Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск

ДИНАМИКА ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ СО СВОБОДНЫМ ВНУТРЕННИМ ОТВЕРСТИЕМ ИЛИ ЖЕСТКОЙ ШАЙБОЙ

Немировский Ю. В., Романова Т. П.

A rigid, perfectly-plastic model of solids is applied to study the dynamic behavior of simply supported or clamped, arbitrarily shaped plates with an internal free hole or a rigid insert and with changing thickness. Equations of dynamic behavior are obtained. Operating conditions of possible mechanism of deformation are analyzed. Analytical expressions for the ultimate loads and the maximum final deflections are obtained. Numerical examples are given.

Изучение динамического поведения элементов конструкций важно для анализа рисков и прогнозирования чрезвычайных ситуаций. В работе предложена методика, которая на основе модели жесткопластического тела позволяет рассчитывать поведение криволинейной пластины переменной толщины со свободным внутренним отверстием или абсолютно жесткой шайбой под действием взрывных нагрузок. Методика может быть использована для широкого класса инженерных задач.

1. Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую пластину переменной толщины с криволинейным внешним контуром, шарнирно опертым или защемленным, и имеющую внутри отверстие, которое может быть свободным или закреплено абсолютно жесткой шайбой Z_a. Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузкой интенсивностью $P(t)$, которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени $t = 0$ с последующим быстрым его уменьшением. Пластина имеет произвольный гладкий выпуклый внешний контур L_1, заданный в параметрической форме: $x = x_1(\varphi)$, $y = y_1(\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Радиус кривизны контура L_1 равен $R(\varphi) = L^3(\varphi)/(x_1' y_1'' - x_1'' y')$, где $L(\varphi) = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)}$; $(\square)' = \partial(\square)/\partial\varphi$. Для определенности рассматриваем пластины, симметричные относительно оси x, имеющие геометрические размеры по оси y не больше, чем по оси x (рис. 1). Рассмотрим такие пластины, у которых контур отверстия L_2 находится на одинаковом расстоянии λ от внешнего контура, причем λ выбираем таким, чтобы нормали, опущенные из L_1 внутрь пластины, не пересекались между собой внутри пластины (рис. 1). Это условие выполняется, если $0 < \lambda \le \min\limits_{\varphi}[R(\varphi)]$.

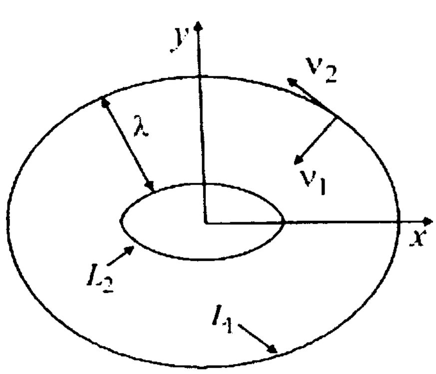

Рис. 1.

Введем криволинейную ортогональную систему координат (ν_1, ν_2), связанную с декартовой системой координат (x, y) соотношениями

$$x = x_1(\nu_2) - \nu_1 y_1'(\nu_2)/L(\nu_2);$$
$$y = y_1(\nu_2) + \nu_1 x_1'(\nu_2)/L(\nu_2).$$

Кривые $\nu_1 = \text{const}$ находятся на расстоянии ν_1 от контура L_1 и имеют радиус кривизны $\rho_1 = R(\nu_2) - \nu_1$. Прямые линии $\nu_2 = \text{const}$ перпендикулярны к контуру l (радиус кривизны $\rho_2 = \infty$) (рис. 1). Тогда уравнение контура пластины L_1 имеет вид: $\nu_1 = 0$, $0 \le \nu_2 \le 2\pi$. Уравнение контура L_2: $\nu_1 = \lambda$, $0 \le \nu_2 \le 2\pi$, а нормаль к контуру L_2 является нормалью к контуру L_1 [1, 2].

Считаем, что толщина пластины h является функцией параметра ν_1 и изменяется симметрично относительно срединной поверхности пластины. В работе предлагается модель деформирования криволинейной пластины для частного вида функции $h(\nu_1)$. Ограничения на функцию $h(\nu_1)$ обсудим подробно ниже.

