УДК 517.977

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Канд. физ.-мат. наук ГАБАСОВА О. Р.

Белорусский национальный технический университет

В последние годы гибридные системы встречаются во многих приложениях [1]. Они привлекают внимание многих исследователей. Данная работа примыкает к [2]. В отличие от них в ней поведение непрерывной и дискретной частей гибридной системы рассматривается в непрерывном времени. Получена формула Коши и обоснован метод сведения задачи оптимального управления к задаче линейного программирования.

Постановка задачи. Пусть $T=[t_*,t^*]$ – промежуток управления, $h_u=h_v/M$, $h_v=(t^*-t_*)/N$ – периоды квантования времени, k, M, N – натуральные числа; $M=kN$, $T_u=\{t_*,t_*+h_u,\dots,t^*-h_u\}$, $T_v=\{t_*,t_*+h_v,\dots,t^*-h_v\}$; $H_x\in R^{m\times n_x}$, $H_y\in R^{m\times n_y}$, $rank(H_x,H_y)=m<n=n_x+n_y$; $g\in R^m$; $u_*,u^*\in R^{r_u}$; $v_*,v^*\in R^{r_v}$; $c_x\in R^{n_x}$, $c_y\in R^{n_y}$; $x_0\in R^{n_x}$, $y_0\in R^{n_y}$; $A_x(t)\in R^{n_x\times n_x}$, $A_{xy}(t)\in R^{n_x\times n_y}$, $B_x(t)\in R^{n_x\times r_u}$, $t\in T$,– кусочно-непрерывные функции; $A_y(t)\in R^{n_y\times n_y}$, $A_{yx}(t)\in R^{n_y\times n_x}$, $B_y(t)\in R^{n_y\times r_v}$, $t\in T$, – непрерывные функции.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u,v)=c_x'x(t^*)+c_y'y(t^*)\to\max; \tag{1}$$

$$\begin{cases}\dot x=A_x(t)x+A_{xy}(t)y+B_x(t)u;\\ y(t)=A_y(t)y(t-h_v)+A_{yx}(t)x(t)+B_y(t)v(t),\ t\in T;\end{cases} \tag{2}$$

$$x(t_*)=x_0;\ y(t)=y_0(t),t\in[t_*-h_v,t_*[,\ y(t_*)=y_0; \tag{3}$$

$$H_xx(t^*)+H_yy(t^*)=g; \tag{4}$$

$$\begin{gathered}u(t)\in U=\{u\in R^{r_u}:u_*\le u\le u^*\},\\ v(t)\in V=\{v\in R^{r_v}:v_*\le v\le v^*\},t\in T.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $x=x(t)\in R^{n_x}$ – состояние непрерывной части системы в момент времени t, $y=y(t)\in R^{n_y}$ – состояние дискретной части системы, $u=u(t)\in R^{r_u}$; $v=v(t)\in R^{r_v}$ – значения управляющих воздействий.

Задачу (1)–(5) будем исследовать в классе дискретных управляющих воздействий $u(t)$, $v(t)$, $t\in T: u(t)=u(\tau)$, $t\in[\tau,\tau+h_u[,\tau\in T_u$; $v(t)=v(\tau)$, $t\in[\tau,\tau+h_v[$, $\tau\in T_v$. Каждой паре управляющих воздействий $(u(\cdot)=(u(t),t\in T),v(\cdot)=(v(t),t\in T))$, соответствует единственная траектория $(x(t),y(t),t\in T)$, описываемая непрерывной функцией $x(t),t\in T$, и кусочно-непрерывной функцией $y(t),t\in T$. Пару $(u(\cdot),v(\cdot))$ назовем программой, если на ней выполняются (5) и соответствующая ей траектория системы (2), (3) удовлетворяет ограничениям (4). Программа $(u^0(\cdot),v^0(\cdot))$ называется оптимальной, если она доставляет критерию качества (1) максимальное значение.

