Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗА ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗРЫВОВ ДЕФОРМАЦИЙ

Буренин А.А., Рагозина В.Е.

In the context of nonlinear dynamic elastic theory the peculiarities of constructing boundary –value problems solutions in vicinity of the wave front by expanding into the ray series behind the deformations discontinuity surfaces are discussed. In constructing ray series being the approximate boundary-value problems solutions it is suggested to use front curvature dependences of discontinuity intensities.

Метод исследования переходных процессов, называемый лучевым, широко используется в геометрической оптике, акустике, динамике деформирования. По своему существу он является асимптотическим методом [1]. В настоящей статье остановимся на разновидности этого метода, связанной с построением приближенных решений краевых задач нелинейной динамической теории упругости в форме разложений решений по лучевой координате за поверхностями разрывов деформаций. Следует заметить, что в своей основе этот метод опирается на теорию рекуррентных условий совместности разрывов, вытекающих из геометрии и кинематики движущихся поверхностей разрывов, которая включает в себя условия совместности Адамара, обобщение последних, данное Т. Томасом [2], полную систему таких соотношений, впервые записанную Г.И. Быковцевым [3] для параметрического задания движения в прямоугольной декартовой системе координат и обобщенную на случай изначально криволинейной системы координат сравнительно недавно [4]. Если поверхность разрывов является характеристической, что справедливо в случае линейных сред или в случае поверхностей разрывов ускорений (слабых волн), то теория рекуррентных условий совместности предоставляет возможность для коэффициентов лучевых рядов, следуя законам сохранения, выписать обыкновенные дифференциальные уравнения (уравнения затухания), последовательным интегрированием которых осуществляется построение приближенного решения. Такой способ был предложен в [5,6] и с его помощью были получены решения краевых задач теории упругости [7,8], теории пластичности [9], гиперболической термоупругости [10]. Обзор работ данного направления содержится в статье [11]. Отдельно следует отметить осуществленную возможность переноса этого метода на случай неоднородных сред, осуществленный Анатолием Власовичем Чигаревым [12]. Именно на такой методической основе были получены А.В. Чигаревым классические теперь уже результаты по распространению волн в деформируемых средах, включая поверхностные волны.

При исследовании поверхностей разрывов деформаций в нелинейных средах складывается принципиально иная ситуация. Отличие скоростей ударных волн от характеристических не позволяет, следуя законам сохранения, кинематическим и геометрическим условиям совместности разрывов, получить уравнения затухания. Способ избегания данной математической сложности был предложен в [14,15]. Здесь развивается данный подход с целью учета на каждом шаге последовательного построения решения изменения интенсивности разрыва за счет изменяющейся кривизны фронтальной поверхности [13].

I. Общие модельные соотношения.

Для описания движения нелинейно-упругой среды остановимся на представлении Эйлера, где x^1, x^2, x^3 – пространственная криволинейная система координат, $t \geq 0$ – время. В этом случае общая система уравнений имеет вид:

$$\rho=\rho_0\, det\left(\delta^i_j-u^i_{.j}\right),\ v^i=\dot u^i+u^i_{.j}v^j,$$

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u^k_{.j}\right),\ \sigma^{ij}_{.j}=\rho\left(\dot v^i+v^i_{,j}v^j\right), \tag{1.1}$$

$$\sigma^i_j=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial\alpha^k_i}\left(\delta^k_j-2\alpha^k_j\right),\ \delta^i_j=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}.$$

В (1.1) ρ и ρ_0 – плотность среды в текущем и свободном состоянии; u^i и u_i – контра- и ковариантные компоненты вектора перемещений; α_{ij} – ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси; σ^{ij} и σ^i_j – контравариантные и смешанные компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши; v^i – контравариантные компоненты вектора скорости; W – функция упругого потенциала, вид которой определяет свойства среды; точкой над символом обозначена частная производная по времени; латинский индекс после запятой означает ковариантное дифференцирование по пространственной координате. Для рассматриваемых в дальнейшем процессов ударного деформирования примем гипотезу адиабатического приближения, т.е. остановимся на чисто механических эффектах деформирования. Будем считать среду изотропной, так что $W=W(I_1,I_2,I_3)$. Считаем, что упругий потенциал зависит от линейного, квадратичного и кубического инвариантов тензора деформаций. Представим W его разложением в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния. Для сжимаемых сред это разложение вида

$$W=\frac{\lambda}{2}I_1^2+\mu I_2+lI_1I_2+mI_1^3+nI_3+\xi I_2^2+\eta I_1^2I_2+\kappa I_1I_3+\chi I_1^4+\cdots \tag{1.2}$$
$$I_1=\alpha^i_i,\ I_2=\alpha^i_j\alpha^j_i,\ I_3=\alpha^i_j\alpha^j_k\alpha^k_i,$$

где λ, μ – параметры Ламе, l, m, n, ξ, η, κ, χ - упругие модули третьего и четвертого порядка. Для изучения процесса распространения поперечных ударных волн в чистом виде без влияния предварительных объемных деформаций более удобна модель несжимаемой нелинейно-упругой среды. Наличие геометрической связи $\rho=\rho_0=const$ позволяет уменьшить число независимых переменных для W, так что $W=W(I_1,I_2)$. В этом случае принимаем представление

$$W=(a-\mu)I_1+aI_2+bI_1^2-\kappa I_1I_2-\theta I_1^3+cI_1^4+dI_2^2+kI_1^2I_2+\cdots \tag{1.3}$$

В (1.3) перед некоторыми слагаемыми взят знак «-», т.к. $I_1\le 0$, $I_2\ge 0$ для несжимаемых сред. Также необходимо внести поправку на добавочное гидростатическое давление в формуле Мурнагана в (1.1):

$$\sigma^i_j=-p\delta^i_j+\frac{\partial W}{\partial\alpha^k_i}\left(\delta^k_j-2\alpha^k_j\right). \tag{1.4}$$

В рядах (1.3) и (1.4) дальше ограничимся выписанными членами ввиду малой информации о величинах упругих модулей более высоких порядков. Система (1.1) наряду с (1.2) или (1.3), (1.4) оказывается замкнутой относительно определяемых полей.

