

Рис. 10

ЛИТЕРАТУРА:

1. Преобразователь механических величин (Колешко В.М., Мешков Ю.В., Баркалин В.В.) - авторское свидетельство СССР N 1634063.
2. Преобразователь механических величин (Колешко В.М., Мешков Ю.В., Баркалин В.В.) - авторское свидетельство СССР N 1634111.
3. Преобразователь давления (Колешко В.М., Мешков Ю.В., Баркалин В.В.) - авторское свидетельство СССР N 1572187.
4. Преобразователь механических величин (Колешко В.М., Мешков Ю.В., Баркалин В.В.) - авторское свидетельство СССР N 1378721.
5. Преобразователь механических величин (Колешко В.М., Мешков Ю.В., Баркалин В.В.) - авторское свидетельство СССР N 1426400.
6. Преобразователь механических величин (Колешко В.М., Мешков Ю.В., Баркалин В.В.) - авторское свидетельство СССР N 1410642.
7. Устройство на поверхностных акустических волнах (Колешко В.М., Мешков Ю.В., Баркалин В.В.) - авторское свидетельство СССР N 1436831.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ НА БАЗЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК

Босяков С.М.

The expressions for velocities of propagation of elastic waves are obtained, and also for coordinates of points of cubic anisotropic medium, up to which the wave perturbation has reached. With their help the wave surface and surface of inverse velocities of quasitransversal waves is constructed.

Формирование наглядных физико-механических представлений о закономерностях поведения объемных упругих волн в анизотропных средах является важной и актуальной задачей механики деформируемого твердого тела [1]. С этой

целью используются различные поверхности, характеризующие распространение волн в сплошных средах, например, поверхности обратных скоростей, волновые поверхности и др. [2—4]. Однако для большинства анизотропных сред их

не удается построить, поскольку соответствующие характеристические уравнения аналитически могут быть решены только для особых направлений или плоскостей. Использование современных средств и возможностей вычислительной техники делают доступным решение динамических задач высокой степени сложности и позволяют математически моделировать волновые процессы в сплошных средах. Ниже предлагается реализация метода характеристик применительно к трехмерным динамическим задачам теории упругости кубически анизотропных сред. Соответствующая система уравнений движения в отсутствие массовых сил имеет следующий вид [5]:

$$(A_4\Delta + (A_1 - A_2 - 2A_4)\partial_i^2)u_i + (A_2 + A_4)\partial_i \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений, A_1, A_2, A_4 — постоянные упругости в основной кристаллографической системе координат, ρ — плотность среды, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, 3}$, точка обозначает дифференцирование по времени.

Уравнение характеристик для (1) запишем, следуя [5]:

$$(g^2 - p_0^2/c^2)^3 + ag^2(g^2 - p_0^2/c^2)^2 + (a^2 - b^2)(g^2 - p_0^2/c^2)m + (a^3 - 3ab^2 + 2b^3)n = 0. \quad (2)$$

Здесь $a = A_1/A_4 - 1$; $b = A_2/A_4 + 1$; $c = \sqrt{A_4/\rho}$;

$$m = \sum_{i \neq j=1}^3 p_i^2 p_j^2; \quad n = p_1^2 p_2^2 p_3^2; \quad p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t}; \quad p_k = \frac{\partial Z}{\partial x_k};$$

$$g^2 = \sum_{k=1}^3 p_k^2.$$

Из (2) выразим p_0 :

$$p_0^{(k)} = \sqrt{g^2 + \frac{a}{3} - 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\Lambda_k + 2\pi k}{3}\right)}, \quad k = \overline{1, 3} \quad (3)$$

где $p = -\frac{a^2 g^4}{3} + (a^2 - b^2)m$;

$$q = \frac{2a^3 g^6}{27} - \frac{ag^2(a^2 - b^2)m}{3} + (a^3 - 3ab^2 + 2b^3)n; \quad \Lambda_k = \arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right).$$

Индексы k в выражениях (3) и ниже указывают на тип упругой волны: $k = 1$ — квазипродольная волна, $k = 2, 3$ — квазипоперечные волны.

