УДК 621.824:51

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВАЛИКО-КОЛЬЦЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ С ОДНИМ ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

ЛАПАНОВИЧ И. О.

Белорусский национальный технический университет

Механика неголономных систем как раздел аналитической механики оформилась в 1894 г. [1]. Герц ввел разделение связей и механических систем на голономные и неголономные. Такая необходимость возникла в связи с тем, что аналитическая механика Лагранжа оказалась неприемлемой к задачам качения твердого тела по плоскости без проскальзывания.

В настоящее время неголономная механика располагает стройной теорией, которая позволила перейти к решению технически сложных и актуальных проблем теории автоматического управления, гироскопических устройств, теории дифференцирующих и интегрирующих устройств и ряда других.

При составлении уравнений движения валико-кольцевых механизмов (ВКМ) в [2] использованы уравнения неголономной механики в форме Рауса, являющейся комбинацией лагранжевых методов обобщенных координат и неопределенных множителей. Методический интерес представляет вывод уравнений исследуемого объекта на основе общих теорем динамики об изменении количества движения и кинетического момента системы. Общие теоремы динамики, устанавливая связь между динамическими величинами, характеризующими движение системы, и действующими силами как активными, так и реакциями связей, допускают наглядную физическую интерпретацию. Причем связи могут быть любыми.

В качестве динамической модели ВКМ принимаем динамическую систему звеньев, представленных на рис. 1, образующих неголономную кинематическую пару вал – кольцо, допускающую два независимых движения при двух условиях неинтегрируемых связей.

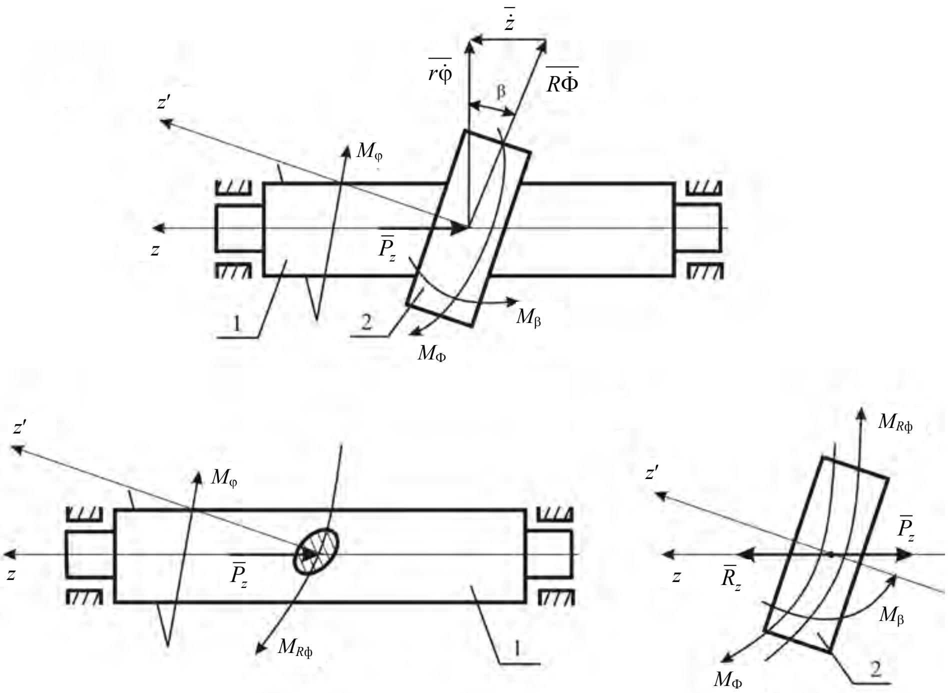

Рис. 1. Схема нагружения силами динамической модели валико-кольцевого механизма:
1 – вал; 2 – кольцо

Следуя принципу освобождаемости от связей, рассмотрим движение отдельно вала 1 и кольца 2, изображенных на рис. 1, под действием активных, реактивных и инерционных сил. Разрывая кинематическую пару «вал – кольцо» и относя силы трения, реализующие неголономные связи, к категории активных, запишем уравнения движения вала и кольца, продолжая считать каждое из них звеном приведения для соответствующей части ВКМ. Вал совершает простое вращательное движение по независимой координате φ. Кольцо совершает сложное движение, которое можно представить состоящим из поступательного движения вместе с центром масс кольца по координате z и вращения по координате Φ. Кроме того, кольцо может совершать движение верчения по независимой координате β.