II. Типы и особенности движения ударных волн.

Если рассматриваемая краевая задача включает большие изменения краевых условий за малое время, то ее решение можно строить в обобщенном виде, считая, что эти изменения задаются скачкообразными изменениями первых и вторых производных поля перемещений –

разрывами производных. Созданные в начальный момент времени на границе, они распространяются посредством фронтальных поверхностей разрывов. Движение поверхностей разрывов в нелинейно-упругих средах подчинено определенным закономерностям. Прежде всего, считается, что разрывы на них являются регулярными, т.е. для них выполняются геометрические и кинематические условия совместности:

$$[f_{,i}]=\left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]\nu_i+a^{\alpha\beta}[f]_{,\alpha}g_{ij}x^j_{,\beta},\quad [\dot f]=-G\left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]+\frac{\delta[f]}{\delta t},\tag{2.1}$$

$$[f]=f^+-f^-,\ f^+=lim_{x^i\to x^i_\Sigma}f,\ f^-=lim_{x^i\to x^i_\Sigma}f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}=f_{,i}\nu^i,\ g_{ij}=\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\frac{\partial z^k}{\partial x^j},\ a^{\alpha\beta}=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial y^\beta},$$

где $y^\alpha(\alpha=1{,}2)$ – внутренние координаты на поверхности разрывов Σ; греческие индексы и здесь, и всюду в дальнейшем принимают значения 1, 2; g_{ij} и $a_{\alpha\beta}$ – пространственный и поверхностный метрический тензор соответственно; буквой f обозначены компоненты любого пространственного тензора, который может рваться на Σ вместе со своими производными; $\frac{\delta}{\delta t}$ – обозначение производной по времени в данной подвижной точке поверхности Σ, для этой точки в процессе движения постоянными будут только $y^\alpha=y_0^\alpha$; индексами «+» и «-» выделены значения величин перед Σ и сразу за ней; ν_j – компоненты единичного вектора внешней нормали, направленной в сторону движения Σ; G – скорость Σ в направлении нормали; греческим индексом после запятой обозначается тензорная производная по поверхности в смысле определения [16].

Решения, содержащие поверхности разрывов, носят название обобщенных, т.к. на них (1.1) не имеет места. Но (1.1) является дифференциальным следствием общих законов сохранения массы, импульса и энергии. Из этих же законов на Σ вытекает связанность разрывов искомых величин между собой динамическими условиями совместности:

$$[\rho(v^i\nu_i-G)]=0,$$

$$[\sigma^{ij}]\nu_j=\rho^+(v^{j+}\nu_j-G)[v^i],\tag{2.2}$$

$$\sigma^{ij+}[v_i]\nu_j=\rho^+(v^{j+}\nu_j-G)\left(\frac{[v^i][v_i]}{2}+[E]\right)-[q^j]\nu_j,$$

первое из которых – следствие закона сохранения массы; второе следует из закона сохранения импульса; третье – из закона сохранения энергии, причем в нем E – плотность внутренней энергии, q_i - вектор теплового потока. Из (2.1), (2.2) для сжимаемых сред следует наличие трех возможных ударных волн, квазипродольной и двух квазипоперечных [17]. Приставка квази- означает, что наряду с основной составляющей разрыва (продольной или поперечной) волна может нести на себе дополнительную составляющую разрыва. Скорость волны является сложной функцией предварительных деформаций и характеристик разрыва. Если даже считать поле предварительных деформаций известным наряду с геометрией волны, продольный и поперечный скачок остаются неизвестными и могут быть определены только в процессе решения краевой задачи. Это приводит к включению скорости G в число неизвестных задачи, поэтому ряд из краевых условий оказывается связан с поверхностью Σ, положение которой заранее неизвестно. Это приводит к дополнительному усложнению задачи, исходно уже нелинейной, и тем самым к логически обоснованному построению их решения с помощью приближенных, в частности аналитических методов. Что касается несжимаемой среды, здесь также возникают две поперечные волны, зависящие от предварительных деформаций и скачков на волне и различные по своим свойствам и назначению [18].

III. Один вариант лучевого метода решения задачи о нормальном ударе по упругому полупространству.

Рассмотрим задачу, в которой поле перемещений сводится к компоненте $u_1(x_1,t)$, возникающей в результате нормального удара в момент $t=0$ по границе упругого полупространства $x_1 \geq 0$. Следствием (1.1) буде нелинейный аналог уравнения Навье:

$$u_{1,11}(1+\alpha u_{1,1})+\cdots=\frac{1}{C_1^2}\left(\ddot{u}_1(1-2u_{1,1})+2\dot{u}_1\dot{u}_{1,1}+\cdots\right); \tag{3.1}$$

$$u_{1,1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1};\ \alpha=-9+6\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu};\ C_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}.$$

Под действием удара граница полупространства $x_1=0$ начинает движение, которое может быть представлено рядом Тейлора в окрестности нуля:

$$u_1\Big|_{\substack{x_1=f(t)\\ t\geq 0}}=f(t);\ f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d^k f}{dt^k}\bigg|_0 t^k\approx v_0 t+\frac{at^2}{2}+\cdots;\ v_0>0. \tag{3.2}$$

В (3.2) ограничимся квадратичными слагаемыми ряда. Этого вполне достаточно для отражения сути метода и особенностей задач рассматриваемого типа. Для скорости v_0 важным является выписанное строгое неравенство; его выполнение приводит к мгновенному формированию ударной волны $\Sigma(t)$, причем $\Sigma(0)$ занимает положение $x_1=0$. На $\Sigma(t)$ необходимо поставить следующие краевые условия:

$$u_1\big|_{\Sigma(t)}=0;\ \kappa_1\big|_{\Sigma(t)}=[\dot{u}_1]_{\Sigma(t)};$$

$$x_\Sigma=\int_0^t G(\xi)d\xi;\ G=C_1\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\left(\frac{\kappa_1}{C_1}\right)^k\right); \tag{3.3}$$

$$\beta_1=-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}=\frac{\alpha}{4};\ \beta_2=-3\beta_1^2-\frac{3}{2}\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}+\frac{7}{4}.$$