Дифференцируя (3) по p_1, p_2 и p_3 , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0^{(k)}}{\partial p_j} &= \frac{ct}{p_0^{(k)}} \left(p_j \left(1 + \frac{a}{3} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{-p}} \frac{\partial p}{\partial p_j} \cos(\Lambda_k + 2\pi k) + \right. \\ &+ \frac{1}{3} \frac{\sqrt{4p^3} \sin(\Lambda_k + 2\pi k)}{\sqrt{4p^3 + 27q^2}} \\ &\left. \left. \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} \left(\frac{\partial q}{\partial p_j} + \frac{9\sqrt{3}q}{2p} \frac{\partial p}{\partial p_j} \right) \right) \right), \quad j = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \frac{\partial p}{\partial p_j} &= 2(a^2 + b^2)p_j(g^2 - p_j^2) - \frac{4a^2 p_j g^2}{3}, \\ \frac{\partial q}{\partial p_j} &= \frac{4a^3}{9} - 2a(a^2 - b^2) \left/ \begin{aligned} &+ (p_j m + g^2 p_j (g^2 - p_j^2)) \\ &+ 2n(a^3 - 3ab^2 + 2b^3) \end{aligned} \right/ p_j \end{aligned}$$

Учитывая, что $p_j = g \cos \alpha_j$ ($\cos \alpha_j$ — направляющий косинус нормали к характеристической поверхности), из (4) после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0^{(k)}}{\partial p_j} &= \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{a}{3} - 2\sqrt{-\frac{p^*}{3}} \cos(\Lambda_k^* + 2\pi k)}} \times \\ &\times (2 \cos \alpha_j \left(1 + \frac{a}{3} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{p_j^*}{\sqrt{-p^*}} \cos(\Lambda_k^* + 2\pi k) + \right. \\ &+ \frac{1}{3} \frac{\sqrt{4(p^*)^3} \sin(\Lambda_k^* + 2\pi k)}{\sqrt{4(p^*)^3 + 27(q^*)^2}} \sqrt{-\left(\frac{3}{p^*}\right)^3} \times \\ &\left. \left. \times \left(q_j^* + \frac{9\sqrt{3}q^*}{2p^*} p_j^* \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Здесь } \Lambda_k^* = \arccos\left(-\frac{q^*}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p^*}\right)^3}\right),$$

$$p^* = (a^2 - b^2)m^* - \frac{a^2}{3},$$

$$q^* = \frac{2a^3}{27} - \frac{a(a^2 - b^2)m^*}{3} + (a^3 - 3ab^2 + 2b^3)n^*,$$

$$p_j^* = 2(a^2 - b^2) \cos \alpha_j (1 - \cos^2 \alpha_j) - \frac{4a^2 \cos \alpha_j}{3},$$

$$q_j^* = \frac{4a^3}{9} - \frac{2a}{3}(a^2 - b^2)(m^* \cos \alpha_j +$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos \alpha_j (1 - \cos^2 \alpha_j) \Big) + \\
 & + 2(a^3 - 3ab^2 + 2b^3) \cos \alpha_j (m^* - \cos^2 \alpha_j (1 - \cos^2 \alpha_j)) \Big) \\
 & m^* = \sum_{i \neq j=1}^3 \cos^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_j, \\
 & n^* = \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3, \quad i, j = \overline{1,3}.
 \end{aligned}$$

Поскольку правая часть (5) не зависит от времени t , то координаты $x_j^{(k)}$, $k, j = \overline{1,3}$ точек упругой среды, до которых дошла энергия волнового возмущения, запишем в следующем виде

$$x_j^{(k)} = \frac{\partial p_0^{(k)}}{\partial p_j} t, \quad k, j = \overline{1,3}. \quad (6)$$

На рис. 1 показана безразмерная волновая поверхность одной из квазиоперечных волн в момент времени $t=1$, распространяющейся в кубически анизотропном материале, упругие свойства которого характеризуются коэффициентами $a = 2.24$, $b = 3.72$ (к таким материалам относятся, например, свинец [6]).