Считаем, что под действием нагрузки $P(t)$ пластина деформируется в конусообразную поверхность, а точки внутреннего контура L_2 и абсолютно жесткой шайбы движутся вертикально с постоянной скоростью. Тогда угол отклонения плоскости пластины на опорном контуре не зависит от параметра ν_2. Обозначим его $\dot{\alpha}(t)$. Нормальный изгибающий момент на L_2 равен $M_{11} = \sigma_0 h^2(\lambda)(1-\delta)/4$, а на контуре L_1: $M_{11} = -\sigma_0 h^2(0)(1-\eta)/4$, где σ_0 – предел текучести материала пластины; $\delta = 1$ для свободного контура L_2 и $\delta = 0$ для случая жесткой шайбы; $\eta = 0$ при защемлении контура L_1 и $\eta = 1$ при его шарнирном опирании.

Поле скоростей прогибов $\dot{u}(\nu_1, \nu_2, t)$ пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{u}(\nu_1,\nu_2,t) = \dot{\alpha}_i(t)\nu_1; \quad 0 \le \nu_1 \le \lambda; \\ &\dot{u}(\nu_1,\nu_2,t) = \dot{\alpha}_i(t)\lambda; \quad \nu_1 > \lambda \text{ (для жесткой шайбы).} \end{aligned} \quad (0 \le \nu_2 \le 2\pi) \tag{1}$$

Главные кривизны деформируемой поверхности скоростей прогибов пластины равны:

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \nu_1^2} = 0; \quad \kappa_2 = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \dot{u}}{\partial \nu_1} = \frac{\dot{\alpha}(t)}{R(\nu_2) - \nu_1}.$$

Уравнение движения пластины получим из принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера [3]:

$$K = A - N; \tag{2}$$

$$K = \iiint\limits_{V \setminus V_a} \rho_V \ddot{u}\dot{u}\,dV + (1-\delta)\beta \iiint\limits_{V_a} \rho_V \ddot{u}\dot{u}\,dV; \qquad A = \iint\limits_{S} P(t)\dot{u}\,dS,$$

где K, A, N – мощности инерционных, внешних и внутренних сил, соответственно; V, S – объем и площадь пластины; V_a – объем шайбы; ρ_V и $\beta\rho_V$ – плотность материалов пластины и шайбы, u – прогиб; dV, dS – элементы объема и площади. Точки над символами обозначают производные по времени.

Учитывая распределение скорости прогибов (1), и выражения $dV = h(\nu_1)ds$, $ds = L(1 - \frac{\nu_1}{R})d\nu_1 d\nu_2$, будем иметь

$$K = \rho_V \ddot{\alpha}\dot{\alpha}\Sigma_1; \quad \Sigma_1 = 2\int_0^{\pi} L\Big[\int_0^{\lambda} h\nu_1^2\Big(1 - \frac{\nu_1}{R}\Big)d\nu_1 + (1-\delta)\beta\lambda^2 \int_{\lambda}^{D_l(\nu_2)} h\Big(1 - \frac{\nu_1}{R}\Big)d\nu_1\Big]d\nu_2;$$

$$A = P(t)\dot{\alpha}\Sigma_2; \quad \Sigma_2 = 2\int_0^{\pi} L\Big[\int_0^{\lambda} \nu_1\Big(1 - \frac{\nu_1}{R}\Big)d\nu_1 + (1-\delta)\lambda \int_{\lambda}^{D_l(\nu_2)} \Big(1 - \frac{\nu_1}{R}\Big)d\nu_1\Big]d\nu_2,$$

где $D_l(\nu_2) = \left|\frac{y_1(\nu_2)}{x_1'(\nu_2)}\right| L(\nu_2)$ (см. [1]).