В основе применяемого далее лучевого метода лежит идея о замене точного решения краевой задачи (3.1-3.3) его приближенным прифронтовым разложением вида

$$u_1^l(x_1,t)=u_1^0(x_1,t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k u_1}{\partial t^k}\right]\Bigg|_{t_\Sigma}(t-t_\Sigma)^k, \tag{3.4}$$

$$t_\Sigma = \int_0^{x_1} \frac{d\xi}{G(\xi)},\; t \ge t_\Sigma .$$

Представление (3.4) включает $u_1^0(x_1,t)$ - поле перемещений, созданное в области перед волной (в нашем случае $u_1^0(x_1,t)=0$); $u_1^I(x_1,t)$ - перемещения за волной. Скачки производных по времени до произвольного порядка означают, что в окрестности волны требуется большая гладкость решения, чем для исходной краевой задачи, что позволяет заменить точное решение на приближенное (3.4) в некоторой области. Ее протяженность зависит от конкретной задачи. К примеру, для линеаризованной задачи (3.1–3.3) два первых слагаемых лучевого ряда (3.4) совпадают с точным решением во всей области задачи. Если считать, что нелинейность задачи слабая, то аналогичный ряд должен дать хорошее приближение к решению. Отметим, что название «лучевой» связано с тем, что в общем случае ряд строится вдоль линий, проходимых каждой точкой $\Sigma(y^\alpha,t)$ - лучей. Их геометрия задается уравнениями

$$x^i = x_0^i + \int_0^t G(y^\alpha,\xi)\nu^i(y^\alpha,\xi)d\xi \tag{3.5}$$

и в общем случае определяется совместно с решением. В нашем простейшем случае лучевое направление задается декартовой координатой x_1. Чтобы построить ряд (3.4), необходимо знать его коэффициенты, $\kappa_k = \left[\dfrac{\partial^k u_1}{\partial t^k}\right]\Big|_{t_\Sigma}$. Для их определения можно применить (3.1), или следствия его частного дифференцирования по времени, причем все полученные уравнения записываются в разрывах на $\Sigma(t)$. В результате на k-ом шаге метода ($k=0,1,2,\dots,K$) получаем рекуррентные уравнения вида

$$\frac{\delta\kappa_{k+1}}{\delta t} = F_k(\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_k,\kappa_{k+1},\kappa_{k+2}), \tag{3.6}$$

где значение κ_{k+2} не позволяет проинтегрировать эту цепочку уравнений, последовательно определяя искомые разрывы, что отличает ударные волны от слабых волн. Это обстоятельство, как правило, считается исключающим для применения лучевого метода. Как вариант изменения метода для ударных волн в работах [13,14,18] применяется дополнительное разложение разрывов в ряды по δ-производным в окрестности нуля, так что

$$\kappa_1 \approx \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t + \frac{1}{2}\frac{\delta^2\kappa_{10}}{\delta t^2}t^2 + \cdots, \tag{3.7}$$

$$\kappa_2 \approx \kappa_{20} + \frac{\delta\kappa_{20}}{\delta t}t + \cdots,\quad \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} = \frac{\delta\kappa_1}{\delta t}\bigg|_{t=0}$$

и т.д.

На (3.6) в этом случае смотрят, как на алгебраическое соотношение в нуле. К примеру, если в нашей задаче ограничится нулевым шагом метода, то (3.6) переходят в одно уравнение $\dfrac{\delta\kappa_1}{\delta t} = F_0(\kappa_1,\kappa_2)$; в (3.7) считаем $\kappa_1 \approx \kappa_{10} + \dfrac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t$, $\kappa_2 \approx \kappa_{20}$. Вместе с краевым условием

(3.2) получаем замкнутую задачу относительно κ_{10}, κ_{20}, $\frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}$. Сразу отметим, что если для плоской задачи линейная по времени структура разрывов в принципе хорошо согласуется с характером движения волны, то при наличии кривизны волнового фронта, что рассматривается далее, линейное приближение имеет малую допустимую область.

Предлагаемый вариант лучевого метода основан на включении в (3.6) величины κ_{K+2}, определенной из решения соответствующей линеаризованной задачи. Тогда (3.6) относительно κ_1, $\kappa_2,\ldots,$ κ_{K+1} становится замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Иногда их можно проинтегрировать точно; если это невозможно из-за их сложной нелинейной структуры, то их можно решить приближенно аналитически, либо численно.

Если в нашей задаче ограничиться нулевым шагом метода, то из уравнения движения, записанного в разрывах, следует

$$\frac{\delta\kappa_1}{\delta t}=\frac{\kappa_2\kappa_1}{C_1}\frac{A_0+A_1\dfrac{\kappa_1}{C_1}+\cdots}{B_0+B_1\dfrac{\kappa_1}{C_1}+\cdots}\,;\ \frac{\kappa_1}{C_1}<<1\,; \tag{3.8}$$

$$A_0=-2\beta_1\,;\ A_1=5\beta_1^2+2\beta_2-\alpha\beta_1\,;\ B_0=-2\,;\ B_1=-3\beta_1-2\alpha+2\,,$$

где многоточием обозначены слагаемые более высокой степени малости по степеням $\kappa_1 C_1^{-1}$. Приближенно можно считать

$$\frac{\delta\kappa_1}{\delta t}=\beta_1\frac{\kappa_2\kappa_1}{C_1}\,. \tag{3.9}$$

Для сходной линейной задачи $\kappa_2=\kappa_{20}=const$. Подставляя это приближение в (3.9), получим

$$\kappa_1\approx\kappa_{10}\,exp\left(\frac{\beta_1}{C_1}\kappa_{20}t\right), \tag{3.10}$$

откуда следует экспоненциальный, а не линейный характер изменения κ_1, величина исходной интенсивности волны может как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от κ_{20}, т.к. $\beta_1<0$ для известных модулей материалов. Подставляя найденную величину $\kappa_1(t)$ в уравнение эйконала, получим на волновом фронте

$$t_\Sigma=\frac{x_1}{C_1}-\frac{C_1}{\beta_1\kappa_{20}}ln\left\{1+\frac{\beta_1\kappa_{10}}{C_1}\left[exp\left(\frac{\beta_1}{C_1^2}\kappa_{20}x_1\right)-1\right]\right\}, \tag{3.11}$$

или же обратную зависимость

$$x_\Sigma(t)=C_1\left\{t+\frac{\kappa_{10}}{\kappa_{20}}\left[exp\frac{\beta_1\kappa_{20}t}{C_1}-1\right]+\frac{\beta_2}{2\beta_1}\frac{\kappa_{10}^2}{\kappa_{20}C_1}\left[exp\frac{2\beta_1\kappa_{20}t}{C_1}-1\right]+\cdots\right\} \tag{3.12}$$

