

СВЯЗАННОСТЬ ТЕПЛОВОГО И МЕХАНИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ В НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Босяков С.М., Скляр О.Н.

On the equations of weak disruptions for combined equations of a motion isotropic and cubic anisotropic mediums noted in builders of a stress tensor, the expressions for coefficients of a connectedness of mechanical and thermal fields are obtained. It is shown, that at magnification of dimensionality of a problem (on spatial coordinate) the values of coefficients of a connectedness also will increase.

Решения динамических и статических задач, найденные в рамках классической и обобщенной теории термоупругости, незначительно отличаются от решений теории упругости или теории теплопроводности, поскольку связанность полей деформаций и температур незначительная. Однако исследование закономерностей распространения термоупругих волн показывает, что качественное отличие процессов распространения упругих и термоупругих волн является принципиальным [1, 2]. Связанность механического и температурного полей в таких задачах характеризуется безразмерным коэффициентом связанности, который для анизотропной среды можно представить в следующем виде:

$$\epsilon_k = \beta_{kk}^2 T_0 / c_1^2 C_v, \quad (1)$$

где $\beta_{kk} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ii} A_{kkii}$; α_{ii} — коэффициент линейного теплового расширения; A_{kkii} — постоянные упругости; $c_1 = \sqrt{A_{1111}}/\rho$ — скорость распространения упругой продольной волны; ρ — плотность среды; $C_v = c_v \rho$; c_v — теплоемкость среды при постоянной деформации; T_0 — начальная температура.

Число независимых термомеханических констант β_{kk} для анизотропных сред не превышает трех [3], поэтому количество коэффициентов связанности также не больше трех. Кубически анизотропные и изотропные среды характеризуются одним коэффициентом связанности, поскольку в этом случае $\beta = \beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33}$.

Следует отметить, что размерность системы разрешающих дифференциальных уравнений (число пространственных координат), записанной для компонент вектора перемещений, не влияет на величину коэффициента связанности. Так, при исследовании как трехмерных, двумерных, так и одномерных волновых движений в изотропной и кубически анизотропной среде коэффициенты связанности принимаются соответственно [2, 4]

$$\epsilon_u = \alpha_u^2 (3A_{1111} + 4A_{1212})^2 T_0 / c_1^2 C_v, \\ \epsilon_a = \alpha_a (A_{1111} + 2A_{1122}) / c_1^2 C_v. \quad (2)$$

Однако в случае если система уравнений записана в компонентах тензора напряжений, коэффициенты связанности в задачах различной

размерности не совпадают. Рассмотрим одномерную по пространственной координате систему уравнений движения изотропной термоупругой среды в напряжениях:

$$c_1^2 \partial_1^2 \sigma_{11} = \ddot{\sigma}_{11} + \beta \ddot{T} / \rho, \\ K \partial_1^2 T - (c_v + \beta^2 T_0 / A_{1111}) (\dot{T} + \tau \ddot{T}) = \beta T_0 (\dot{\sigma} + \tau \ddot{\sigma}) / A_{1111}, \quad (4)$$

где K — коэффициент теплопроводности; T — абсолютная температура; τ — время релаксации тепловых возмущений; $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$; точкой обозначено дифференцирование по времени.

Уравнение характеристической плоскости $Z(t, x) = 0$ системы (4) имеет следующий вид:

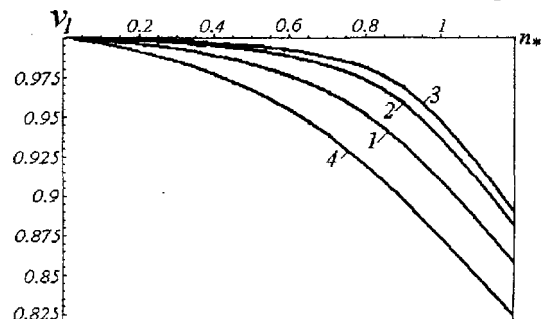
$$\begin{vmatrix} c_1^2 p^2 - p_0^2 & -\beta p_0^2 / \rho \\ -\beta T_0 \tau p_0^2 / A_{1111} & K p^2 - (c_v + \beta^2 T_0 / A_{1111}) p_0^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