Выражение мощности внутренних сил N представим в виде:

$$N = \sum_{i=1}^{3} N_i ,$$

где N_1, N_2, N_3 – мощности внутренних сил на контуре L_1 и внутри пластины и на контуре L_2, соответственно:

$$N_1 = (1-\eta)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{4} \oint_{L_1} \left[\dot{\theta}\right]_{L_1} dL_1 \quad (dL_1 = L d\nu_2); \qquad N_2 = \frac{\sigma_0}{4} \iint_S h^2(\nu_1)\kappa_2 ds ;$$

$$N_3 = (1-\delta)\sigma_0 \frac{h^2(\lambda)}{4} \oint_{L_2} \left[\dot{\theta}\right]_{L_2} dL_2 \qquad (dL_2 = L(1-\frac{\lambda}{R})d\nu_2),$$

где $\left[\dot{\theta}\right]_m$ – разрыв угловой скорости на линии m; dL_1, dL_2 – элементы длины линий L_1, L_2. Из (3) и того, что нормаль к линии L_1 является нормалью к контуру L_2, следует, что $\left[\dot{\theta}\right]_{L_1} = \left[\dot{\theta}\right]_{L_2} = \dot{\alpha}$. Тогда будем иметь

$$N_1 = (1-\eta)\sigma_0 \frac{h^2(0)}{2} \dot{\alpha} \int_0^{\pi} L d\nu_2 ; \qquad N_3 = (1-\delta)\sigma_0 \frac{h^2(\lambda)}{2} \dot{\alpha} \int_0^{\pi} L(1-\frac{\lambda}{R}) d\nu_2 ;$$

$$N_2 = \frac{\sigma_0}{4} \dot{\alpha} \iint_S h^2(\nu_1) \frac{1}{R(\nu_2)-\nu_1} ds = \frac{\sigma_0}{2} \dot{\alpha} (\int_0^{\pi} \frac{L}{R} d\nu_2) \int_0^{\lambda} h^2 d\nu_1 .$$

Полная мощность внутренних сил пластины N равна:

$$N = \sigma_0 \dot{\alpha} \Sigma_3 ; \qquad \Sigma_3 = \sum_{i=1}^{3} N_i / (\dot{\alpha}\sigma_0) .$$

Подставляя выражения для K, A, N в (2), получим уравнения движения пластины:

$$\rho_V \ddot{\alpha} \Sigma_1 = P(t)\Sigma_2 - \sigma_0 \Sigma_3 . \tag{4}$$

Начальные условия имеют вид:

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = 0 . \tag{5}$$

Проведем анализ деформирования пластины. Если $0 < P_{\max} \le P_0$ (“низкие” нагрузки), где P_0 – предельная нагрузка, то пластина остается в покое. Величину P_0 определим из уравнения (4) в момент начала движения $t = 0$, считая $\ddot{\alpha}(0) = 0$. Тогда имеем

$$P_0 = \sigma_0 \Sigma_3 / \Sigma_2 . \tag{5}$$

Если $P_0 < P_{\max}$, то пластина начнет движение. Уравнение (4) запишѐм в виде

$$\ddot{\alpha}(t) = F\left[P(t) - P_0\right]; \qquad F = \Sigma_2 / (\rho_V \Sigma_1) . \tag{6}$$

Начальные условия имеют вид (5). В момент времени $t = T$ нагрузка снимается, и пластина некоторое время движется по инерции.

При $0 \le t \le T$, интегрируя уравнение движения (6), будем иметь

$$\dot{\alpha}(t) = F[\int_0^t P(\tau)d\tau - P_0 t], \qquad \alpha(t) = F[\int_0^t \int_0^m P(\tau)d\tau dm - P_0 \frac{t^2}{2}] .$$

При $T < t \le t_f$ движение пластины происходит по инерции до остановки в момент t_f и описывается уравнением

$$\ddot{\alpha}(t) = -FP_0$$

с начальными условиями $\dot{\alpha}(T)$, $\alpha(T)$. Момент t_f определяется из условия

$$\dot{\alpha}(t_f)=0. \qquad (7)$$

Интегрируя уравнение движения, получим равенства

$$\dot{\alpha}(t)=\dot{\alpha}(T)-FP_0(t-T), \qquad (8)$$

$$\alpha(t)=\alpha(T)+\dot{\alpha}(T)(t-T)-FP_0(t-T)^2/2.$$

Из (7), (8) следует, что

$$t_f=(\int_0^T P(t)dt)/P_0.$$

Прогибы вычисляются из уравнений (1); максимальный остаточный прогиб будет на контуре L_2:

$$u_{\max}=\lambda F\left[(\int_0^T P(t)dt)^2/(2P_0)-\int_0^T tP(t)dt\right]. \qquad (9)$$