С учетом (3.11), (3.12) из (3.4) получаем приближенное представление для поля перемещений:

$$u(x_1,t)=-\frac{\kappa_{10}\,exp\left(\frac{\beta_1\kappa_{20}x_1}{C_1^2}\right)}{1+\frac{\beta_1\kappa_{10}}{C_1}\left[exp\left(\frac{\beta_1\kappa_{20}x_1}{C_1^2}\right)-1\right]}\cdot\left\{t-\frac{x_1}{C_1}+\frac{C_1}{\beta_1\kappa_{20}}ln\left\{1+\frac{\beta_1\kappa_{10}}{C_1}\left[exp\left(\frac{\beta_1}{C_1^2}\kappa_{20}x_1\right)-1\right]\right\}\right\}-$$

$$-\frac{\kappa_{20}}{2}\left\{t-\frac{x_1}{C_1}+\frac{C_1}{\beta_1\kappa_{20}}ln\left\{1+\frac{\beta_1\kappa_{10}}{C_1}\left[exp\left(\frac{\beta_1}{C_1^2}\kappa_{20}x_1\right)-1\right]\right\}\right\}^2-\cdots \tag{3.13}$$

В (3.13) κ_{10}, κ_{20} - неизвестные константы. Для их определения используем краевое условие (3.2). Приравнивая коэффициенты рядов с одинаковыми степенями по времени, получим

$$\frac{\kappa_{10}}{C_1}\approx-\frac{v_0}{C_1}-\left(\frac{v_0}{C_1}\right)^2+\cdots \tag{3.14}$$

$$\kappa_{20}\approx-\frac{a\left\{1+\frac{v_0}{C_1}+(1+\beta_1)\left(\frac{v_0}{C_1}\right)^2+\cdots\right\}}{1-2\frac{v_0}{C_1}+(1-4\beta_1)\left(\frac{v_0}{C_1}\right)^2+\cdots}.$$

Если бы в краевом условии (3.2) учитывались более высокие степени времени, то решение не ограничивалось бы нулевым шагом метода. Отметим, что краевое условие (3.3), ставящееся на $\Sigma(t)$, в этом методе выполняется автоматически. Далее рассмотрим, какие изменения в решение вносятся присутствием кривизны волнового фронта.

IV. Нормальный удар по цилиндрической полости в упругом пространстве

В нелинейно упругом пространстве присутствует цилиндрическая полость радиуса r_0, неограниченная по образующим. А начальный момент времени изнутри по всей поверхности полости создается ударное нагружение в направлении нормали. Следствием нагрузки в цилиндрической системе координат r,ϕ,z будет поле напряжений $u_r(r,t)$, $u_\phi=u_z=0$. Передним фронтом распространяющихся деформаций будет ударная волна (предварительные деформации в среде отсутствуют). В системе координат r,ϕ,z уравнения движения сводятся к одному уравнению:

$$\begin{aligned}&u_{r,rr}\left(1+\alpha_1u_{r,r}+\alpha_2\frac{u_r}{r}\right)+\frac{u_{r,r}}{r}-\frac{u_r}{r^2}+\alpha_3\frac{u_r^2}{r^3}+\alpha_4\frac{u_{r,r}^2}{r}+\alpha_5\frac{u_ru_{r,r}}{r^2}+\cdots=\\&=\frac{1}{C_1^2}\left\{\ddot{u}_r\left(1-2u_{r,r}-\frac{u_r}{r}\right)+2\dot{u}_r\dot{u}_{r,r}+\cdots\right\}\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$u_{r,r}=\frac{\partial u_r}{\partial r};\ \dot{u}_r=\frac{\partial u_r}{\partial t};$$

$$\alpha_1=-9+6\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu};\ \alpha_2=-\frac{4\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}+\frac{2l+6m}{\lambda+2\mu};$$
$$\alpha_3=\frac{5\lambda+7\mu}{\lambda+2\mu}-\frac{4l+6m+3n}{\lambda+2\mu};\ \alpha_4=-\frac{8\lambda+13\mu}{\lambda+2\mu}+\frac{4l+6m+3n}{\lambda+2\mu};\ \alpha_5=3.$$

На границе полости $L(t)$ поле перемещений известно:

$$u_r\big|_{r_L}=g(t);\ r_L=r_0+g(t);\ g(t)\approx v_0t+\frac{at^2}{2};\ v_0\neq 0;\ t\geq 0. \tag{4.2}$$

Положение волнового фронта $\Sigma(t)$ определено уравнением

$$r_\Sigma=r_0+\int_0^t G(\xi)d\xi, \tag{4.3}$$

где $G(t)$ вычисляется по формуле (3.3).

Первоначально рассмотрим решение лучевым методом соответствующей линейной задачи до второго порядка включительно. Для нее получим

$$\begin{gathered}\frac{\delta\kappa_1}{\delta t}=-\frac{1}{2r_\Sigma}C\kappa_1;\\ \frac{\delta\kappa_2}{\delta t}=-\frac{C\kappa_2}{2r_\Sigma}-\frac{3}{8}\frac{C^2\kappa_1}{r_\Sigma^2};\\ r_\Sigma=r_0+Ct,\end{gathered} \tag{4.4}$$

откуда следует

$$\kappa_1=\frac{\kappa_{10}}{\sqrt{1+\frac{Ct}{r_0}}};\ \kappa_2=\frac{\kappa_{20}}{\sqrt{1+\frac{Ct}{r_0}}}-\frac{3}{8}\frac{C^2\kappa_{10}t}{r_0^2\left(1+\frac{Ct}{r_0}\right)^{3/2}};$$
$$u_r=-\frac{\kappa_{10}\sqrt{r_0}}{\sqrt{r}}\left(1-\frac{r-r_0}{C}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{\kappa_{20}\sqrt{r_0}}{\sqrt{r}}-\frac{3\kappa_{10}}{8\sqrt{r}r^{3/2}}(r-r_0)\right]\left(t-\frac{r-r_0}{C}\right)^2-\ldots \tag{4.5}$$
$$\kappa_{10}=-v_0;\quad \kappa_{20}=-a.$$

Отметим, что если бы точное решение (4.4) заменили приближенным вида $\kappa_1\approx\kappa_{10}+\frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}t,\quad \kappa_2\approx\kappa_{20}$, то для κ_1 получили бы:

$$\kappa_1\approx\kappa_{10}\left(1-\frac{Ct}{2r_0}\right).$$

Следовательно, уже на расстояниях $Ct=2r_0$ получаем $\kappa_1=0$, тогда как точное решение должно только асимптотически приближаться к нулю. Сравнение $\kappa_2(t)$ из (4.5) и $\kappa_2\approx\kappa_{20}$ показывает, что это приближение (в отличие от плоской задачи) имеет серьезную погрешность, связанную с быстрым изменением на волне ее кривизны, которое существенно изменяет искомое решение.