$$p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

После несложных преобразований из (5) получим

$$v_i = \sqrt{\left(1 + 1/n_* + \epsilon_u^{(i)} \mp \sqrt{1/n_* + 2(\epsilon_u^{(i)} - 1) + n_* (1 + \epsilon_u^{(i)})^2}\right) / 2}, \\ i = 1, 2, \quad (6)$$

n_* — безразмерный параметр, определяющий число колебаний за время τ ; $v_i = V_i / c_1$; V_1 — скорость распространения тепловой волны; сопровождающейся полем деформаций; V_2 — скорость распространения квазипродольной упругой волны, сопровождающейся тепловым полем ($V = p / p_0$); коэффициент $\epsilon_u^{(i)}$ в выражениях (6) совпадает с ϵ_u в (2). На рис. 1 представлены графики зависимости безразмерных скоростей v_1 и v_2 от параметра n_* (необходимые числовые данные взяты из [2, 6]).



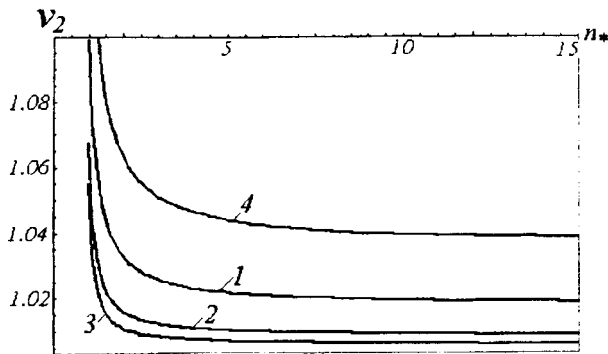


Рис. 1. Зависимости безразмерных скоростей v_1 и v_2 от параметра n_* : 1 — алюминий; 2 — медь; 3 — сталь; 4 — свинец.

Аналогичный подход, реализованный применительно к трехмерным и двумерным системам уравнений движения изотропной термоупругой среды, записанных в напряжениях, показывает, что коэффициенты связанности в этих случаях отличаются от ϵ_u , и имеют следующий вид (верхний индекс указывает размерность задачи):

$$\epsilon_u^{(3)} = 3\alpha_u^2 (3A_{1111} + 4A_{1122})T_0/c_v, \quad (7)$$

$$\epsilon_u^{(2)} = \alpha_u^2 (3A_{1111} + 4A_{1122})^2 T_0/c_v (A_{1111} - A_{1122}).$$

Коэффициент $\epsilon_u^{(1)}$ совпадает с ϵ_u в формулах (2). Значения коэффициентов связанности $\epsilon_u^{(k)}$, $k = 1, 3$ для некоторых изотропных сред, вычисленные по числовым данным [5, 6], приведены в табл. 1.

Как следует из таблицы 1, коэффициенты свя-

Таблица 1

Коэффициенты связанности для изотропных сред

| Коэффициенты связанности | Материалы | | | |
|--------------------------|-----------|--------|--------|--------|
| | алюминий | медь | сталь | свинец |
| $\epsilon_u^{(3)}$ | 0.0526 | 0.0243 | 0.0153 | 0.0852 |
| $\epsilon_u^{(2)}$ | 0.0470 | 0.0219 | 0.0141 | 0.0819 |
| $\epsilon_u^{(1)}$ | 0.0356 | 0.0168 | 0.0114 | 0.0733 |

Таблица 2

Коэффициенты связанности для кубически анизотропных сред

| Коэффициенты связанности | Материалы | | | |
|--------------------------|-----------|----------|--------|--------|
| | серебро | молибден | золото | никель |
| $\epsilon_u^{(3)}$ | 0.0402 | 0.0082 | 0.0352 | 0.0191 |
| $\epsilon_u^{(2)}$ | 0.0383 | 0.0069 | 0.0342 | 0.0175 |
| $\epsilon_u^{(1)}$ | 0.0336 | 0.0048 | 0.0315 | 0.0140 |

занности в динамических задачах термоупругости в напряжениях возрастают при увеличении размерности задачи, и изменение коэффициентов связанности в зависимости от термомеханических свойств материала может составлять 35%. Тем не менее, исследование методами теории слабых разрывов, например, двумерных волновых движений в изотропной термоупругой среде, характеризующейся коэффициентом $\epsilon_u^{(2)}$, показывает, что зависимости $v_1(n_*)$ и $v_2(n_*)$ при нулевом угле наклона нормали к характеристической поверхности (т. е. в направлении оси $x_1 \equiv x$) имеют вид зависимостей, представленных на рис. 1.

