УДК 539. 214

АСИМПТОТИКА НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ С УПРОЧНЕНИЕМ

Канд. физ.-мат. наук, доц. НИФАГИН В. А.

Белорусский национальный технический университет

Для решения нелинейных задач механики сплошных сред широко применялись варианты метода возмущения, сводящие исходную задачу к итерационной последовательности линейных задач. Так, метод упругих решений [1, 2] использовался для решения задач теории пластичности в рамках деформационной теории малых упругопластических деформаций. В теории течения применялся метод разложения по параметру нагружения [3, 4], редуцирующий физически-нелинейную краевую задачу в неголономной постановке к последовательности связанных линейных задач с фиктивными массовыми силами.

В то же время решения, полученные на основе метода разложения по параметру нагружения, будут обладать существенной погрешностью для малой окрестности сингулярных точек границы области. Это связано с тем, что при данном подходе базовым является линейное решение (первый член разложения). В то время как в окрестности угловой точки главную роль представляет нелинейная часть диаграммы деформирования (кубический член). Поэтому исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности особой точки предполагает разработку другого варианта метода, где первый член решения получается на основе кубического слагаемого закона деформирования, а остальные члены ряда выступают в качестве поправок к нему. Варианты такого подхода были проиллюстрированы для тел с трещинами при различных определяющих соотношениях теорий пластичности [5] и использовании локальных характеристик совместно с критериями разрушения [6], а также при построении эффективных алгоритмов численного анализа полных решений путем сращивания асимптотических полей напряжений вблизи угловой точки и на удалении от нее.

Рассмотрим задачу о вдавливании жесткого полубесконечного штампа в упругопластическую полуплоскость силой P. Трение в области контакта отсутствует. Материал полуплоскости рассматривается при условиях степенного упрочнения, несжимаемости и плоской деформации. Декартову систему координат $\xi_i \left(i=\overline{1,3}\right)$ отнесем к окрестности угловой точки штампа (ось ξ_1 направлена вдоль границы нижней полуплоскости S, которую занимает среда).

Предположим, что состояние вблизи угловой точки контролируется параметром нагружения K. Последний может иметь смысл коэффициента интенсивности напряжений в упругой области, окружающей малую пластическую зону. Тогда единственным независимым параметром задачи с размерностью длины является величина K^2/G^2, поэтому искомые функции могут зависеть от нагрузки лишь посредством безразмерных переменных:

$$x_i = \frac{\xi_i G^2}{K^2}\ (i=1,2);\quad r^2 = x_1^2 + x_2^2;\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},$$

переходя к которым запишем определяющие соотношения теории течения с упрочнением:

$$\delta e_r = \delta s_r + \delta F(T) s_r;\quad \delta e_{r\varphi} = \delta s_{r\varphi} + \delta F(T) s_{r\varphi}. \quad (1)$$

Здесь компоненты тензоров и девиаторов деформаций и напряжений связаны формулами:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij};\ e_r + e_\varphi = 0;\ s_r + s_\varphi = 0;\ \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi);$$

$$s_r = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi);\quad s_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}, \quad (2)$$

а функция упрочнения имеет вид

$$F(T)=A_3T^2=\frac{A_3}{2}\left(s_r^2+s_\varphi^2+2s_{r\varphi}^2\right);\quad A_3=2A_2G^2. \quad (3)$$

где A_2 – постоянная материала, характеризующая нелинейность диаграммы деформирования.

Учитывая представления для приращений напряжений и деформаций, отвечающие увеличению параметра K:

$$\delta e_{ij}=e_{ij,K}\delta K=e_{ij,r}\delta r;\quad \delta s_{ij,K}\delta K=s_{ij,r}\delta r, \quad (4)$$

введем функцию напряжений $\Phi(r,\varphi)$ в виде полного разложения по параметру нагружения в окрестности особой точки, включающего наряду с главной, и правильную часть

$$\Phi(r,\varphi)=\sum_{k\geq 0}\Psi_k(\varphi)r^{\lambda_k}. \quad (5)$$

Обобщение метода разложения по параметру нагружения заключается в том, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(\lambda_{k+1}>\lambda_k>0)$ подлежит определению наряду с функциями $\Psi_k(\varphi)$.

