Белорусский государственный университет, Минск

ФУНКЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ДЛЯ ФОРМУЛИРОВКИ РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Босяков С.М., Журавков М.А., Медведев Д.Г.

In the present article functions of the user developed are submitted on the basis of system Mathematica and intended for generation of parities of the equations of dynamic balance, the equation of deformations and the basic settlement equations isotropic environments in curvilinear orthogonal coordinates. Examples of application of functions for the formulation of the various settlement equations in the Cartesian, cylindrical and spherical systems of coordinates are resulted.

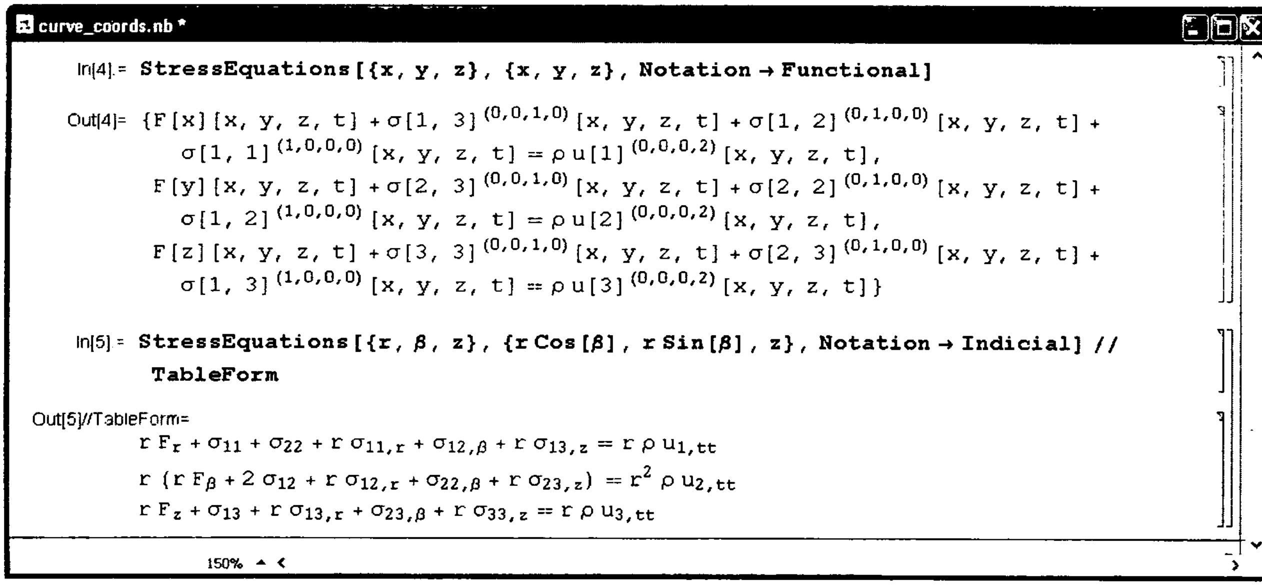
При изучении теории упругости зачастую возникает необходимость использования большого количества литературных источников (учебных пособий, монографий, научных и учебно-методических статей), что объясняется сложностью, громоздкостью соответствующих задач и разнообразием методов их решения [1]. Поэтому представляется целесообразным применение функциональных возможностей современных систем компьютерной математики для разработки функций, позволяющих пользователю задавать соотношения математической теории упругости и выполнять их преобразования. В настоящей работе представлены функции, разработанные на базе системы *Mathematica* и позволяющие формулировать уравнения динамического равновесия, уравнения деформаций, а также основные расчетные уравнения теории упругости изотропной среды в различных системах ортогональных криволинейных координат.

Дифференциальные уравнения движения, записанные в компонентах тензора напряжения в ортогональных криволинейных координатах, имеют следующий вид [1]:

$$\frac{\partial(H_h\Delta)}{\partial\alpha_h}+\sum_{v=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_v}\left(\frac{V_h\Delta g_h}{\sqrt{g_v g_h}}\right)-\frac{1}{2}\frac{V_v\Delta}{g_v}\frac{\partial g_v}{\partial\alpha_h}\right)+$$
$$+H_h\Delta\sqrt{g_h}=\rho\Delta\sqrt{g_h}\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2},\ h=\overline{1,3}, \tag{1}$$

где α_h - ортогональные криволинейные координаты (взаимно перпендикулярные поверхности), H_h, V_v - нормальные напряжения, V_h - касательные напряжения, $\Delta=\sqrt{g_1 g_2 g_3}$ - коэффициент единицы объема, $g_h=\left(\frac{\partial X}{\partial\alpha_h}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial\alpha_h}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial\alpha_h}\right)^2$ - коэффициенты первой квадратичной формы, u_h - перемещения в направлении криволинейных координат, ρ - плотность, H_h - массовая сила, отнесенная к единице объема в направлении координаты α_h.