2. Обсудим ограничения на функцию $h(\nu_1)$, связанные с предлагаемой схемой деформирования. Эти условия можно получить, сравнивая предельную нагрузку P_0 с предельной нагрузкой для других возможных схем движения. Пластины с переменной толщиной могут деформироваться с образованием краевых пластических шарниров $\overline{L}_1$ не по периметру контура опирания, а на некотором расстоянии $\nu_1^a<\lambda$ от контура L_1 внутрь пластины; при этом область у контура пластины остается недеформированной. Уравнение контура $\overline{L}_1$ имеет вид: $\nu_1=\nu_1^a$ $(0\le\nu_2\le 2\pi)$. На контуре $\overline{L}_1$ изгибающий момент равен $M_{11}=-\sigma_0 h^2(\nu_1^a)/4$. Из (5) следует, что предельная нагрузка $\overline{P}_0$ для защемленной криволинейной пластины с контуром $\overline{L}_1$ равна $\overline{P}_0=\sigma_0\overline{\Sigma}_3/\overline{\Sigma}_2$, где

$$\overline{\Sigma}_3(\nu_1^a)=\frac{1}{2}\left[h^2(\nu_1^a)\int_0^\pi L(1-\frac{\nu_1^a}{R})d\nu_2+(1-\delta)h^2(\lambda)\int_0^\pi L(1-\frac{\lambda}{R})d\nu_2+(\int_0^\pi\frac{L}{R}d\nu_2)\int_{\nu_1^a}^{\lambda}h^2 d\nu_1\right];$$

$$\overline{\Sigma}_2(\nu_1^a)=2\int_0^\pi L[\int_{\nu_1^a}^{\lambda}\nu_1(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1]d\nu_2.$$

Если около контура L_2 толщина $h(\nu_1)$ достаточно большая, тогда в области Z_c ($\nu_1^c\le\nu_1\le\lambda$, $0\le\nu_2\le 2\pi$) изгибающий момент $M_{22}=\sigma_0 h^2(\nu_1)/4$ будет намного больше, чем в остальной части пластины. Следовательно, область Z_c деформироваться не будет. Нормальный изгибающий момент на контуре L_1^c ($\nu_1=\nu_1^c$, $0\le\nu_2\le 2\pi$) равен $M_{11}=\sigma_0 h^2(\nu_1^c)/4$. Движение пластины будет происходить при наличии двусвязной жесткой области Z_c, двигающейся поступательно со скоростью $\dot{\alpha}\nu_1^c$. Поле скоростей прогибов имеет вид:

$$\dot{u}(\nu_1,\nu_2,t)=\dot{\alpha}_i(t)\nu_1 \quad \text{для} \quad 0\le\nu_1\le\nu_1^c,\ 0\le\nu_2\le 2\pi;$$

$$\dot{u}(\nu_1,\nu_2,t)=\dot{\alpha}_i(t)\nu_1^c \quad \text{для} \quad \nu_1^c\le\nu_1,\ 0\le\nu_2\le 2\pi.$$

Определим предельную нагрузку P_0^c для такой схемы деформирования. Мощности внешних сил A^c и внутренних сил N^c будут равны:

$$A^c=P(t)[\iint\limits_{S\setminus(Z_c\cup Z_a)}\dot{\alpha}\nu_1 ds+(1-\delta)\iint\limits_{Z_a}\dot{\alpha}\nu_1^c ds+\iint\limits_{Z_c}\dot{\alpha}\nu_1^c ds]=P(t)\dot{\alpha}\Sigma_2^c;$$

$$\Sigma_2^c(\nu_1^c)=2\{\int\limits_0^{\pi}L[\int\limits_0^{\nu_1^c}\nu_1(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1]d\nu_2+$$

$$+\nu_1^c\int\limits_0^{\pi}L[\int\limits_{\nu_1^c}^{\lambda}(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1+(1-\delta)\int\limits_{\lambda}^{D_l(\nu_2)}(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1]d\nu_2\};$$

$$N^c=(1-\eta)\sigma_0\frac{h^2(0)}{4}\dot{\alpha}\oint\limits_{L_1}dL_1+\frac{\sigma_0}{4}\iint\limits_{S\setminus(Z_c\cup Z_a)}h^2(\nu_1)\kappa_2 ds+$$

