

УДК 532.6:537.84

В. Г. Баштовой, А. Г. Рекс, Е. М. Тайц

НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСПАД ТОНКОГО СЛОЯ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Настоящая работа является продолжением исследований устойчивости свободной поверхности тонких слоев магнитной жидкости во внешнем магнитном поле в приближении «мелкой воды» [1, 2] и посвящена разработке аналитического подхода к изучению динамики развития неустойчивости и формы свободной поверхности.

В работе получено нелинейное уравнение для определения формы свободной поверхности, на основе анализа которого сделаны выводы о возможности существования гистерезиса формы свободной поверхности, образования сателлитов и распада тонких слоев магнитной жидкости.

Задача считается двумерной. Для цилиндрического слоя, покрывающего проводник с током [3], это соответствует рассмотрению осесимметричных возмущений, для плоского слоя [4] — развитию неустойчивости в виде валов с осью, параллельной тангенциальной компоненте магнитного поля.

Пренебрегая вязкостью магнитной жидкости, из уравнения неразрывности и граничного условия на твердой поверхности для потенциала скорости φ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-1} = 0$$

в рамках приближения «мелкой воды» можно получить выражение [1]

$$\varphi(x, z, t) = f(x, t) - (z^2/2 + z) \partial^2 f / \partial x^2,$$

где x, z — координаты соответственно вдоль и поперек свободной поверхности. Неизвестные функции $f(x, t)$ и отклонение формы свободной поверхности от невозмущенной $\xi(x, t)$ можно получить из граничных условий на свободной поверхности $z = \xi(x, t)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \varphi \nabla \xi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(t, \xi, \dots) = 0.$$

Второе уравнение представляет собой граничное условие для давления. Функция F зависит от распределения магнитного поля, коэффициента поверхностного натяжения и т. п. Пренебрегая нелинейными слагаемыми, в которые входят производные f и ξ , получаем систему уравнений

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + F(t, \xi, \dots) = 0,$$

откуда, исключив $f(x, t)$ и выделив линейную и нелинейную по ξ части F , можно прийти к следующему уравнению для $\xi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi_{\text{л}} \left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \dots \right) + \Phi_{\text{н}} \left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \dots \right) \right] = 0, \quad (1)$$

где $\Phi_{\text{л}}(\xi, \dots)$ и $\Phi_{\text{н}}(\xi, \dots)$ — соответственно линейная и нелинейная функции ξ и ее производных по x .

Поскольку длина волны считается большой, в нелинейной части (1) можно положить $\Phi_n = A\xi^2$, где A — некоторая постоянная, определяемая геометрией системы и распределением магнитного поля в ней. В случае, например, плоской двухслойной системы из магнитной и немагнитной жидкостей (толщины h_1 и h_2 , плотности ρ_1 и ρ_2 соответственно), расположенной горизонтально и ограниченной стенками с бесконечной магнитной проницаемостью, выражение для A имеет вид [1]

$$A = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 \mu^2 (\mu - 1) M_0^2 h_1}{(\rho_1 - \lambda_2) g (h_1 + \mu h_2)^2}.$$

Для каждой конкретной задачи A можно найти, определив решение уравнений магнитного поля и подставив его в граничные условия на свободной поверхности.

Среди возможных возмущений свободной поверхности будем рассматривать только периодические по x и искать решение (1) в виде ряда

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos knx, \quad (2)$$

где $k = 2\pi/\Lambda$ — волновое число, $f_n(t)$ — амплитуда n -й моды.

Подставив (2) в (1), после несложных преобразований получим систему уравнений для определения $f_n(t)$:

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \omega^2(nk) f_n + Ak^2 n \sum_{m=1}^{\infty} m f_m (f_{m+n} - f_{|m-n|}) = 0, \quad (3)$$

где $\omega(k)$ — частота, которая может быть определена из линейного дисперсионного уравнения, т. е. из линеаризованного уравнения (1), в котором полагают $\xi \sim e^{i\omega t} \cos kx$.

При возрастании напряженности магнитного поля до критического значения при $k_{кр} \neq 0$ неустойчивой становится только первая мода. Так как неустойчивая мода подчиняет себе устойчивые, то, ограничиваясь рассмотрением только f_1 и f_2 , из (3) получаем нелинейное уравнение для определения f_1 :

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \omega^2(k) f_1 - \frac{2A^2 k^4}{\omega^2(2k)} f_1^3 = 0. \quad (4)$$

Если начальная амплитуда возмущений мала ($f_1(0) = \varepsilon \ll 1$), то в течение небольшого промежутка времени можно считать, что $f_1 \approx \varepsilon \exp(\Omega t)$. Тогда из (4) получаем выражение для Ω :

$$\Omega^2 = -\omega^2(k) + \frac{2A^2 k^4}{\omega^2(2k)} \varepsilon^2. \quad (5)$$