С использованием уравнений (1) разработана функция `StressEquations` [{α1,α2,α3},{X,Y,Z},opt], позволяющая записать уравнения динамического равновесия в любой системе ортогональных криволинейных координат. В качестве аргументов этой функции следует указать список обозначений {α1,α2,α3} для криволинейных координат, а также список {X,Y,Z} выражений для первой квадратичной формы. В качестве необязательного входного параметра opt выступает опция `Notation`, указывающая на форму представления результата. В случае если `Notation` принимает значение `Functional` (значение, принятое по умолчанию), форма записи уравнений является функциональной (стандартная форма записи выражений [2]); если Notation→Indicial, форма записи результата является индексированной. На рис. 1 приведены динамические уравнения равновесия в прямоугольной ($\alpha_1 = x, \alpha_2 = y, \alpha_3 = z$ и $X = x, Y = y, Z = z$) и сферической ($\alpha_1 = r, \alpha_2 = \beta, \alpha_3 = z$ и $X = r\cos\beta, Y = r\sin\beta, Z = z$) системах координат, полученные с помощью функции StressEquations (массовые силы здесь и далее обозначены F).



```
curve_coords.nb *

In[4]:= StressEquations[{x, y, z}, {x, y, z}, Notation → Functional]

Out[4]= {F[x][x, y, z, t] + σ[1, 3]^(0,0,1,0)[x, y, z, t] + σ[1, 2]^(0,1,0,0)[x, y, z, t] +
    σ[1, 1]^(1,0,0,0)[x, y, z, t] == ρ u[1]^(0,0,0,2)[x, y, z, t],
  F[y][x, y, z, t] + σ[2, 3]^(0,0,1,0)[x, y, z, t] + σ[2, 2]^(0,1,0,0)[x, y, z, t] +
    σ[1, 2]^(1,0,0,0)[x, y, z, t] == ρ u[2]^(0,0,0,2)[x, y, z, t],
  F[z][x, y, z, t] + σ[3, 3]^(0,0,1,0)[x, y, z, t] + σ[2, 3]^(0,1,0,0)[x, y, z, t] +
    σ[1, 3]^(1,0,0,0)[x, y, z, t] == ρ u[3]^(0,0,0,2)[x, y, z, t]}

In[5]:= StressEquations[{r, β, z}, {r Cos[β], r Sin[β], z}, Notation → Indicial] //
  TableForm

Out[5]//TableForm=
  r F_r + σ_11 + σ_22 + r σ_11,r + σ_12,β + r σ_13,z == r ρ u_1,tt
  r (r F_β + 2 σ_12 + r σ_12,r + σ_22,β + r σ_23,z) == r^2 ρ u_2,tt
  r F_z + σ_13 + r σ_13,r + σ_23,β + r σ_33,z == r ρ u_3,tt

150%
```

Рис. 1. Результаты применения функции StressEquations

Для формулировки компонент тензора деформаций, объемного расширения и компонент элементарного вращения в криволинейных ортогональных координатах разработаны функции StrainComponents, Expansion и RotationComponents соответственно. При этом использованы следующие определяющие соотношения [1]:

$$e_{hh} = \frac{1}{\sqrt{g_h}} \frac{\partial u_h}{\partial \alpha_h} + \sum_{v=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{g_h g_v}} \frac{\partial \sqrt{g_h}}{\partial \alpha_v} u_v,$$

$$e_{hv} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g_h}{g_v}} \frac{\partial}{\partial \alpha_v}\left(\frac{u_h}{\sqrt{g_h}} \right) + \sqrt{\frac{g_v}{g_h}} \frac{\partial}{\partial \alpha_h}\left(\frac{u_v}{\sqrt{g_v}} \right) \right),$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sqrt{g_2 g_3} u_1\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\sqrt{g_1 g_3} u_2\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\sqrt{g_1 g_2} u_3\right) \right),$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{g_2 g_3}}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\sqrt{g_3} u_3\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\sqrt{g_2} u_2\right) \right),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{g_1 g_3}}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\sqrt{g_1} u_1\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sqrt{g_3} u_3\right) \right),$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2\sqrt{g_1 g_2}}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sqrt{g_2} u_2\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\sqrt{g_1} u_1\right) \right).$$

Здесь e_{hh}, e_{hv} - компоненты тензора деформаций, θ - объемное расширение, ω_h - компоненты объемного вращения, $h, v = \overline{1,3}$.