Из соотношений (1)–(5), а также формул, представляющих компоненты напряжений через функцию напряжений, получим:

$$s_r=\frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\left(\Psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\Psi_k\right)r^{\lambda_k-2};$$
$$s_{r\varphi}=\sum_{k\geq 0}(1-\lambda_k)\Psi_k' r^{\lambda_k-2}; \quad (6)$$
$$F(T)=\frac{A_3}{4}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}a_{ke}r^{\lambda_k+\lambda_l-4},$$

где

$$a_{ke}=\Psi_k''\Psi_l''-2\lambda_l(2-\lambda_l)\Psi_l\Psi_k''+4(1-\lambda_k)(1-\lambda_l)\times$$
$$\times\Psi_k'\Psi_l'+\lambda_k\lambda_l(2-\lambda_k)(2-\lambda_l)\Psi_k\Psi_l. \quad (7)$$

При отсутствии в теле зон разгрузки из (1) находим

$$e_{r,r}=\frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}(\lambda_k-2)\left(\Psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\Psi_k\right)r^{\lambda_k-3}+$$
$$+\frac{A_3}{8}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}\alpha_{klm}r^{\mu_{klm}-7};$$
$$(8)$$
$$e_{r\varphi,r}=\sum_{k\geq 0}(1-\lambda_k)(\lambda_k-2)\Psi_k' r^{\lambda_k-3}+$$
$$+\frac{A_3}{4}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}\beta_{klm}r^{\mu_{klm}-7},$$

где

$$\alpha_{klm}=(\lambda_k+\lambda_l-4)\left(\Psi_m''+\lambda_m(2-\lambda_m)\Psi_m\right)a_{kl};$$
$$\beta_{klm}=(\lambda_k+\lambda_l-4)(1-\lambda_m)\Psi_m' a_{kl};$$
$$\mu_{klm}=\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m.$$

Дифференцируя по r условие совместности деформаций в цилиндрической системе координат и подставляя в него представления (6)–(8), приходим к уравнению

$$\sum_{k\geq 0}(2-\lambda_k)\left(\Psi_k^{(4)}-(3\lambda_k^2-5\lambda_k+4)\Psi_k''-\lambda_k^2(2-\lambda_k)\Psi_k\right)\times$$
$$\times r^{\lambda_k-3}+\frac{A_3}{4}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}\left((\mu_{klm}-3)(\mu_{klm}-7)\alpha_{klm}-\right.$$
$$\left.-\alpha_{klm}'+4(\mu_{klm}-5)\beta_{klm}'\right)r^{\mu_{klm}-7}=0. \quad (9)$$

Заметим, что из-за сингулярности напряжений при $r\to 0$ показатель $\lambda_0<3$. Сравнивая первые слагаемые в (9) ($k=l=m=0$), имеем неравенство

$$\lambda_0-3>\mu_{000}-7\ (\mu_{000}=3\lambda_0),$$

поэтому в (9) следует требовать выполнения условия

$$\alpha_{000}'-4(\mu_{000}-5)\beta_{000}'-(\mu_{000}-3)(\mu_{000}-7)\alpha_{000}=0. \quad (10)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (10) дополним краевыми условиями на свободной поверхности $L''(\varphi=0)$ полуплоскости. С учетом $\sigma_\varphi=\sigma_{r\varphi}=0$ получим граничные условия

$$\Psi_0(0)=0;\quad \Psi_0'(0)=0. \quad (11)$$

На участке $L'(\varphi=\pi)$ при отсутствии трения в области контакта

$$\Psi_0'(\pi)=0. \quad (12)$$

Из условия несжимаемости и кинематических уравнений находим четвертое краевое условие

$$\Psi_0'''(\pi)=0. \quad (13)$$

Таким образом, однородная граничная задача (10)–(13) является задачей определения собственного значения λ_0 и соответствующей собственной функции нелинейного дифференциального оператора.

Причем значение λ_0, соответствующее нетривиальному решению, отыскивается как из энергетических соображений [7], так и путем численного анализа.