Порог неустойчивости определяется критическими значениями описывающих задачу параметров $k_{кр}$, $S_{кр}$ (S — критерий устойчивости поверхности), которые могут быть получены из линейной теории. При $k = k_{кр}$ и $\varepsilon > 0$ из (5) и $\omega^2(k_{кр}) = 0$ следует, что $\Omega^2 > 0$, т. е. при критическом значении поля амплитуда сколь угодно малого возмущения возрастает. При $S < S_{кр}$ из линейной теории следует устойчивость невозмущенной поверхности. Нелинейная теория позволяет рассмотреть вопрос об устойчивости возмущенной поверхности.

Будем считать, что дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2(k) = \alpha(k) - (S - S_{кр}) \psi(k),$$

Тип жидкости	Намагниченность насыщения, кА/м	Плотность, кг/м ³	Коэффициент поверхностного натяжения, Н/м	Среда, граничащая с магнитной жидкостью
МК-23	22,9	1147	0,012	Глицерин
МК-50	50,0	1516	0,027	Воздух

Примечание. Для обоих типов жидкости феррофаза — магнетит; жидкость-носитель — керосин.

т. е. $\omega^2(k)$ пропорционально отклонению критерия устойчивости от критического значения. Тогда условие неустойчивости поверхности $\xi(0, x) = \epsilon \cos kx$ при $k \approx k_{кр}$ и $S \approx S_{кр}$ получаем из условия $\Omega^2 > 0$:

$$S > S^*_{кр} \approx S_{кр} - \frac{2A^2 k_{кр}^4 \epsilon^2}{\omega^2(2k_{кр}) \psi(k_{кр})}. \quad (6)$$

Здесь $S^*_{кр}$ — критическое значение критерия устойчивости S для первоначально искривленной поверхности. Таким образом, из $S^*_{кр} < S_{кр}$ при $\epsilon > 0$ следует, что начальное возмущение уменьшает критическое значение поля.

Приведенный анализ свидетельствует о возможности существования гистерезиса формы свободной поверхности магнитной жидкости, предсказанной еще в [5], а именно, из (5) и (6) следует, что при возрастании поля от нуля до критического значения форма поверхности не меняется ($\xi \equiv 0$). При дальнейшем увеличении поля эта поверхность становится неустойчивой и развивается некоторая структура с конечной амплитудой. Если после этого поле начинает уменьшаться, то при переходе через критическое значение $S_{кр}$ амплитуда не уменьшается до нуля, так как критическое значение критерия устойчивости возмущенной поверхности $S^*_{кр}$ меньше, чем невозмущенной. При дальнейшем уменьшении поля поверхность вновь станет невозмущенной. Оценить значение поля, при котором это произойдет, можно, положив в (6) $\epsilon = 1$. Аналогичные результаты получены численно в [6].

Амплитудные характеристики неустойчивости поверхности плоского слоя магнитной жидкости экспериментально исследованы в однородном магнитном поле, нормальном к поверхности. Использована магнитная жидкость МК-50; ее основные физические свойства приведены в таблице. В экспериментах источником однородного магнитного поля служили катушки Гельмгольца. Методика эксперимента заключалась в измерении отклонения поверхности жидкости от равновесного положения при квазистатическом изменении напряженности поля в закритической области вплоть до нарушения сплошности — разрыва слоя на отдельно стоящие на подложке конусообразные пики.

На рис. 1 представлена зависимость амплитуды установившейся формы поверхности слоя магнитной жидкости от критерия неустойчи-

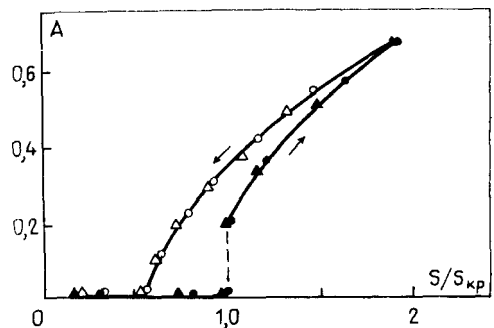


Рис. 1. Зависимости амплитуды возмущений поверхности плоского слоя магнитной жидкости от параметра надкритичности поля $S/S_{кр}$. Зачерненные значки показывают увеличение поля, светлые — его уменьшение. $h = 5$ (▲, ●) и 10 мм (○, △).

