_2) h^3(\alpha_1,\alpha_2)}{12\left(1-\nu^2(\alpha_1,\alpha_2)\right)} \left(\eta_3 \Xi \kappa_{ij} + \eta_2 \Xi \psi_{ij}\right), \tag{13}$$

$$L_{ij} = \tfrac{1}{2} h c_{12} T_{ij} + \frac{E(\alpha_1,\alpha_2) h^3(\alpha_1,\alpha_2)}{12\left(1-\nu^2(\alpha_1,\alpha_2)\right)} \left(\eta_2 \Xi \kappa_{ij} + \eta_1 \Xi \psi_{ij}\right), \tag{14}$$

где

$$\tfrac{1}{12} h^3(\alpha_1,\alpha_2) \pi_{1k} = \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} g^2(z) \mathrm{d}z, \quad \tfrac{1}{12} h^3(\alpha_1,\alpha_2) \pi_{2k} = \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} z g(z) \mathrm{d}z,$$

$$\tfrac{1}{2} h^2(\alpha_1,\alpha_2) \pi_{3k} = \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} g(z) \mathrm{d}z, \quad h(\alpha_1,\alpha_2) \xi_k = h_k(\alpha_1,\alpha_2), \quad h(\alpha_1,\alpha_2) \zeta_n = \delta_n(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$c_{13} = \sum_{k=1}^{N} (\zeta_{k-1} + \zeta_k) \gamma_k, \quad c_{12} = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k,$$

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{-1} \pi_{1k} \gamma_k - 3c_{12}^2, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{-1} \pi_{2k} \gamma_k - 3c_{13} c_{12}, \ \eta_3 = 4\sum_{k=1}^{N} \left(\xi_k^2 + 3\zeta_{k-1}\zeta_k\right) \gamma_k - 3c_{13}^2.$$

Здесь $\pi_{1\kappa}, \pi_{2\kappa}, \pi_{3\kappa}, c_{13}, c_{12}, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ - функции, зависящие от α_1, α_2.

Следуя [1], введем обобщенные перемещения $\hat{u}_i$ и деформации $\hat{e}_{ij}$

$$e_{ij} = \hat{e}_{ij} - \tfrac{1}{2}hc_{13}\kappa_{ij} - \tfrac{1}{2}hc_{12}\psi_{ij}, \qquad (15)$$
$$u_i = \hat{u}_i - \tfrac{1}{2}hc_{13}w_{,i} - \tfrac{1}{2}hc_{12}\psi_i .$$

Тогда уравнение (12) можно переписать в виде

$$T_{ij} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\Xi\hat{e}_{ij}. \qquad (16)$$

Рассмотрим следующее преобразование [1]:

$$\hat{M}_{ij} = M_{ij} - \tfrac{1}{2}hc_{13}T_{ij}, \quad \hat{L}_{ij} = L_{ij} - \tfrac{1}{2}hc_{12}T_{ij}. \qquad (17)$$

Из соотношений (12)-(14), (18) следуют формулы для приведенных удельных моментов

$$\hat{M}_{ij} = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\eta_3\Xi\kappa_{ij} + \eta_2\Xi\psi_{ij}\right), \qquad (18)$$

$$\hat{L}_{ij} = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\eta_2\Xi\kappa_{ij} + \eta_1\Xi\psi_{ij}\right),$$

Уравнение для поперечных удельных сил может быть переписано как

$$Q_i = G\psi_i, \qquad (19)$$

$$G = \frac{\left[\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\lambda_k - \dfrac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\right)\right]^2}{\sum\limits_{k=1}^{N}\left(\lambda_k - \dfrac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\right)\tilde{G}_k^{-1}} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\tilde{G}_k,$$

$$\lambda_k = \int\limits_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} f_0^2(z)dz, \quad \lambda_{kn} = \int\limits_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} f_k(z)f_n(z)dz \quad (n = 0, k),$$

$$\tilde{G}_k = G_k\tilde{c}_k. \qquad (20)$$

Величина $G_k = E_k/\left[2\left(1+\nu_k\right)\right]$ является модулем сдвига k - ого слоя.

Для вывода уравнений свободных колебаний воспользуемся вариационным принципом Гамильтона

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}(\delta U - \delta T)dt = 0. \qquad (21)$$

$\delta U, \delta T$ являются вариациями потенциальной и кинетической энергией соответственно. Выполняя обычную процедуру вычисления вариаций в (21) можно получить уравнения в терминах удельных напряжений и приведенных моментов:

$$T_{1i,1} + T_{2i,2} = 0, \tag{22}$$

$$\hat{L}_{1i,1} + \hat{L}_{2i,2} = Q_i,\ i = 1, 2, \tag{23}$$

$$\hat{M}_{11,11} + 2\hat{M}_{12,12} + \hat{M}_{22,22} - \frac{1}{R_2(\alpha_2)} T_{22} + \Omega^2 \left(\sum_{k=1}^{N} \rho_k h_k \right) w = 0. \tag{24}$$

Используя выражения (5), (15) получим уравнения совместности деформаций

$$\hat{e}_{11,22} - 2\hat{e}_{12,12} + \hat{e}_{22,11} = R_2^{-1} w_{,11}. \tag{25}$$

Представим силовую функцию F таким образом, чтобы

$$T_{ij} = \delta_{ij} \Delta F - F_{,ij}. \tag{26}$$

Выражая обобщенные деформации $\hat{e}_{ij}$ посредством силовой функции и подставив их в уравнение (25), получим уравнение

$$\begin{gathered} \frac{1}{Eh}\Delta\Delta F + \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\left(\frac{1}{Eh}\right) - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\left(\frac{\nu}{Eh}\right)\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_1^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\left(\frac{1}{Eh}\right) - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}\left(\frac{\nu}{Eh}\right)\right) + \\ + 2\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_2\partial\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\alpha}\left(\frac{1-\nu}{Eh}\right) = R_2^{-1} w_{,11}. \end{gathered} \tag{27}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 287 с.

2. Матяш В.И. Колебания изотропных упруго-вязких оболочек//Механика полимеров. – 1971. – №1 – С. 157 – 163.