Для разрешимости этой задачи должны выполняться дополнительные условия. Из (7) следует, что функции $\alpha_{klm}(\varphi)$, $\beta_{klm}(\varphi)$ зависят от $\Psi_n(\varphi)$ с индексами $\min\{k,l,m\} \le n \le \max\{k,l,m\}$.

Тогда для непротиворечивости уравнения (10) необходимо

$$\lambda_0 - 3 = \mu_{100} - 7 \; (\mu_{100} = \mu_{010} = \mu_{001} = 2\lambda_0 + \lambda_1).$$

Откуда $\lambda_1 = 4 - \lambda_0$. Итак, для $\Psi_1(\varphi)$ имеем вместе с граничными условиями (11)–(13) неоднородную краевую задачу

$$(2-\lambda_0)\left(\Psi_0^{(4)} - (3\lambda_0^2 - 5\lambda_0 + 4)\Psi_0'' + \lambda_0^2(2-\lambda_0)\Psi_0\right) + \\ + \frac{A_3}{4}\sum_{k+l+m=1}\left((\mu_{klm}-3)(\mu_{klm}-7)\alpha_{klm} - \right. \\ \left. - \alpha'_{klm} + 4(\mu_{klm}-5)\beta'_{klm}\right).$$

В общем случае для разрешимости уравнения (9) при любом k необходимо удовлетворить равенству

$$\lambda_n - 3 = \mu_{klm} - 7 \quad (k + l + m = n + 1),$$

т. е.

$$\lambda_n = 2n(2 - \lambda_0) + \lambda_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (14)$$

Окончательно вид рекуррентной последовательности краевых задач для отыскания $\Psi_n(\varphi)$ при любом n будет

$$(2-\lambda_n)\left(\Psi_n^{(4)} - (3\lambda_n^2 - 5\lambda_n + 4)\Psi_n'' + \lambda_n^2(2-\lambda_n)\Psi_n\right) - \\ - \frac{A_3}{4}\sum_{k+l+m=n+1}\left(\alpha'_{klm} - 4(\mu_{klm}-5)\beta'_{klm} - \right. \\ \left. - (\mu_{klm}-3)(\mu_{klm}-7)\alpha_{klm}\right) = 0;$$

$$\Psi_n(0) = 0, \qquad \Psi_n'(0) = 0;$$

$$\Psi_n'(\pi) = 0, \qquad \Psi_n'''(\pi) = 0.$$

Посредством (14) заключаем, что $\lambda_n > 1$ при $n \ge 1$, поэтому в разложениях для s_r и $s_{r\varphi}$ из (6) сингулярными являются лишь первые члены ($n = 0$).

ВЫВОД

Разработка современных математических методов в механике сплошных сред со сложной реологией может служить теоретической основой создания эффективных алгоритмов расчета упругопластических полей напряжений и деформаций для оценки прочности конструкционных изделий, а также использоваться в системах автоматизированного проектирования для задач машиностроения, приборостроения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильюшин, А. А.** Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. **Ильюшин, А. А.** Пластичность. Упругопластические деформации. Ч. 1 / А. А. Ильюшин. – М.: Логос, 2004.
3. **Ибрагимов, В. А.** Деформация упрочняющейся упругопластической плоскости с криволинейным отверстием / В. А. Ибрагимов, В. А. Нифагин // Теоретич. и прикл. механика. – Минск: Вышэйш. шк., 1989. – Вып. 16. – С. 40–55.
4. **Ибрагимов, В. А.** Контактная задача для упрочняющейся упругопластической полуплоскости / В. А. Ибрагимов, В. А. Нифагин // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. – 1990. – С. 30–34.
5. **Ибрагимов, В. А.** Об асимптотике напряженного состояния около конца трещины в упруго-пластической среде / В. А. Ибрагимов, Н. Е. Тарасюк // Изд-во АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 5.
6. **Черепанов, Г. П.** О сингулярных решениях в теории упругости / Г. П. Черепанов // Механика твердого деформированного тела. – Л., 1979. – С. 467–479.
7. **Черепанов, Г. П.** Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике. ПММ / Г. П. Черепанов. – 1977. – Т. 41. – Вып. 3.

Поступила 7.07.2008