Теперь остановимся на решении основной нелинейной задачи. Ограничимся в лучевом ряде (3.4) первыми двумя слагаемыми. Это позволяет рассмотреть только нулевой шаг метода, т.е. уравнение затухания, следующее из (4.1), записанного в разрывах. С учетом геометрических и кинематических условий совместности из (4.1) получим

$$\frac{\delta\kappa_1}{\delta t}=\frac{\beta_1\kappa_2\dfrac{\kappa_1}{C_1}-\dfrac{G\kappa_1}{2r_\Sigma}-\dfrac{\alpha_4\kappa_1^2}{2r_\Sigma}}{1-\gamma\dfrac{\kappa_1}{C_1}}+\ldots,\qquad(4.6)$$

$$2\gamma=2-7\beta_1,$$

где многоточием обозначены невыписанные слагаемые более высокого порядка относительно малой величины $\kappa_1 C_1^{-1}$. Если даже в (4.6) использовать для κ_2 приближенную формулу (4.5), относительно κ_1 (4.6) будет интегро-дифференциальным нелинейным уравнением, т.к. r_Σ определяется из (4.3). Вообще, если не сводить решение к одному уравнению, то (4.6) можно дополнить уравнением

$$\frac{\delta r_\Sigma}{\delta t}=G(t)=C_1\left(1+\beta_1\frac{\kappa_1}{C_1}+\ldots\right).\qquad(4.7)$$

Таким образом, можно решать (4.6, 4.7) совместно относительно двух неизвестных функций κ_1 и r_Σ. Отметим, что хотя кривизна волнового фронта явным образом не содержится в формулах для скоростей волн, она все-таки входит в уравнения затухания, определяя скорость изменения интенсивности волны и через нее влияя на скорость самой волны. Полученную систему уравнений ввиду ее сложной зависимости от искомых функций можно решать численно, либо аналитически, на основании приближенных методов. Темой статьи является прежде всего аналитические методы, на которых и остановимся. По своим данным задача содержит величину, которую практически всегда можно считать малым параметром: $\varepsilon=\dfrac{\kappa_{10}}{C_1}$. Введем безразмерные переменные:

$$s=\frac{C_1 t}{r_0};\quad w(s)=\frac{\kappa_1}{\kappa_{10}}.\qquad(4.8)$$

Из (4.6), считая, что κ_2 приближенно задается решением линейной задачи (4.5), получим в новых переменных:

$$\frac{\delta w}{\delta s}=\frac{\beta_1\dfrac{\kappa_2 r_0}{\kappa_{10}C_1}\varepsilon w-(1+\beta_1\varepsilon w+\ldots)\dfrac{r_0}{2r_\Sigma}w-\dfrac{\alpha_4 r_0}{2r_\Sigma}\varepsilon w^2}{1-\gamma\varepsilon w};$$

$$\frac{\kappa_2 r_0}{\kappa_{10}C_1}=\frac{\kappa_{20}r_0}{\kappa_{10}C_1\sqrt{1+s}}-\frac{3s}{8(1+s)^{3/2}};\qquad(4.9)$$

$$r_\Sigma=r(t)=r_0+\int_0^t G_1(\xi)d\xi=r_0+\int_0^t C_1\left(1+\beta_1\varepsilon w+\beta_2\varepsilon^2 w^2+\ldots\right)d\xi.$$

Величина $\kappa_{20} r_0 \kappa_{10}^{-1} C_1^{-1}$ по своему смыслу может считаться константой, сопоставимой с единицей, так что в дальнейшем $A = \kappa_{20} r_0 \kappa_{10}^{-1} C_1^{-1}$. Если считать, что все решение сводится к определению одной неизвестной функции w, то относительно нее (4.9) – уравнение интегро-дифференциального типа. Неизвестную функцию $w(s)$ представим асимптотическим рядом

$$w(s) = w_0(s) + \varepsilon w_1(s) + \varepsilon_2 w_2(s) + \ldots \tag{4.10}$$

Решение (4.9) проведем последовательно для $w_0(s)$, $w_1(s)$, ограничившись этими функциями. Это ограничение не является принципиальным, построение решения для $w(s)$ можно продолжить до любой требуемой степени точности. В нашем случае

$$w(s) \approx \frac{1}{\sqrt{1+s}} + \varepsilon \left\{ \frac{\beta_1 A s}{\sqrt{1+s}} - \frac{\varphi}{1+s} + \frac{\beta_1}{(1+s)^{3/2}} - \frac{\gamma + \alpha_4}{\sqrt{1+s}} \right\} + \ldots \tag{4.11}$$

Положение волнового фронта определяется приближенной зависимостью

$$r_\Sigma \approx r_0 + C_1 t + 2\varepsilon r_0 \beta_1 \left(\sqrt{1+s} - 1\right) = r_0 + C_1 t + 2\frac{\kappa_{10}}{C_1} r_0 \beta_1 \left(\sqrt{1 + \frac{C_1 t}{r_0}} - 1 \right) \tag{4.12}$$

Укажем на следующую особенность построенного решения: если реальная величина κ_2 отличается от приближения линейной задачи незначительно, так что поправка имеет порядок ε, то учет этого отклонения не скажется на решении для w_0, w_1, а лишь на приближениях более высоких порядков. Найденная в (4.11) $w(s)$ отличается от своего линейного аналога и отражает основные особенности нелинейной задачи. Обращение (4.12) приводит к соотношению

$$t_\Sigma = t(r) = \frac{1}{C_1} \left(r - r_0 + 2 r_0 \beta_1 \frac{\kappa_{10}}{C_1} \left(1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right) \right) + \ldots \tag{4.13}$$