ности $S = \mu_0 M^2 / \sqrt{\rho \delta \sigma}$. Амплитуда безразмерна по толщине слоя h . Длина волны развившейся неустойчивости в данном случае равна 11,4 мм (диаметр кюветы с жидкостью — 95 мм). Рисунок характеризует наличие гистерезиса формы поверхности слоя жидкости — ее рельефность исчезает в полях, меньших критических значений ($S/S_{кр} = 0,55$), что качественно соответствует теоретическим результатам.

Описанный гистерезис формы свободной поверхности характерен для плоских слоев магнитной жидкости, не граничащих с ферромагнитной средой.

Для тонкого цилиндрического слоя, покрывающего проводник с током, или тонкой двухслойной системы из магнитной и немагнитной жидкостей, находящихся между ферромагнитными стенками, гистерезис формы свободной поверхности отсутствует. Дисперсионное уравнение в этих случаях имеет вид

$$\omega^2(k) = k^2 [k^2 - (S - S_{кр})], \quad (7)$$

откуда следует, что волновое число наиболее опасных возмущений k_0 определяется выражением $k_0 = \sqrt{\frac{1}{2} (S - S_{кр})}$.

Таким образом, $k_0 \rightarrow 0$ при $S \rightarrow S_{кр}$ и, если при медленном изменении поля длина волны возмущений равна $2\pi/k_0$, то при $S \rightarrow S_{кр}$ уравнения (3) преобразуются к виду $d^2 f_n / dt^2 = 0$, а поверхность стремится к равновесной. Если возмущение создано некоторым внешним воздействием, так что $k > k_0$, $\omega^2(k) > 0$, то, так как $\omega^2 \sim k^4$, а нелинейный член пропорционален k^2 , получаем $d^2 f_n / dt^2 < 0$, и, следовательно, поверхность стремится перейти в равновесное состояние. Это говорит о том, что для каждого значения S существует одно вполне определенное состояние поверхности: при $S \leq S_{кр}$ имеем $\xi \equiv 0$, при $S > S_{кр}$ у функции $\xi(x)$ есть период $2\pi/k_0$. Однозначность зависимости формы поверхности от S говорит об отсутствии гистерезиса.

Экспериментально цилиндрический слой магнитной жидкости создавался в неоднородном магнитном поле цилиндрического проводника с током. В условиях гидроневесомости магнитная жидкость располагается неподвижным цилиндрическим слоем радиуса a . Устойчивость этого слоя жидкости определяется конкурирующим действием объемной магнитной силы и силы поверхностного натяжения. Тангенциальность магнитного поля к поверхности жидкости обуславливает отсутствие магнитного скачка давления на ней и магнитного механизма возникновения неустойчивости свободной поверхности.

Неустойчивость цилиндрического слоя магнитной жидкости имеет пороговый характер и характеризуется магнитным числом Бонда $S \equiv \equiv \text{Bo}_m = \mu_0 M |\nabla H| a^2 / \sigma$. Если $\text{Bo}_m > 1$, то слой устойчив, при $\text{Bo}_m < 1$ развивается неустойчивость, в результате чего цилиндрический слой распадается на отдельные капли, располагающиеся вокруг проводника, и число капель определяется величиной числа Bo_m .

В экспериментах использовалась также магнитная жидкость МК-23 (см. табл.). Гидроневесомость создавалась с помощью водного раствора глицерина, плотность которого равна плотности магнитной жидкости.

Показано, что конфигурация распавшегося слоя магнитной жидкости, соответствующая заданному промежуточному числу Bo'_m , лежащему в пределах интервала $0 < \text{Bo}'_m < 1$, не зависит от характера изменения числа Бонда. В эксперименте изменение Bo_m определялось соответствующим изменением тока в проводнике. Промежуточное значение Bo'_m можно получить двумя способами (рис. 2). Первый способ состоит в полном выключении тока I ($\text{Bo}_m \rightarrow 0$) и затем через некоторый промежуток времени повторном включении его со значением I' , которому соответствует промежуточное значение числа Бонда Bo'_m

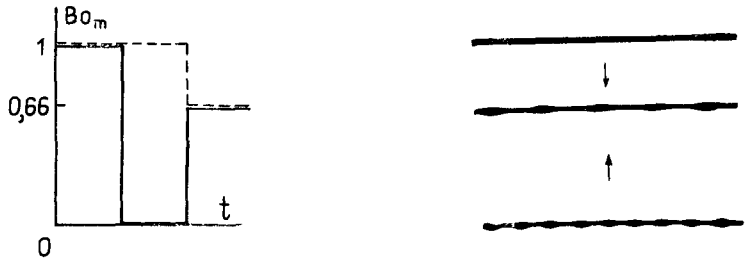


Рис. 2. Закон изменения Bo_m во времени (слева) и изображение слоя при соответствующих значениях Bo_m (справа). Пояснения в тексте.