Таким образом, на основе указанных теорем динамики следует составить четыре уравнения вида:

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d\dot{\varphi}}{dt} = Q_\varphi; \\ m\dfrac{d\dot{z}}{dt} = Q_z; \\ I_2 \dfrac{d\dot{\Phi}}{dt} = Q_\Phi; \\ I_3 \dfrac{d\dot{\beta}}{dt} = Q_\beta, \end{cases} \tag{1}$$

где $\dot{\varphi}$, $\dot{z}$, $\dot{\Phi}$, $\dot{\beta}$ – скорости вала и кольца по соответствующей обобщенной координате; I_1 – приведенный к валу ВКМ момент инерции всех вращающихся звеньев от вала двигателя до вала ВКМ включительно; m – приведенная к кольцу масса поступательно перемещающихся частей каретки; I_2, I_3 – приведенные моменты инерции кольца относительно соответствующих осей; Q_φ, Q_z, Q_Φ, Q_β – обобщенные силы.

Уравнения (1) необходимо дополнить уравнениями неголономных связей вида:

$$\begin{cases} \dot{z} - r\dot{\varphi}u_{21} = 0; \\ R\dot{\Phi} - r\dot{\varphi}u_{31} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Обобщенные силы Q определяются из уравнений элементарных работ действующих сил:

$$\begin{cases} Q_\varphi d\varphi = M_\varphi d\varphi - R_z dz - M_{R_\Phi} d\Phi; & (3а) \\ Q_z dz = R_z dz - P_z dz; & (3б) \\ Q_\Phi d\Phi = M_{R_\Phi} d\Phi - M_\Phi d\Phi; & (3в) \\ Q_\beta d\beta = M_\beta d\beta, & (3г) \end{cases}$$

где M_φ, M_Φ, M_β, P_z – внешние активные силы; M_{R_Φ}, R_z – внутренние реакции связей.

Из уравнений (3а), (3б), (3в) посредством уравнений (2), выражающих условия, налагаемые на вариации координат дифференциальными связями, требуется исключить вариации зависимых координат $d\Phi$, dz. В результате получаем значения обобщенных сил:

$$\begin{cases} Q_\varphi = M_\varphi - R_z r u_{21} - M_{R_\Phi} \dfrac{r}{R} u_{31}; \\ Q_z = R_z - P_z; \\ Q_\Phi = M_{R_\Phi} - M_\Phi; \\ Q_\beta = M_\beta. \end{cases} \tag{4}$$

Продифференцировав по времени уравнения связи (2), выразим значение ускорения перемещения кольца $\ddot{z}$

$$\ddot{z} = r u_{21}\ddot{\varphi} + r\dot{u}_{21}\dot{\varphi} \tag{5}$$

и углового ускорения вращения кольца $\ddot{\Phi}$:

$$\ddot{\Phi} = \frac{r}{R} u_{31}\ddot{\varphi} + \frac{r}{R}\dot{u}_{31}\dot{\varphi}. \tag{6}$$

С учетом (5), (6) и значений обобщенных сил (4) уравнения движения (1) приобретают вид:

$$\begin{cases} I_1\ddot{\varphi} = M_\varphi - R_z r u_{21} - M_{R_\Phi}\dfrac{r}{R}u_{31}; & (7а) \\ m r u_{21}\ddot{\varphi} + m r\dot{u}_{21}\dot{\varphi} = R_z - P_z; & (7б) \\ I_2 \dfrac{r}{R}u_{31}\ddot{\varphi} + I_2\dfrac{r}{R}\dot{u}_{31}\dot{\varphi} = M_{R_\Phi} - M_\Phi; & (7в) \\ I_3\ddot{\beta} = M_\beta. & (7г) \end{cases}$$

Решая совместно уравнения (7а), (7б), (7в), после соответствующих преобразований получим систему дифференциальных уравнений, составленных относительно углового ускорения ведущего вала $\ddot{\varphi}$ и ускорения разворота кольца $\ddot{\beta}$:

$$\begin{cases} \left(I_1 + m r^2 u_{21}^2 + I_2 \dfrac{r^2}{R^2} u_{31}^2\right)\ddot{\varphi} + \\ + \left(m r^2 u_{21}\dot{u}_{21} + I_2\dfrac{r^2}{R^2}u_{31}\dot{u}_{31}\right)\dot{\varphi} = \\ = M_\varphi - P_z r u_{21} - M_\Phi \dfrac{r}{R} u_{31}; \\ I_3\ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \tag{8}$$

Аналогичный ход рассуждений, но с учетом неголономных связей в форме (2) приводит к уравнениям движения исследуемого механизма, составленным относительно ведомого управляемого кольца в виде:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{I_1}{r^2}u_{12}^2 + m + \dfrac{I_2}{R^2}\left(\dfrac{u_{12}}{u_{13}}\right)^2\right]\ddot{z} + \\ +\left[\dfrac{I_1}{r^2}u_{12}\dot{u}_{12} + \dfrac{I_2}{R^2}\left(\dfrac{u_{12}}{u_{13}}\right)\left(\dfrac{u_{12}}{u_{13}}\right)^{\bullet}\right]\dot{z} = \\ = \dfrac{M_\varphi}{r}u_{12} - P_z - \dfrac{M_\Phi}{R}\dfrac{u_{12}}{u_{13}}, \\ I_3\ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \qquad (9)$$

Уравнения (8), (9) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Эти уравнения необходимо преобразовать, так как они содержат несколько переменных коэффициентов, что осложняет дальнейшие исследования.