Если ограничиться расстояниями, проходимыми волной, для которых $C_1 t \sim r_0$, то можно рассматривать в качестве прямого разложения решения только (4.11, 4.12, 4.13). Переход в удаленную от r_0 область связан с нарушением регулярности прямого разложения и требует построения дополнительных асимптотических разложений. В представляемой статье основное внимание уделяется особенностям метода лучевых рядов, поэтому удаленную от r_0 область оставим без дальнейшего исследования. Переходя к исходным переменным r, t, ряд типа (3.4) возможно переписать в виде:

$$u_r(r;t) = -\kappa_{10} \left\{ \frac{1}{\sqrt{H(r)}} + \frac{\kappa_{10}}{C_1} \left[\frac{\beta_1 \kappa_{20} r_0}{\kappa_{10} C_1} \frac{H(r) - 1}{\sqrt{H(r)}} - \frac{\varphi}{H(r)} + \frac{\beta_1}{H^{3/2}(r)} - \frac{\gamma + \alpha_4}{\sqrt{H(r)}} \right] \right\} \left(t - \frac{r_0 (H(r) - 1)}{C_1} \right) -$$
$$- \frac{\kappa_{20}}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{H(r)}} - \frac{3 C_1 \kappa_{10}}{8 r_0 \kappa_{20}} \frac{H(r) - 1}{H^{3/2}(r)} \right\} \left(t - \frac{r_0 (H(r) - 1)}{C_1} \right)^2 - \ldots \tag{4.14}$$

$$H(r) = \frac{r}{r_0} + 2\beta_1 \frac{\kappa_{10}}{C_1} \left(1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right).$$

Подстановка найденного решения в (4.2) позволяет определить неизвестные κ_{10} и κ_{20}:

$$\kappa_{10} = -\frac{v_0}{1-\dfrac{v_0}{C_1}};$$

$$\kappa_{20} = \left\{ -a - \frac{v_0^2}{1-\dfrac{v_0}{C_1}} + \frac{v_0}{C_1\left(1-\dfrac{v_0}{C_1}\right)}\left(-\frac{a}{2} - \frac{v_0^2}{2r_0C_1\left(1-\dfrac{v_0}{C_1}\right)}\left(-1+\gamma+\alpha_4\right)\right)\right\} \frac{1}{1+\dfrac{2v_0}{C_1\left(1-\dfrac{v_0}{C_1}\right)}}. \tag{4.15}$$

Как видно из (4.15), учет нелинейности и ненулевая кривизна волнового фронта вместе приводят к большему влиянию на κ_{20} значения начальной скорости, чем в сходной плоской задаче, где κ_{20} определяется прежде всего величиной ускорения (3.14). Решение, подобное приведенному здесь, может быть получено для сходных по типу задач с известной заранее геометрией волнового фронта (к примеру, для сферической продольной волны). Также легко могут быть получены решения для сходящихся к $r=0$ от границы r_0 ударных волн, распространяющихся по сферически и цилиндрически симметричным телам.

V. Задача об одномерной поперечной ударной волне.

Для сравнительного анализа продольных и поперечных ударных волн рассмотрим задачу об одномерной поперечной цилиндрической волне, распространяющейся по несжимаемому нелинейно-упругому пространству от цилиндрической полости радиуса r_0. Считаем предварительные деформации отсутствующими. На r_0 с момента $t=0$ действует нагрузка, приводящая к одновременному появлению антиплоских перемещений и скручивания среды, при этом каждая точка среды движется по своей винтовой линии. В линейном приближении такое движение задается компонентами $u_z(r;t)$, $u_\varphi(r;t)$, а $u_r=0$. Нелинейная постановка задачи связана с учетом всех трех компонент перемещений, для них выполняется:

$$\begin{cases} u_r = r(1-\cos\Psi); \\ u_\varphi = r\sin\Psi; \\ u_z = u_z(r;t); \\ \Psi = \Psi(r;t), \end{cases} \tag{5.1}$$

откуда следует, что u_r имеет второй порядок малости по отношению к u_φ. Но если эту составляющую перемещений не принимать в расчет, получим некорректное решение уже на уровне выполнения условия несжимаемости $\rho=\rho_0=const$. В (5.1) $\Psi(r;t)$ - угол поворота точек среды. Связь напряжения-деформации в этой задаче задается на основании (1.3, 1.4). Ее решение определяется из уравнений движений:

$$\begin{cases} \tilde{p}_{,r} + \beta u_{z,r} u_{z,rr} + \beta r^2 \Psi_{,r} \Psi_{,rr} + (1+\beta) r \Psi_{,r}^2 + (1+\gamma) \dfrac{u_{z,r}^2}{r} = \dfrac{r \dot{\Psi}^2}{C_2^2} + \ldots \\ \Psi_{,rr} \left[1 + 3\alpha r^2 \Psi_{,r}^2 + \alpha u_{z,r}^2\right] + \dfrac{\Psi_{,r}}{r}\left[3 + 5\alpha r^2 \Psi_{,r}^2 + 3\alpha u_{z,r}^2\right] + 2\alpha \Psi_{,r} u_{z,r} u_{z,rr} = \dfrac{\ddot{\Psi}}{C_2^2} + \ldots = \dfrac{\ddot{u}_z}{C_2^2} + \ldots \\ u_{z,rr}\left[1 + 3\alpha u_{z,r}^2 + \alpha r^2 \Psi_{,r}^2\right] + \dfrac{u_{z,r}}{r}\left[1 + 3\alpha r^2 \Psi_{,r}^2 + \alpha u_{z,r}^2\right] + 2\alpha u_{z,r} r^2 \Psi_{,r} \Psi_{,rr} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\mu}; \quad \alpha = \frac{a+b+\kappa+d}{\mu}; \quad \beta = \frac{2a+2b+2\mu+\kappa}{\mu}; \quad \gamma = \frac{a}{\mu}; \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0};$$

$$\Psi_{,r} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad \dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Для описанного воздействия зададим краевые условия на r_0 в виде:

$$\begin{cases} \Psi\big|_{r_0} = \chi t + \dfrac{\eta t^2}{2}; \\ u_z\big|_{r_0} = v_0 t + \dfrac{a t^2}{2}; \quad (\chi r_0)^2 + v_0^2 \neq 0; \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