Формула Коши. Для решения задачи (1)–(5) сначала построим формулу Коши, выражающую зависимость положения $(x(t),y(t))$ системы (2) от начального состояния (3) и управляющих воздействий (5). Пусть $t\in T$, $T(t)=[t_*,t]$, $(u(s),v(s)),s\in T(t),$– управляющие воздействия, $(x(s),y(s))$, $s\in T(t)$, – соответствующая им траектория системы (2) с начальным условием (3). В силу (2) имеет место тождество

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_x(s)x(s) + A_{xy}(s)y(s) + B_x(s)u(s) \\ A_y(s)y(s-h_v) + A_{yx}(s)x(s) + B_y(s)v(s) \end{pmatrix}, s \in T(t) .$$

Умножим обе части тождества на пока неопределенную матричную функцию

$$F(t,s) = \begin{bmatrix} F_x(t,s) \in R^{n_x \times n_x}, & F_{xy}(t,s) \in R^{n_x \times n_y} \\ F_{yx}(t,s) \in R^{n_y \times n_x}, & F_y(t,s) \in R^{n_y \times n_y} \end{bmatrix}, s \in T(t). \tag{6}$$

Проинтегрируем (6) в пределах от t_* до t:

$$\int_{t_*}^{t} F_x(t,s)\frac{dx(s)}{ds}ds + \int_{t_*}^{t} F_{xy}(t,s)y(s)ds = \int_{t_*}^{t} F_x(t,s)[A_x(s)x(s) + A_{xy}(s)y(s) + B_x(s)u(s)]ds +$$
$$+\int_{t_*}^{t} F_{xy}(t,s)[A_y(s)y(s-h_v) + A_{yx}(s)x(s) + B_y(s)v(s)]ds; \tag{7}$$

$$\int_{t_*}^{t} F_{yx}(t,s)\frac{dx(s)}{ds}ds + \int_{t_*}^{t} F_y(t,s)y(s)ds = \int_{t_*}^{t} F_{yx}(t,s)[A_x(s)x(s) + A_{xy}(s)y(s) + B_x(s)u(s)]ds +$$
$$+\int_{t_*}^{t} F_y(t,s)[A_y(s)y(s-h_v) + A_{yx}(s)x(s) + B_y(s)v(s)]ds. \tag{8}$$

Преобразуем (7), (8), считая функции $F_x(t,s),\ F_{yx}(t,s),\ \ s \in T(t)$, дифференцируемыми по s:

$$\int_{t_*}^{t} F_x(t,s)\frac{dx(s)}{ds}ds = F_x(t,t)x(t) - F_x(t,t_*)x(t_*) - \int_{t_*}^{t}\frac{\partial F_x(t,s)}{\partial s}x(s)ds\,; \tag{9}$$

$$\int_{t_*}^{t} F_{yx}(t,s)\frac{dx(s)}{ds}ds = F_{yx}(t,t)x(t) - F_{yx}(t,t_*)x(t_*) - \int_{t_*}^{t}\frac{\partial F_{yx}(t,s)}{\partial s}x(s)ds\,.$$

После элементарных преобразований имеем:

$$\int_{t_*}^{t} F_{xy}(t,s)A_y(s)y(s-h_v)ds = \int_{t_*-h_v}^{t-h_v} F_{xy}(t,s+h_v)A_y(s+h_v)y(s)ds = \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_{xy}(t,s+h_v)A_y(s+h_v)y_0(t)dt +$$
$$+\int_{t_*}^{t-h_v} F_{xy}(t,s+h_v)A_y(s+h_v)y(s)ds = \left[F_{xy}(t,s)=0, s\in(t,t+h_v)\right] = \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_{xy}(t,s+h_v)A_y(s+h_v)\times \tag{10}$$
$$\times y_0(t)dt + \int_{t_*}^{t} F_{xy}(t,s+h_v)A_y(s+h_v)y(s)ds;$$