$$+\sigma_0\frac{h^2(\nu_1^c)}{4}\oint\limits_{L_1^c}\left[\dot{\theta}\right]_{L_1^c}dL_1^c=\sigma_0\dot{\alpha}\Sigma_3^c;\quad (\ dL_1^c=L(1-\frac{\nu_1^c}{R})d\nu_2;\quad \left[\dot{\theta}\right]_{L_1^c}=\dot{\alpha})$$

$$\Sigma_3^c(\nu_1^c)=\frac{1}{2}\left[(1-\eta)h^2(0)\int\limits_0^{\pi}Ld\nu_2+(\int\limits_0^{\pi}\frac{L}{R}d\nu_2)\int\limits_0^{\nu_1^c}h^2 d\nu_1+h^2(\nu_1^c)\int\limits_0^{\pi}L(1-\frac{\nu_1^c}{R})d\nu_2\right].$$

Тогда $P_0^c=\sigma_0\Sigma_3^c(\nu_1^c)/\Sigma_2^c(\nu_1^c)$.

Также возможна ситуация, когда вместе с образованием краевого шарнира $\overline{L}_1$ ($\nu_1=\nu_1^a$; $0\le\nu_2\le 2\pi$) некоторая центральная часть пластины Z_c ($\nu_1^c\le\nu_1\le\lambda$, $0\le\nu_2\le 2\pi$) остается жесткой. Распределение скоростей прогибов имеет вид:

$$\dot{u}(\nu_1,\nu_2,t)=0 \quad \text{для} \quad 0\le\nu_1\le\nu_1^a,\ 0\le\nu_2\le 2\pi;$$

$$\dot{u}(\nu_1,\nu_2,t)=\dot{\alpha}_i(t)\nu_1 \quad \text{для} \quad \nu_1^a\le\nu_1\le\nu_1^c,\ 0\le\nu_2\le 2\pi;$$

$$\dot{u}(\nu_1,\nu_2,t)=\dot{\alpha}_i(t)\nu_1^c \quad \text{для} \quad \nu_1^c\le\nu_1,\ 0\le\nu_2\le 2\pi.$$

Определим предельную нагрузку $\overline{P}_0^c$ для такой схемы деформирования. Мощность внешних сил $\overline{A}^c$ равна

$$\overline{A}^c=P(t)\dot{\alpha}\overline{\Sigma}_2^c;$$

$$\Sigma_2^c=2\{\int\limits_0^{\pi}L[\int\limits_{\nu_1^a}^{\nu_1^c}\nu_1(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1]d\nu_2+$$

$$+\nu_1^c\int\limits_0^{\pi}L[\int\limits_{\nu_1^c}^{\lambda}(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1+(1-\delta)\int\limits_{\lambda}^{D_l(\nu_2)}(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1]d\nu_2\}.$$

Мощность внутренних сил $\overline{N}^c$ равна

$$\overline{N}^c=\sigma_0\dot{\alpha}\overline{\Sigma}_3^c;\quad \overline{\Sigma}_3^c=\frac{1}{2}\left[(1-\eta)h^2(\nu_1^a)\int\limits_0^{\pi}L(1-\frac{\nu_1^a}{R})d\nu_2+\right.$$

$$\left.+(\int\limits_0^{\pi}\frac{L}{R}d\nu_2)\int\limits_{\nu_1^a}^{\nu_1^c}h^2 d\nu_1+h^2(\nu_1^c)\int\limits_0^{\pi}L(1-\frac{\nu_1^c}{R})d\nu_2\right].$$

Тогда $\overline{P}_0^c=\sigma_0\overline{\Sigma}_3^c/\overline{\Sigma}_2^c$.

Если $P_0<\min(P_0^c,\overline{P}_0,\overline{P}_0^c)$, то пластина будет деформироваться по схеме, рассмотренной в части **1**.