При отсутствии предварительных деформаций условия совместности приводят к существованию единственной ударной волны, поперечной по типу. Ее скорость может быть представлена рядом:

$$G = C_2\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{r^2 \kappa_1^2 + w_1^2}{C_2^2}\right)^i\right); \quad \gamma_1 = \frac{\alpha}{2}; \quad \kappa_1 = [\dot{\Psi}]; \quad w_1 = [\dot{u}_z] \quad (5.4)$$

В (5.4) приведено значение только γ_1, остальные коэффициенты ряда также зависят только от упругих модулей среды. Из (5.4) следует, если ограничиться только первым слагаемым ряда, что волна движется быстрее, если за ней есть деформации обоих типов. На Σ можно поставить условия:

$$\begin{gathered} u_z\big|_\Sigma = u_\varphi\big|_\Sigma = u_r\big|_\Sigma = 0; \\ [\dot{\Psi}]_\Sigma = -\dot{\Psi}^-\big|_\Sigma = \kappa_1; \quad [\dot{u}_z]_\Sigma = -\dot{u}_z^-\big|_\Sigma = w_1. \end{gathered} \quad (5.5)$$

Они приведены здесь для законченности постановки краевой задачи. Для лучевого метода они выполняются автоматически. В системе (5.2) последние два уравнения задают поведение поля перемещений, тогда как первое определяет функцию добавочного гидростатического давления по найденным перемещениям. Основной задачей, таким образом, становится определение функций Ψ и u_z. Для этого, как и раньше, применим лучевой метод. На его нулевом шаге из (5.2), записанных в разрывах, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \kappa_1}{\delta t} = \alpha \dfrac{\kappa_2 r_\Sigma^2 \kappa_1^2}{C_2^2} + \alpha \dfrac{w_2 \kappa_1 w_1}{C_2^2} + \dfrac{\kappa_1 C_2}{r_\Sigma} \left\{ -\dfrac{3}{2} + \alpha \dfrac{r_\Sigma^2 \kappa_1^2}{C_2^2} \right\} + \ldots \\ \dfrac{\delta w_1}{\delta t} = \alpha \dfrac{w_2 w_1^2}{C_2^2} + \alpha \dfrac{\kappa_2 \kappa_1 w_1 r_\Sigma^2}{C_2^2} + \dfrac{w_1 C_2}{r_\Sigma} \left\{ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\alpha}{2} \dfrac{w_1^2}{C_2^2} + \dfrac{3\alpha}{2} \dfrac{r_\Sigma^2 \kappa_1^2}{C_2^2} \right\} + \ldots \end{cases} \tag{5.6}$$

$$r_\Sigma = r_0 + \int_0^t G_2(\xi) d\xi.$$

Из (5.6) следует, что характеристики интенсивности волны κ_1 и w_1 влияют друг на друга и антиплоское деформирование и кручение за волной взаимозависимы. Насколько сильна эта зависимость, можно ответить в процессе решения (5.6) с применением метода разложения по малому параметру. Будем считать, что порядок малости для антиплоского деформирования и кручения одинаков. В этом случае можно принять

$$\begin{gathered} \varepsilon = \frac{\kappa_{10} r_0}{C_2}; \quad \frac{\kappa_{10} r_0}{w_{10}} \sim 1; \quad \frac{w_{10}}{\kappa_{10} r_0} = B; \quad s = \frac{C_2 t}{r_0}; \\ f = \frac{\kappa_1}{\kappa_{10}}; \quad g = \frac{w_1}{w_{10}}; \quad \kappa_1\big|_{t=0} = \kappa_{10}; \quad w_1\big|_{t=0} = w_{10}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Решая вспомогательную линеаризованную задачу, получим

$$\begin{gathered} \kappa_1 = \frac{\kappa_{10}}{\left(1 + \dfrac{C_2 t}{r_0}\right)^{3/2}}; \quad \kappa_2 = \frac{\kappa_{20}}{\left(1 + \dfrac{C_2 t}{r_0}\right)^{3/2}} - \frac{3 C_2^2 r_0^{1/2} \kappa_{10} t}{8 (r_0 + C_2 t)^{5/2}}; \\ w_1 = \frac{w_{10}}{\sqrt{1 + \dfrac{C_2 t}{r_0}}}; \quad w_2 = \frac{w_{20}}{\sqrt{1 + \dfrac{C_2 t}{r_0}}} - \frac{w_{10} C_2^2 t}{8 r_0^2 \left(1 + \dfrac{C_2 t}{r_0}\right)^{3/2}}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Далее считаем, что κ_2, w_2 приближенно задаются (5.8). Тогда, записывая (5.6) в переменных (5.7), приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\delta f}{\delta s} = \alpha f^2 \varepsilon^2 \left[\frac{A}{(1+s)^{3/2}} - \frac{3s}{8(1+s)^{5/2}} \right] (1 + s + \ldots)^2 + \alpha D B^2 \varepsilon^2 f g \left[\frac{1}{\sqrt{1+s}} - \frac{s}{8D(1+s)^{3/2}} \right] + \\ + \frac{f}{1 + s + \ldots} \left[-\frac{3}{2} + (1 + s + \ldots)^2 \varepsilon^2 f^2 \right] + \ldots \\ \frac{\delta g}{\delta s} = \alpha D \left[\frac{1}{\sqrt{1+s}} - \frac{s}{8D(1+s)^{3/2}} \right] \varepsilon^2 g^2 B^2 + \alpha A \varepsilon^2 (1 + s + \ldots)^2 g f \left[\frac{1}{(1+s)^{3/2}} - \frac{3s}{8A(1+s)^{5/2}} \right] + \\ + \frac{g}{1 + s + \ldots} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \varepsilon^2 g^2 B^2 + \frac{3\alpha}{2} (1 + s + \ldots)^2 \varepsilon^2 f^2 \right] + \ldots \\ A = \frac{\kappa_{20} r_0}{\kappa_{10} C_2} \sim 1; \quad D = \frac{w_{20} r_0}{w_{10} C_2} \sim 1. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Искомые функции представим асимптотическими рядами

$$f(s)=f_0(s)+\varepsilon^2 f_1(s)+\dots$$
$$g(s)=g_0(s)+\varepsilon^2 g_1(s)+\dots, \tag{5.10}$$