$$\int_{t_*}^{t} F_y(t,s)A_y(s)y(s-h_v)ds = \int_{t_*-h_v}^{t-h_v} F_y(t,s+h_v)A_y(s+h_v)y(s)ds = \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_y(t,s+h_v)A_y(s+h_v)\overline{y}_0(s)ds +$$

$$+\int_{t_*}^{t-h_v} F_y(t,s+h_v)A_y(s+h_v)y(s)ds = [F_y(t,s)=0, s\in(t,t+h_v), F_y(t,t+h_v)=0; \overline{y}_0(s) = (y_0(s), s\in(t_*-h_v,t_*),$$

$$\bar{y}_0(t_*) = y_0)] = \int\limits_{t_*-h_v}^{t_*} F_y(t,s+h_v)A_y(s+h_v)\bar{y}_0(s)ds + \int\limits_{t_*}^{t} F_y(t,s+h_v)A_y(s+h_v)y(s)ds\,.$$

Подставим (9), (10) в (7), (8) и запишем результат в виде:

$$F_x(t,t)x(t) = F_x(t,t_*)x(t_*) - F_{xy}(t,t)y(t) + \int\limits_{t_*}^{t}\left[\frac{\partial F_x(t,s)}{\partial s} + F_x(t,s)A_x(s) + F_{xy}(t,s)A_{yx}(s)\right]x(s)ds +$$

$$+\int\limits_{t_*}^{t}[F_x(t,s)A_{xy}(s) - F_{xy}(t,s) + F_{xy}(t,s+h_v)A_y(s+h_v)]y(s)ds + \int\limits_{t_*-h_v}^{t_*} F_{xy}(t,s+h_v)A_y(s+h_v)y_0(s)ds +$$

$$+\int\limits_{t_*}^{t}[F_x(t,s)B_x(s)u(s) + F_{xy}(t,s)B_y(s)v(s)]ds\,; \tag{11}$$

$$\int\limits_{t_*}^{t}(-F_{yx}(t,s)A_{xy}(s) + F_y(t,s) - F_y(t,s+h_v)A_y(s+h_v))y(s)ds = -F_{yx}(t,t)x(t_*) + F_{yx}(t,t_*)x(t_*) +$$

$$+\int\limits_{t_*}^{t}\left[\frac{\partial F_{yx}(t,s)}{\partial s} + F_{yx}(t,s)A_x(s) + F_y(t,s)A_{yx}(s)\right]x(s)ds + \int\limits_{t_*-h_v}^{t_*} F_y(t,s+h_v)A_y(s+h_v)\bar{y}_0(s)ds + \tag{12}$$

$$+\int\limits_{t_*}^{t}[F_{yx}(t,s)B_x(s)u(s) + F_y(t,s)B_y(s)v(s)]ds\,.$$

Пусть функция (5) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x(t,s)}{\partial s} = -F_x(t,s)A_x(s) - F_{xy}(t,s)A_{yx}(s), s\in[t_*,t]; F_x(t,t)=E; \\ F_{xy}(t,s) = F_{xy}(t,s+h_v)A_y(s+h_v) + F_x(t,s)A_{xy}(s),\ s\in[t_*,t]; F_{xy}(t,s)=0, s\in[t,t+h_v]; \\ \dfrac{\partial F_{xy}(t,s)}{\partial s} = -F_{xy}(t,s)A_x(s) - F_y(t,s)A_{yx}(s), s\in[t_*,t]; F_{yx}(t,t)=0; \\ F_y(t,s) = F_y(t,s+h_v)A_y(s+h_v) + F_{yx}(t,s)A_{xy}(s) + E\delta(t,s),\ s\in[t_*,t]; \\ F_y(t,s)=0,\ s\in(t,t+h_v); F_y(t,t+h_v)=0, \end{cases} \tag{13}$$

где $\delta(t,s)$, $s\in T(t)$, – δ-функция Дирака ($\delta(t,s)=0$, если $s\neq t$).