Если выполняется неравенство

$$\overline{P}_0<\min(P_0,P_0^c,\overline{P}_0^c), \tag{10}$$

то пластина деформируется только в области ($\nu_1^a \le \nu_1 \le \lambda$; $0 \le \nu_2 \le 2\pi$); при этом величина ν_1^a соответствует минимальному значению $\bar{P}_0$, для которого выполняется неравенство (10). Анализ поведения в рассматриваемом случае подобен проведенному в части **1** анализу, но с заменой контура L_1 на защемленный контур $\bar{L}_1$. Движение описывается уравнением (6) с начальными условиями (5) при замене F на $\bar{F}$: $\bar{F} = \bar{\Sigma}_2/(\rho_V \bar{\Sigma}_1)$, где

$$\bar{\Sigma}_1 = 2\int_0^\pi L[\int_{\nu_1^a}^{\lambda} h\nu_1^2(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1 + (1-\delta)\beta\lambda^2 \int_{\lambda}^{D_l(\nu_2)} h\nu_1^2(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1]d\nu_2 .$$

Максимальный остаточный прогиб будет на контуре L_2, он вычисляется по формуле (9) при замене F на $\bar{F}$ и λ на $\lambda - \nu_1^a$.

Если $h(\nu_1)$, ν_1^c таковы, что $P_0^c < \min(P_0, \bar{P}_0, \bar{P}_0^c)$, то следует рассматривать задачу о движении криволинейной пластины переменной толщины с жесткой шайбой сплошной или со свободным отверстием. В случае $h(\nu_1) = \text{const}$ и сплошной шайбы такая задача подробно рассмотрена в [4].

3. В качестве примера рассмотрим эллиптическую пластину со свободным отверстием. Контур L_1 задан уравнениями: $x = a\cos\varphi$; $y = \gamma a \sin\varphi$ ($0 \le \varphi \le 2\pi$); $\gamma \le 1$. Тогда $R(\varphi) = L^3(\varphi)/(\gamma a^2)$; $L(\varphi) = a\sqrt{\sin^2\varphi + \gamma^2\cos^2\varphi}$. Криволинейная ортогональная система координат (ν_1, φ) связана с декартовой системой координат (x, y) соотношениями

$$x = a[1 - \nu_1\gamma / L(\varphi)]\cos\varphi; \qquad y = a[\gamma - \nu_1 / L(\varphi)]\sin\varphi .$$

Величина λ, характеризующая размер свободного отверстия равна $\lambda = \gamma_1 a$; $\gamma_1 \le \gamma^2$. Тогда

$$\Sigma_1 = 2\int_0^\pi L[\int_0^{\gamma_1 a} h\nu_1^2(1-\frac{\nu_1}{R})d\nu_1]d\varphi; \qquad \Sigma_2 = \frac{(\gamma_1 a)^2}{3}[3\int_0^\pi L d\varphi - 2\pi\gamma_1 a];$$

$$\Sigma_3 = \frac{1}{2}[(1-\eta)h^2(0)\int_0^\pi L d\varphi + \pi\int_0^{\gamma_1 a} h^2(\nu_1)d\nu_1].$$

Учитывая, что $\int_0^\pi L d\varphi \approx \frac{\pi a}{4}\left[3(\gamma+1) - 2\sqrt{\gamma}\right]$ (см. [2]), и обозначение $M_0 = \sigma_0 h^2(0)/4$, получим выражение для предельной нагрузки:

$$P_0 = \frac{6M_0}{a^2}\frac{(1-\eta)\left[3(\gamma+1) - 2\sqrt{\gamma}\right] + \frac{4}{ah^2(0)}\int_0^{\gamma_1 a} h^2(\nu_1)d\nu_1}{\gamma_1^2\{3\left[3(\gamma+1) - 2\sqrt{\gamma}\right] - 8\gamma_1\}} .$$