в которые, как и в (5.9), малый параметр входит только в четных степенях. Для приближения $f\approx f_0$, $g\approx g_0$ получаем разделенное решение, соответствующее линеаризованной задаче:

$$f_0=(1+s)^{-3/2};\quad g_0=(1+s)^{-1/2}. \tag{5.11}$$

Это показывает, что на расстояниях $Ct\sim r_0$ кручение и антиплоское движение мало влияют друг на друга. Их влияние проявляется на решении для f_1, g_1. Для положения волнового фронта находим поправку к линейной задаче:

$$r=r_0\left\{1+s+\gamma_1\varepsilon^2\left(1+B^2\right)\ln(1+s)\right\}+\cdots \tag{5.12}$$

Не останавливаясь на простой, но трудоемкой процедуре получения f_1, g_1, приведем окончательный результат для функций Ψ и u_z:

$$\Psi=-\kappa_{10}\left\{\frac{1}{H^{3/2}}+\left(\frac{\kappa_{10}r_0}{C_2}\right)^2\left[\alpha\left(A+B^2D-\frac{3+B^2}{8}\right)\frac{\ln H}{H^{3/2}}-\left(1+\alpha\frac{3+B^2}{8}\right)\frac{1}{H^{5/2}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{3\alpha}{4}\left(1+B^2\right)\left(\frac{\ln H}{H^{5/2}}+\frac{1}{H^{5/2}}\right)+\left(1+\alpha\frac{9+7B^2}{8}\right)\frac{1}{H^{3/2}}\right]+\dots\right\}\left(t-\frac{r_0}{C_2}(H-1)\right)- \tag{5.13}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\kappa_{20}}{H^{3/2}}-\frac{3C_2\kappa_{10}(H-1)}{8r_0H^{5/2}}\right\}\left(t-\frac{r_0}{C_2}(H-1)\right)^2+\dots$$

$$u_z=-w_{10}\left\{\frac{1}{H^{1/2}}+\left(\frac{\kappa_{10}r_0}{C_2}\right)^2\left[\alpha\left(A+B^2D-\frac{3+B^2}{8}\right)\frac{\ln H}{H^{1/2}}-\left(B^2+3\right)\frac{5\alpha}{8H^{3/2}}+\frac{R_0}{H^{1/2}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\alpha}{4H^{1/2}}\left(1+B^2\right)\left(\frac{\ln H}{H}-\frac{1}{H}\right)\right]\right\}\left(t-\frac{r_0}{C_2}(H-1)\right)^2+\dots$$

$$R_0=\frac{\alpha}{8}\left(17+7B^2\right);\quad H(r)=\frac{r}{r_0}-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\kappa_{10}r_0}{C_2}\right)^2\left(1+B^2\right)\ln\frac{r}{r_0};\quad t_\Sigma=\frac{r_0}{C_2}(H(r)-1).$$

Подстановка (5.13) в (5.3) приводит к выполнению точного условия:

$$\kappa_{10}=-\chi;\quad \kappa_{20}=-\eta;\quad w_{10}=-v_0;\quad w_{20}=-a, \tag{5.14}$$

что, по всей видимости, является характерным отличием случая поперечного деформирования от рассмотренного ранее продольного. Если в решаемой задаче есть только антиплоское движение или скручивание, то ее поле перемещений может быть также получено из (5.13).

В заключении отметим, что проведенный анализ показал, что предложенный способ построения приближенных решений в [13, 14] содержит в себе непозволительные погрешности в тех случаях, когда кривизна поверхности разрывов значительна и быстро меняется. Предложенное видоизменение в подходе к построению прифронтовых разложений решения позволяет исключить отмечаемое несоответствие.

Другое замечание связано с тем, что при изначальном использовании криволинейных систем координат (как в рассмотренном случае) следует пользоваться соответствующим обобщением [4] теории рекуррентных условий совместности [3] разрывов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-96005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. – М.: Наука, 1972. – 456 с.

2. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир, 1964. – 308 с.

3. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 232 с.

4. Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях.// Дальневосточный матем. сб. – Владивосток: Дальнаука. – 2004. Т.5. №1. С. 100–109.

5. Ахенбах Дж. Задачи о распространении упругих волн при неразрушающих испытаниях.// В кн.: Механика деформируемых твердых тел. – М.: Мир, 1983. – 346 с.

6. Бабичева Л.А., Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязко-пластических телах.// Прикл. матем. и механика. – 1973. Т. 37, вып. 1. – С. 145–155.

7. Россихин Ю.А. Удар жесткого шара по упругому полупространству.// Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 5. – С. 15–21.

8. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Применение метода лучевых рядов для исследования осесимметрических нестационарных задач динамической теории упругости.// Прикл. механика. – 1986. Т. 22, № 3. – С. 3–9.

9. Быковцев Г.И., Власова И.А. Лучевой метод пространственных задач теории идеальной пластичности.// Механика деформируемого твердого тела. – Новосибирск.: Наука, 1979. – С. 31–36.

10. Шаталов А.Г. Разрывные решения в связной задаче термоупругости.// Механика деформ. сред. Кубышевский ун-т. – 1979. – С. 85–90.

11. Rossichin Yu.A., Shitikova M.V. On the structure of waves in a nonlinear elastic medium.// Facta Univ. Ser. Mech., Autom Contr. and Rob./ Univ. Nis. – 1994. – 1, № 4. – P. 437-449.

12. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. – Минск.: УП «Технопринт», 2000. – 426 с.

13. Бестужева Н.П., Чигарев А.В. К применению марковского приближения в динамикестохастических сред.// ПММ. – 1977. – Т. 41, вып. 6. – С. 1099–1106.

14. Burenin A.A., Rossichin Yu.A., Shitikova M.V. A ray method for solving boundary value problems connected with the propagation of finite amplitude shock waves / Proc. 1993 Int. Symp. On Nonlinear Theory and its Applications. – Hawaii, December 5 – 10, 1993. – V. 3. – P. 1085–1088.

15. Буренин А.А., Россихин Ю.А. К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной.// Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 103–108.

16. Мак-Конелл А. Дж. Введение в тензорный анализ. – М.: Физматгиз, 1963. – 412 с.

17. Буренин А.А., Чернышев А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве.// Прикл. матем. и механика. – 1978. – Т. 42, вып. 4. – С. 711–717.

18. Буренин А.А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства.// Прикл. механика. – 1985. Т. 21, № 5. – С. 3–8.

19. Буренин А.А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях.// Дальневосточный матем. сб. - Владивосток: Дальнаука. – 1999. вып.8. – С. 49–72.