Тогда соотношения (11), (12) примут вид:

$$x(t) = F_x(t,t_*)x(t_*) + \int\limits_{t_*-h_v}^{t_*} F_{xy}(t,s+h_v)A_y(s+h_v)y_0(s)ds + \int\limits_{t_*}^{t}[F_x(t,s)B_x(s)u(s) + F_{xy}(t,s)B_y(s)v(s)ds; \tag{14}$$

$$y(t) = F_{yx}(t,t_*)x(t_*) + \int\limits_{t_*-h_v}^{t_*} F_y(t,s+h_v)A_y(s+h_v)\bar{y}_0(s)ds + \int\limits_{t_*}^{t}[F_{yx}(t,s)B_x(s)u(s) + F_y(t,s)B_y(s)v(s)]ds.$$

Перейдем к другой, эквивалентной, форме соотношений (13), (14), которая более удобна для вычислений. Сделаем замену независимой переменной $s = t + t_* - \tau$ и обозначим $\Phi(t,\tau) = F(t,t+t_*-\tau)$. В новых обозначениях соотношения (13) имеют вид:

$$\frac{\partial\Phi_x(t,\tau)}{\partial\tau}=\Phi_x(t,\tau)A_x(t+t_*-\tau)+\Phi_{xy}(t,\tau)A_{yx}(t+t_*-\tau),\tau\in[t_*,t];\Phi_x(t,t_*)=E;$$
$$\Phi_{xy}(t,\tau)=\Phi_{xy}(t,\tau-h_v)A_y(t+t_*-\tau+h_v)+\Phi_x(t,\tau)A_{xy}(t+t_*-\tau),\tau\in T(t);\qquad(15)$$
$$\Phi_{xy}(t,\tau)=0,\tau\in[t_*-h_v,t_*];$$

$$\frac{\partial\Phi_{yx}(t,\tau)}{\partial\tau}=\Phi_{yx}(t,\tau)A_x(t+t_*-\tau)+\Phi_y(t,\tau)A_{yx}(t+t_*-\tau),\tau\in[t_*,t];\Phi_{yx}(t,t_*)=0;$$
$$\Phi_y(t,\tau)=\Phi_y(t,\tau-h_v)A_y(t+t_*-\tau+h_v)+\Phi_{yx}(t,\tau)A_{xy}(t+t_*-\tau)+E\delta(t,t+t_*-\tau),\tau\in T(t);\qquad(16)$$
$$\Phi_y(t,t_*-h_v)=0,\Phi_y(t,\tau)=0,\tau\in[t_*-h_v,t_*].$$

Из (16) видно, что значения функции $\Phi_y(t,\tau),\tau\in T(t)$, в точках $\mu\in T_\mu=\{t_*,t_*+h_v,\dots,t_*+\mu^*h_v\}$, $\mu^*=\left[(t-t_*)/h_v\right]$ содержит импульсную составляющую $\Phi^*_y(t,\mu)\delta(t,t_*+t-\mu)$. Матричная функция $\Phi^*_y(t,\mu),\mu\in T_\mu$, удовлетворяет уравнению

$$\Phi^*_y(t,\mu)=\Phi^*_y(t,\mu-h_v)A_y(t+t_*-\mu+h_v),\quad \mu\in T_\mu;\ \Phi^*_y(t,t_*)=E.\qquad(17)$$

Сужение функции $\Phi_y(t,\tau),t\in T(t),$ на множество $T\setminus T_\mu$ обозначим через $\Phi^0_y(t,\tau),\tau\in\in T\setminus T_\mu$. Оно удовлетворяет уравнению

$$\Phi^0_y(t,\tau)=\Phi^0_y(t,\tau-h_v)A_y(t+t_*-\tau+h_v)+\Phi_{yx}(t,\tau)A_{xy}(t+t_*-\tau),\tau\in T\setminus T_\mu,\qquad(18)$$

с начальным условием $\Phi^0_y(t,\tau)=0,\tau\in[t_*-h_v,t_*]$.