Зависимость безразмерной предельной нагрузки $p_0 = P_0 a^2 / M_0$ от параметра γ_1 приведена на рис. 2. Кривая *1* соответствует случаю: $\gamma = 1$ (кольцевая пластина); $h(\nu_1) = h(0)$; $\eta = 1$ (шарнирное опирание). Кривая *2* – случаю: $\gamma = 1$; $h(\nu_1) = h(0)[1 + \nu_1/(3\gamma_1 a)]$; $\eta = 1$. Кривая *3* – случаю: $\gamma = 1$; $h(\nu_1) = h(0)[5/4 - \nu_1/(4\gamma_1 a)]$; $\eta = 1$. Кривая *4* – случаю: $\gamma = 1$; $h(\nu_1) = h(0)[1 + \nu_1/(3\gamma_1 a)]$; $\eta = 0$ (защемление). Кривая *5* – случаю: $\gamma = 0{,}7$; $h(\nu_1) = h(0)$; $\eta = 1$. Кривая *6* соответствует случаю: $\gamma = 0{,}7$; $h(\nu_1) = h(0)[1 + \nu_1/(3\gamma_1 a)]$; $\eta = 1$. Видно, что для кольцевой пластины ($\gamma = 1$, кривые *1* – *4*) предельная нагрузка при увеличении размера отверстия сначала несколько снижается, а затем увеличивается. Это свойство для шарнирно опертой квадратной пластины постоянной толщины с квадратным свободным отверстием отмечено в [5].

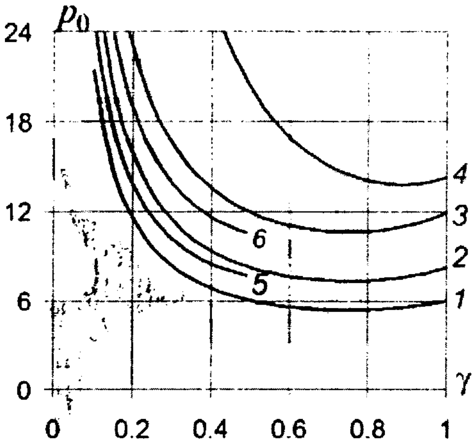

Рис. 2.

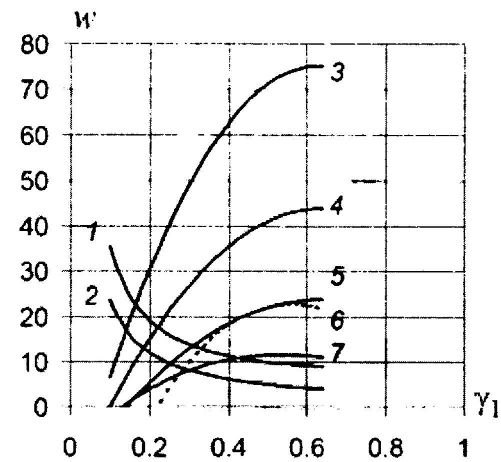

Рис. 3.

Для рассматриваемой шарнирно опертой пластины с $\gamma = 0{,}8$ зависимость безразмерного максимального остаточного прогиба $w = u_{max} a^2 \rho_V h(0)/(M_0 T^2)$ от параметра γ_1 ($0{,}1 < \gamma_1 \le \gamma^2 = 0{,}64$) при воздействии нагрузки "прямоугольного" вида $[P(t) = p_{max} M_0 / a^2$ при $0 \le t \le T$, $P(t) = 0$ при $t > T]$ приведена на рис. 3. Случай $p_{max} = 2p_0$ изображают кривые *1* и *2* при $h(\nu_1) = h(0)$ и $h(\nu_1) = h(0)[1 + \nu_1/(4\gamma_1 a)]$, соответственно. Случаю $p_{max} = 24$ соответствуют кривые: *3* – $h(\nu_1) = h(0)[1 - \nu_1/(4\gamma_1 a)]$; *4* – $h(\nu_1) = h(0)$; *5* – $h(\nu_1) = h(0)(-\nu_1^2 + \gamma_1 \nu_1 a + \gamma_1^2 a^2)/(\gamma_1^2 a^2)$; *6* – $h(\nu_1) = h(0)[5/4 - \nu_1/(4\gamma_1 a)]$; 7 – $h(\nu_1) = h(0)[1 + \nu_1/(4\gamma_1 a)]$.

Из рисунков видно, что переменная толщина существенно влияет как на величины предельных нагрузок пластины, так и на остаточные прогибы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00161-а; 06-08-08035-офи), Президиума СО РАН (Постановление № 54 от 09.02.2006, проект № 2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, № 12. – С. 68 – 78.

2. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин // ПМТФ. – 2002. – Т. 43, № 2. – С. 142 – 154.

3. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

4. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое деформирование криволинейной пластины с жесткой вставкой // ПМТФ. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 126 – 138.

5. Ржаницын А. Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1983. – 288 с.