Исследование одномерных волн напряжений в анизотропных термоупругих средах методом характеристик сводится к решению характеристического уравнения (5), причем коэффици-

енты связанности имеют вид (1) [4]. В трехмерных и двумерных случаях выражения для коэффициентов связанности принимают другой вид. Приведем выражения для коэффициентов связанности теплового поля и поля напряжений, полученные при применении метода характеристик к системам уравнений движения кубически анизотропной термоупругой среды:

$$\epsilon_a^{(3)} = 3\alpha_a^2 (A_{1111} + 2A_{1122})T_0/c_v,$$

$$\epsilon_a^{(2)} = 2\alpha_a^2 (A_{1111} + 2A_{1122})^2 T_0/c_v (A_{1111} + A_{1122}), \quad (7)$$

$$\epsilon_a = \alpha_a (A_{1111} + 2A_{1122})/c_1^2 c_v.$$

В таблице 2 приведены значения коэффициентов связанности для некоторых кубически анизотропных материалов, рассчитанные по числовым данным [5, 6].

Из таблицы 2 следует, что коэффициенты связности для кубически анизотропных материалов также возрастают с увеличением пространственной размерности задачи, причем коэффициенты связности $\epsilon_a^{(1)}$ и $\epsilon_a^{(3)}$ полей температур и деформаций, например, для молибдена отличаются на 40%.

В заключение отметим, что исследование трехмерных и двумерных волновых движений методом характеристик, в частности, в термоупругих кубически анизотропных средах носит гораздо более сложный характер по сравнению с изотропными средами, поскольку скорости распространения термоупругих волн зависят от углов наклона нормали к поверхности характеристик [7].

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект №Ф03М—171).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
2. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности: систем-

но-структурный подход. — Мн.: Навука і тэхніка, 1993. — 279 с.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987. — 248 с.
4. Sharma J. N., Singh N. Propagation of generalized thermoelastic waves in cubic crystals // Arch. Mech. — 1990. — Vol. 42, № 1. — P. 19—30.
5. Современная кристаллография. Физические свойства кристаллов. — М.: Наука, 1984. — 584 с.
6. Таблицы физических величин. Справочник. Под редакцией И. К. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976. — 1008 с.
7. Мартыненко М. Д., Босяков С. М. Метод характеристик для динамической термоупругой задачи кубически анизотропного тела в напряжениях. — ИФЖ. 2002. Т 75, № 3. С. 74—81.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Босяков С.М., Журавков М.А., Медведев Д.Г.

The structure of course of laboratory operations «Dynamic problems of the theory of elasticity», designed on faculty of a theoretical and applied mechanics of the Byelorussian state university is submitted. The solution of the tasks of laboratory operations is under construction with the help of functions of computer system of «Mathematica». The example of realization of one of the tasks of laboratory operation «Radial oscillations of homogeneous isotropic mediums» is given.

Задачи динамики упругих изотропных и анизотропных сред занимают важное место в современной механике деформируемого твердого тела. Сведения о динамическом поведении упругих тел можно получить, например, при изучении напряжений, возникающих при вращении тел, при исследовании закономерностей распространения упругих волн от действия источника возбуждения силового характера и т. д. Подобные задачи [1, 2] достаточно сложны и громоздки, поэтому при их решении целесообразно использовать современные системы компьютерной математики, например, Mathematica. На кафедре теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета в соответствии с учебным планом подготовки механиков (специальность G

310303) разработан и апробирован курс лабораторных работ «Задачи динамической теории упругости», включающий задания по динамической теории упругости, решение которых строится с помощью функций системы Mathematica. Эта программа позволяет находить выражения для производных и первообразных заданных функций, решать в аналитическом виде сложные алгебраические и дифференциальные уравнения, производить всевозможные символьные преобразования математических выражений, а также визуализировать полученные результаты [3].

Программа курса «Задачи динамической теории упругости» предусматривает выполнение лабораторных работ, причем лабораторные работы могут включать от одного до трех за-