(сплошная линия на рис. 2). По второму способу число Бонда изменяется сразу скачком от закритического значения ($Bo_m > 1$) до промежуточного Bo'_m , и в результате равновесный цилиндрический слой сразу распадается на число капель, соответствующее данному Bo'_m . На рис. 2 штриховая линия соответствует числу Бонда, обеспечивающему распад равновесного слоя при $Bo'_m = 0,66$.

Факт однозначности капельной формы цилиндрического слоя иллюстрирует рис. 3, на котором приведены зависимости длины волны развившегося возмущения $\lambda^*/(2\pi a)$ от чисел Bo_m , полученных двумя способами. При первом способе задания закона изменения Bo_m цилиндрический слой вначале распадается на максимальное число капель. Образовавшаяся конфигурация слоя является начальной перед дальнейшим изменением Bo_m . Если Bo_m увеличивается скачком до некоторого значения $Bo'_m < 1$, происходит перестройка конфигурации слоя за счет перетекания жидкости между каплями, так что их число уменьшается до количества, соответствующего распаду равновесного слоя при том же значении Bo_m . Данная перестройка капельной конфигурации слоя становится возможной вследствие существования тонкой пленки магнитной жидкости на поверхности проводника, которая соединяет капли между собой.

Система уравнений (3) позволяет рассмотреть некоторые вопросы, касающиеся динамики развития неустойчивости. В частности, когда справедливо выражение (7) и период развивающейся неустойчивости равен длине волны наиболее опасных возмущений $\Lambda = 2\pi/k_0$, неустойчивой, кроме первой моды ($\omega^2(k_0) < 0$), оказывается и вторая, так как $\omega^2(2k_0) = 0$ и из (3) следует, что $d^2f_2/dt^2 > 0$. Неустойчивость второй моды, по-видимому, свидетельствует о возможности образования сателлитов, которые неоднократно наблюдались в экспериментах.

Можно также показать, что для тонких слоев единственным стационарным решением (3) является тривиальное — $\xi \equiv 0$. Это означает, что, когда поверхность $\xi \equiv 0$ становится неустойчивой, возмущения развиваются по крайней мере до тех пор, пока справедливо используемое приближение, т. е. пока амплитуда не станет равна толщине слоя и не произойдет его распада.

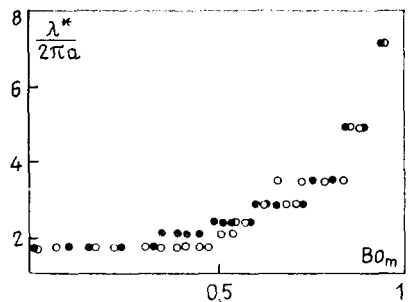


Рис. 3. Однозначность капельной формы цилиндрического слоя магнитной жидкости: ● — $2 \rightarrow Bo'_m$; ○ — $2 \rightarrow Bo'_m$.

Таким образом, неустойчивость тонких слоев неизбежно ведет к их распаду на отдельно стоящие пики с разрывом сплошности жидкости. Это подтверждается экспериментами по неустойчивости тонких цилиндрических и плоских слоев [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баштовой В. Г., Тайц Е. М. О возможностях приближения «мелкой воды» в механике магнитных жидкостей // Магнит. гидродинамика. — 1985. — № 4. — С. 46—52.
2. *Bashtovoi V., Rex A., Taitz E., Foigel R.* Non-linear waves on the magnetic fluid surface // IV Intern. Conf. on Magnetic Fluids: Abstracts. — Japan, 1986. — P. 70—71.
3. Архипенко В. И., Барков Ю. Д., Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость цилиндрической свободной поверхности намагничивающейся жидкости // Докл. АН БССР. — 1979. — Т. 23, № 4. — С. 341—343.
4. Барков Ю. Д., Баштовой В. Г. Экспериментальное исследование неустойчивости плоских слоев намагничивающейся жидкости // Магнит. гидродинамика. — 1977. — № 4. — С. 137—144.
5. Шлиомис М. И. Магнитные жидкости // Успехи физ. наук. — 1974. — Т. 112, вып. 3. — С. 427—458.
6. *Boudowis A. C., Puchalla J. L., Scriven L. E., Rosenswein R. E.* Normal field instability and patterns in pools of ferrofluid // IV Intern. Conf. on Magnetic Fluids: Abstracts. — Japan, 1986. — P. 28—29.
7. Баштовой В. Г., Краков М. С., Рекс А. Г. Неустойчивость плоского слоя магнитной жидкости в закритической области магнитного поля // Магнит. гидродинамика. — 1985. — № 1. — С. 19—24.

Поступила в редакцию 18.05.87