Функция $\Phi_{yx}(t,\tau),\tau\in T(t)$, на промежутках непрерывности является решением уравнения

$$\frac{\partial\Phi_{yx}(t,\tau)}{\partial\tau}=\Phi_{yx}(t,\tau)A_x(t+t_*-\tau)+\Phi^0_y(t,\tau)A_{yx}(t+t_*-\tau),\tau\in T(t),\qquad(19)$$

с начальным условием $\Phi_{yx}(t,t_*)=0$.

В точках $\mu\in T_\mu$ она совершает скачки:

$$\Phi_{yx}(t,\mu+0)=\Phi_{yx}(t,\mu-0)+\Phi^*_y(t,\mu)A_{yx}(t+t_*-\mu).$$

В итоге формула Коши (14) примет вид:

$$x(t)=\Phi_x(t,t)x(t_*)+\int_{t_*-h_v}^{t_*}\Phi_{xy}(t,t+t_*-s-h_v)\times A_y(s+h_v)y_0(s)ds+\int_{t_*}^{t}[\Phi_x(t,t+t_*-s)B_x(s)u(s)+\Phi_{xy}(t,t+t_*-s)B_y(s)v(s)]ds;\qquad(20)$$

$$y(s)=\Phi_{yx}(t,t)x(t_*)+\Phi^*_y(t,t_*+h_v)A_y(t_*+h_v)y_0+\int_{t_*-h_v}^{t_*}\Phi^0_y(t,t+t_*-s-h_v)A_y(s+h_v)y_0(s)ds+\int_{t_*}^{t}\Phi_y(t,t+t_*-s)B_x(s)u(s)ds+\sum_{\mu=t_*}^{\mu^*}\Phi^*_y(t,\mu)B_y(t+t_*-\mu)v(t+t_*-\mu)+\int_{t}^{t_*}\Phi^0_y(t,t+t_*-s)B_y(s)v(s).$$

Опишем процедуру вычисления функций (15)–(19). Учитывая тождество $\Phi_{xy}(t,\tau)=0$, $\tau\in T(t)$, решаем однородное уравнение $\partial\Phi_x(t,\tau)/\partial\tau=\Phi_x(t,\tau)A_x(t+t_*-\tau)$, $\tau\in T(t)$ с начальным условием $\Phi_x(t,t_*)=E$ и находим $\Phi_x(t,\tau)$, $\tau\in[t_*,\ t_*+h_v]$. Затем, подставив найденную функцию $\Phi_x(t,\tau),\tau\in[t_*,t_*+h_v]$, во второе уравнение (15), вычисляем $\Phi_{xy}(t,\tau)$, $\tau\in[t_*,\ t_*+h_v]$. Повторив описанную процедуру на последующих промежутках, вычислим $\Phi_x(t,\tau)$, $\Phi_{xy}(t,\tau),\tau\in T(t)$.

Из (17) находим $\Phi^*_y(t,\ \mu)$, $\mu\in T_\mu$. Поскольку $\Phi^0_y(t,\tau)=0,\tau\in[t_*-h_v,t_*]$, уравнение (19) на промежутке $[t_*-h_v,t_*]$ становится однородным.

Решаем его с начальным условием $\Phi_{yx}(t,t_*)= =\Phi_y^*(t,t_*)A_{yx}(t)$. Подставив $\Phi_{yx}(t,\tau)$, $\tau\in[t_*,t_*+h_v]$, в (19), находим $\Phi_y^0(t,\tau)$, $\tau\in[t_*,\ t_*+h_v]$. Далее подставим $\Phi_y^0(t,\tau),\tau\in[t_*,t_*+h_v]$, в (18), построим функцию $\Phi_{yx}(t,\tau)$, $\tau\in$ $(t_*+h_v,$ $t_*+2h_v)$, удовлетворяющую уравнению (19) с начальным условием $\Phi_{yx}(t,t_*+h_v)=\Phi_{yx}(t,$ $t_*+h_v-0)+$ $\Phi_y^*(t,t_*+h_v)A_{yx}(t-h_v)$. Продолжая процедуру, строим $\Phi_y^0(t,\tau)$, $\Phi_{yx}(t,\tau)$, $\tau\in T\setminus T_\mu$.