В уравнения (8) входят взаимосвязанные параметры u_{21} и u_{31}. Выразив u_{31} в функции u_{21} посредством уравнений связи (2), находим

$$u_{31} = \frac{1}{\cos\beta} = \sqrt{1+tg^2\beta} = \sqrt{1+u_{21}^2}. \qquad (10)$$

Продифференцировав уравнения (2), замечаем, что:

$$u_{31}\dot{u}_{31} = u_{21}\dot{u}_{21}. \qquad (11)$$

С учетом (10), (11) уравнения движения ВКМ (8) принимают вид:

$$\begin{cases} \left[I_1 + I_2\dfrac{r^2}{R^2} + \left(mr^2 + I_2\dfrac{r^2}{R^2}\right)u_{21}^2\right]\ddot{\varphi} + \\ +\left(mr^2 + I_2\dfrac{r^2}{R^2}\right)u_{21}\dot{u}_{21}\dot{\varphi} = \\ = M_\varphi - P_z r u_{21} - M_\Phi\dfrac{r}{R}\sqrt{1+u_{21}^2}; \\ I_3\ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \qquad (12)$$

Переменные коэффициенты системы уравнений (9) целесообразно выразить функцией одного переменного u_{12}. Посредством уравнений связи (2) находим:

$$u_{13} = \cos\beta = \frac{\text{ctg}\beta}{\sqrt{1+\text{ctg}^2\beta}} = \frac{u_{12}}{\sqrt{1+u_{12}^2}};$$

$$\left(u_{12}\right)^{\bullet} = \left(\text{ctg}\beta\right)^{\bullet} = -\frac{1}{\sin^2\beta};$$

$$u_{13}\dot{u}_{12} = -\cos\beta\frac{1}{\sin^2\beta};$$

$$\left(\frac{u_{12}}{u_{13}}\right)^{\bullet} = \left(\frac{\text{ctg}\beta}{\cos\beta}\right)^{\bullet} = \left(\frac{1}{\sin\beta}\right)^{\bullet} = -\cos\beta\frac{1}{\sin^2\beta}. \qquad (13)$$

Значения переменных составляющих в коэффициентах при $\ddot{z}$, $\dot{z}$, $\dfrac{M_\Phi}{R}$ приобретают вид:

$$\frac{u_{12}}{u_{13}} = \sqrt{1+u_{12}^2}; \quad \left(\frac{u_{12}}{u_{13}}\right)^2 = 1+u_{12}^2; \quad \left(\frac{u_{12}}{u_{13}}\right)^{\bullet} = u_{13}\dot{u}_{12};$$

$$\frac{u_{12}}{u_{13}}\left(\frac{u_{12}}{u_{13}}\right)^{\bullet} = u_{12}\dot{u}_{12}. \qquad (14)$$

С учетом (13), (14) система уравнений движения ВКМ (9) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \left[m + \dfrac{I_2}{R^2} + \left(\dfrac{I_1}{r^2} + \dfrac{I_2}{R^2}\right)u_{12}^2\right]\ddot{z} + \\ +\left(\dfrac{I_1}{r^2} + \dfrac{I_2}{R^2}\right)u_{12}\dot{u}_{12}\dot{z} = \\ = \dfrac{M_\varphi}{r}u_{12} - P_z - \dfrac{M_\Phi}{R}\sqrt{1+u_{12}^2}; \\ I_3\ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \qquad (15)$$

Таким образом, вывод уравнений движения валико-кольцевого механизма на основе общих теорем динамики подтверждает результат, полученный на основе уравнений Рауса.

Дифференциальные уравнения движения исследуемого объекта с переменными коэффициентами преобразованы к виду (12), (15), удобному для решения задач анализа и синтеза.

ВЫВОД

Анализ полученных уравнений движения неголономной системы позволяет сделать вывод, что динамику переходных процессов валико-кольцевого механизма определяют не только действующие силы, массы и их начальные состояния, но и закон изменения первых кинематических передаточных функций и скорость их изменения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Герц, Г.** Принципы механики, изложенные в новой связи / Г. Герц; изд. подгот. А. Т. Григорьян, Л. С. Полак; под общ. ред. И. И. Артоболевского; пер. с нем. В. Ф. Котова, А. В. Сулимо-Самуйло. – М.: Академия наук СССР, 1959. – 386 с.

2. **Лапанович, И. О.** Математическая модель механической системы с валико-кольцевым механизмом на основе уравнений Рауса / И. О. Лапанович // Вестник БНТУ. – 2007. – № 2. – С. 23–25.

Поступила 10.01.2007