На рис. 2 приведены компоненты тензора деформаций и компоненты объемного вращения, записанные в сферической системе координат ($\alpha_1 = r, \alpha_2 = \alpha, \alpha_3 = \beta$ и $X = r\cos\alpha\sin\beta, Y = r\sin\alpha\sin\beta, Z = r\cos\beta$) с помощью функций `StrainComponents` и `RotationComponents` соответственно.

curve_coords.nb *

```
In[13]:= StrainComponents[{r, α, β},
           {r Cos[α] Sin[β], r Sin[α] Sin[β], r Cos[β]}, Notation → Indicial]
```

Out[13]= $\Big\{\epsilon_{11} \to u_{1,r},\ \epsilon_{22} \to \dfrac{u_1 + \mathrm{Cot}[\beta]\, u_3 + \mathrm{Csc}[\beta]\, u_{2,\alpha}}{r},$
$\epsilon_{33} \to \dfrac{u_1 + u_{3,\beta}}{r},\ \epsilon_{12} \to \dfrac{-u_2 + \mathrm{Csc}[\beta]\, u_{1,\alpha} + r\, u_{2,r}}{2\, r},$
$\epsilon_{13} \to \dfrac{-u_3 + u_{1,\beta} + r\, u_{3,r}}{2\, r},\ \epsilon_{23} \to \dfrac{-\mathrm{Cot}[\beta]\, u_2 + u_{2,\beta} + \mathrm{Csc}[\beta]\, u_{3,\alpha}}{2\, r}\Big\}$

```
In[12]:= RotationComponents[{r, α, β},
           {r Cos[α] Sin[β], r Sin[α] Sin[β], r Cos[β]}]
```

Out[12]= $\Big\{\omega[1][r, \alpha, \beta, t] \to$
$-\dfrac{1}{2\, r}\big(\mathrm{Cot}[\beta]\, u[2][r, \alpha, \beta, t] + u[2]^{(0,0,1,0)}[r, \alpha, \beta, t] -$
$\mathrm{Csc}[\beta]\, u[3]^{(0,1,0,0)}[r, \alpha, \beta, t]\big),$
$\omega[2][r, \alpha, \beta, t] \to -\dfrac{1}{2\, r}\big(u[3][r, \alpha, \beta, t] -$
$u[1]^{(0,0,1,0)}[r, \alpha, \beta, t] + r\, u[3]^{(1,0,0,0)}[r, \alpha, \beta, t]\big),$
$\omega[3][r, \alpha, \beta, t] \to \dfrac{1}{2\, r^2}\big(\mathrm{Csc}[\beta]\, (u[2][r, \alpha, \beta, t] -$
$\mathrm{Csc}[\beta]\, u[1]^{(0,1,0,0)}[r, \alpha, \beta, t] + r\, u[2]^{(1,0,0,0)}[r, \alpha, \beta, t])\big)\Big\}$

150%

Рис. 2. Результаты применения функций
`StrainComponents` *и* `RotationComponents`

Отметим, что входными параметрами этих функций, так же как и в случае функции `StressEquations`, являются списки $\{\alpha1, \alpha2, \alpha3\}$, $\{X, Y, Z\}$ и опция `Notation`.

Для формулировки основных уравнений теории упругости, в частности обратной формы закона Гука и дифференциальных уравнений движения в перемещениях, разработаны функции `StressComponents` и `EquationsOfDisplacements` соответственно (аргументы этих функций имеют тот же вид, что и у функций описанные выше). При их создании применены следующие выражения [1]:

$$H_h = \lambda\theta + 2Ge_{hh},\ H_v = 2Ge_{hv},$$

$$(\lambda + 2G)\sqrt{\frac{1}{g_1}}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} - \frac{G\omega_1}{4} + H_1 = \rho\Delta\sqrt{\frac{g_1}{g_2 g_3}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + 2G)\sqrt{\frac{1}{g_2}}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2} - \frac{G\omega_2}{4} + H_2 = \rho\Delta\sqrt{\frac{g_2}{g_1 g_3}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + 2G)\sqrt{\frac{1}{g_3}}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_3} - \frac{G\omega_4}{4} + H_3 = \rho\Delta\sqrt{\frac{g_3}{g_1 g_2}}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

где λ - коснтанта Ламе, G - модуль сдвига.

Использование функции `EquationsOfDisplacements` для генерации системы уравнений движения в случае прямоугольных координат продемонстрировано на рис. 3.

```
curve_coords.nb *

In[12]:= EquationsOfDisplacements[{x, y, z}, {x, y, z},
           Notation → Indicial] // Simplify

Out[12]= {Fx + (2 G + λ) u1,x x + G u1,y y + G u1,z z +
            G u2,x y + λ u2,x y + G u3,x z + λ u3,x z == ρ u1,t t,
          Fy + (G + λ) u1,x y + G u2,x x + 2 G u2,y y + λ u2,y y +
            G u2,z z + G u3,y z + λ u3,y z == ρ u2,t t,
          Fz + (G + λ) u1,x z + G u2,y z + λ u2,y z + G u3,x x +
            G u3,y y + 2 G u3,z z + λ u3,z z == ρ u3,t t}

150%
```

Рис. 3. Результат применения функции `EquationsOfDisplacements`

Из рисунков 1 - 3 видно, что каждая из переменных является функцией криволинейных ортогональных координат $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$ и времени t, что позволяет использовать результаты выше описанных собственных функции в различных преобразованиях, связанных с дифференцированием, интегрированием и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рекач В.Г. Руководство к решению задач теории упругости. – М.: Высш. школа, 1977. - 216 с.

2. Wolfram, St. The Mathematica Book. Fourth Edition. - Cambridge : Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999. - 1470 pp.