Редукция задачи оптимального управления к задаче линейного программирования. Подставим формулу Коши (20) в критерий качества задачи (1)–(5):

$$c_x'x(t^*)+c_y'y(t^*)=c_x'(\Phi_x(t^*,t_*)x(t_*)+\int\limits_{t_*-h_v}^{t_*}\Phi_{xy}(t^*,t^*+t_*-s-h_v)A_y(s+h_v)y_0(s)ds+$$

$$+\int\limits_{t_*}^{t^*}\Phi_{xy}(t^*,t^*+t_*-s-h_v)A_y(s+h_v)y_0(s)ds+\int\limits_{t_*}^{t^*}[\Phi_x(t^*,t^*+t_*-s)B_x(s)u(s)ds+\Phi_{xy}(t^*,t^*+t_*-s)\times$$

$$\times B_y(s)v(s)]ds)+c_y'\Big(\Phi_{yx}(t^*,t)x(t_*)+\Phi_y^*(t^*,t_*+h_v)A_y(t_*+h_v)y_0+\int\limits_{t_*-h_v}^{t_*}\Phi_y^0(t^*,t^*+t_*-s-h_v)\times \tag{21}$$

$$\times A_y(s+h_v)y_0(s)ds+\int\limits_{t_*}^{t^*}\Phi_y(t^*,t^*+t_*-s)B_x(s)u(s)ds+\sum_{\mu=t_*}^{\mu^*}\Phi_y^*(t^*,\mu)B_y(t^*+t_*-\mu)v(t^*+t_*-\mu)-$$

$$-\int\limits_{t_*}^{t^*}\Phi_y^0(t^*,t^*+t_*-s)B_y(s)v(s)\,ds\Big)$$

и обозначим

$$c_u'(\tau)=\int\limits_{\tau}^{\tau+h_u}(c_x'\Phi_x(t^*,t^*+t_*-s)+c_y'\Phi_y(t^*,t^*+t_*-s))B_x(s)ds,c_v'(\tau)=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{\tau+h_v}(c_x'\Phi_{xy}(t^*+t_*-s)+c_y'\Phi_y^0(t^*,t^*+t_*-s))B_y(s)ds.$$

Тогда критерий качества (21) примет вид

$$\sum_{\tau\in T_u}c_u'u(\tau)+\sum_{\tau\in T_v}c_v'v(\tau)+c_x'\Phi_x(t^*,t)x(t_*)+c_x'\int\limits_{t_*-h_v}^{t_*}\Phi_{xy}(t^*,t^*+t_*-s-h_v)A_y(s+h_v)y_0(s)ds+$$

$$+c_y'\Phi_{yx}(t^*,t)x(t_*)+c_y'\Phi_y^*(t^*,t_*+h_v)A_y(t_*+h_v)y_0+c_y'\int\limits_{t_*-h_v}^{t_*}\Phi_y^0(t^*,t^*+t_*-s-h_v)A_y(s+h_v)y_0(s)ds+ \tag{22}$$

$$+\sum_{\mu=t_*}^{\mu^*}c_y'\Phi_y^*(t^*,\mu)B_y(t^*+t_*-\mu)v(t^*+t_*-\mu).$$

Отбросим в (22) слагаемые, не зависящие от $u(\tau),\tau\in T_u,v(\tau),\tau\in T_v,$ так как они не влияют на вид оптимальной программы. Тогда критерий качества (1) примет вид

$$\sum_{\tau\in T_u}c_u'u(\tau)+\sum_{\tau\in T_v}c_v'v(\tau)\to\max.$$

Для терминального ограничения проведем аналогичные преобразования:

$$H_x x(t^*) + H_y y(t^*) = H_x(\Phi_x(t^*, t_*)x(t_*) + \int\limits_{t_*-h_v}^{t_*} \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s - h_v)A_y(s + h_v)y_0(s)ds +$$

$$+\int\limits_{t_*}^{t^*} \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s - h_v)A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \int\limits_{t_*}^{t^*}[\Phi_x(t^*, t^* + t_* - s)B_x(s)u(s)ds + \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s)\times$$

$$\times B_y(s)v(s)]ds) + H_y\left(\Phi_{yx}(t^*, t)x(t_*) + \Phi_y^*(t^*, t_* + h_v)A_y(t_* + h_v)y_0 + \int\limits_{t_*-h_v}^{t_*} \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s - h_v)\times\right.$$

$$\times A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \int\limits_{t_*}^{t^*} \Phi_y(t^*, t^* + t_* - s)B_x(s)u(s)ds + \sum_{\mu=t_*}^{\mu^*} \Phi_y^*(t^*, \mu)B_y(t^* + t_* - \mu)v(t^* + t_* - \mu) -$$

$$\left.-\int\limits_{t_*}^{t^*} \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s)B_y(s)v(s)ds\right) = g.$$

Обозначим: $D_u(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau+h_u} \left(H_x\Phi_x(t^*, t^* + t_* - s) + H_y\Phi_y(t^*, t^* + t_* - s)\right)B_x(s)ds;$

$$D_v(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau+h_v} \left(H_x\Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s) + H_y\Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s)\right)B_y(s)ds, \tilde{g} = g - \left(H_x\,\Phi_x(t^*, t)x(t_*) +\right.$$

$$+\int\limits_{t_*-h_v}^{t_*} H_x\Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s - h_v)A_y(s + h_v)y_0(s)ds + H_y\Phi_{yx}(t^*, t)x(t_*) + H_y\Phi_y^*(t^*, t_* + h_v)A_y(t_* + h_v)y_0 +$$

$$\left.+\int\limits_{t_*-h_v}^{t_*} \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s - h_v)A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \sum_{\mu=t_*}^{\mu^*} H_y\Phi_y^*(t^*, \mu)B_y(t^* + t_* - \mu)v(t^* + t_* - \mu)\right).$$

Тогда терминальное ограничение (4) примет вид $\sum\limits_{\tau\in T_u} D_u(\tau)u(\tau) + \sum\limits_{\tau\in T_v} D_v(\tau)v(\tau) = \tilde{g}$. Значит, задача оптимального управления (1)–(5) эквивалентна задаче линейного программирования:

$$\sum_{\tau\in T_u} c_u' u(\tau) + \sum_{\tau\in T_v} c_v' v(\tau) \to \max,$$

$$\sum_{\tau\in T_u} D_u(\tau)u(\tau) + \sum_{\tau\in T_v} D_v(\tau)v(\tau) = \tilde{g};$$

$$u_* \le u(t) \le u^*, t \in T_u; v_* \le v(t) \le v^*, t \in T_v.$$

Поэтому оптимальную программу можно вычислить с помощью любого метода линейного программирования [3].

ВЫВОД

Получена формула Коши для одного типа гибридных систем, которая используется для вычисления оптимальных программ в линейной терминальной задаче оптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brockett, R. W.** Hybrid models for motion of control systems/ R. W. Brockett // In Essays on Control: Perspectives in the Theory and Applications. H. L. Trentelman [et al.]. – Birkhauser, 1993. – P. 29–53.

2. **Габасова, О.Р.** Оптимизация линейных гибридных систем управления / О. Р. Габасова // Вестник БНТУ. – 2007. – № 2. – С. 71–75.

3. **Табак, Д.** Оптимальное управление и математическое программирование / Д. Табак, Б. Куо. – М.: Наука, 1975. – 279 с.

Поступила 12.12.2007