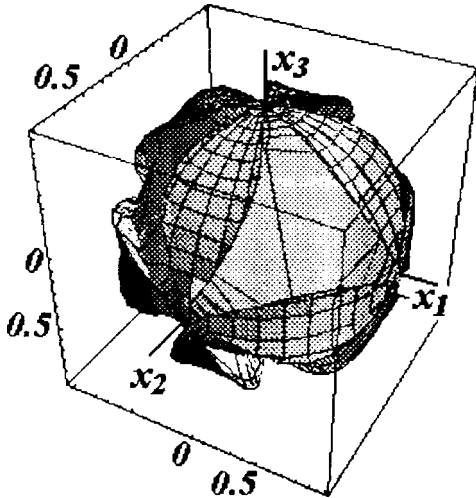


Рис. 1. Волновая поверхность одной из квазиоперечных волн.

Рис. 1 показывает, что при распространении одной из квазиоперечных волн возникают двенадцать лагун в виде полос, сходящихся у координатных осей. Чтобы определить абсолютные значения координат точек волнового фронта, следует умножить приведенные на рис. 1 безразмерные значения на величину численно равную скорости c для данной среды. Также отметим, что с помощью (6) можно достаточно легко построить кривые волновых фронтов в плоскостях, проходящих через начало основной системы координат, задавая в (5) соответствующим образом направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности.

Найдем скорости распространения упругих волн. Для этого запишем уравнение (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & (1 - v^2)^3 + a(1 - v^2)^2 + \\
 & + (a^2 - b^2)(1 - v^2)m^* + (a^3 - 3ab^2 + b^3)n^* = 0, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где $v_k = V_k/c$.

Отсюда

$$v_k = \sqrt{1 + \frac{a}{3} - 2\sqrt{\frac{p^*}{3}} \cos\left(\frac{\Lambda_k^* + 2\pi k}{3}\right)}. \quad (10)$$

На рис. 2 представлена безразмерная поверхность обратных скоростей, построенная с помощью (10), для кубически анизотропных материалов, упругие свойства которых характеризуются выше приведенными коэффициентами.

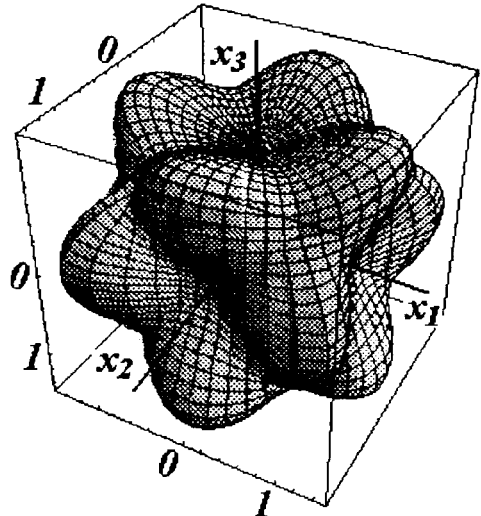


Рис. 2. Безразмерная поверхность обратных скоростей квазиоперечной волны $1/v_3$.

В заключение отметим, что анализ волновых поверхностей, поверхностей обратных скоростей и их сечений для кубически анизотропных материалов позволяет дополнить результаты исследований волновых движений в анизотропных материалах [4].

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф03М—171).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л. 1980.
2. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М. 1965.
3. Musgrave M.J.P. Crystal Acoustics. San Francisco. 1970.
4. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М. 1982.
5. Скляр О. Н., Босяков С. М. // Материалы, технологии, инструменты. 2000. Т. 5. № 4. С. 26—28.
6. Современная кристаллография Т. IV. Физические свойства кристаллов. М. 1984.