

Из таблицы 2 следует, что коэффициенты связанности для кубически анизотропных материалов также возрастают с увеличением пространственной размерности задачи, причем коэффициенты связанности  $\epsilon_a^{(1)}$  и  $\epsilon_a^{(3)}$  полей температур и деформаций, например, для молибдена отличаются на 40%.

В заключение отметим, что исследование трехмерных и двумерных волновых движений методом характеристик, в частности, в термоупругих кубически анизотропных средах носит гораздо более сложный характер по сравнению с изотропными средами, поскольку скорости распространения термоупругих волн зависят от углов наклона нормали к поверхности характеристик [7].

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект №Ф03М—171).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
2. Шапков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности: систем-

но-структурный подход. — Мн.: Навука і тэхніка, 1993. — 279 с.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987. — 248 с.
4. Sharma J. N., Singh N. Propagation of generalized thermoelastic waves in cubic crystals // Arch. Mech. — 1990. — Vol. 42, № 1. — P. 19—30.
5. Современная кристаллография. Физические свойства кристаллов. — М.: Наука, 1984. — 584 с.
6. Таблицы физических величин. Справочник. Под редакцией И. К. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976. — 1008 с.
7. Мартыненко М. Д., Босяков С. М. Метод характеристик для динамической термоупругой задачи кубически анизотропного тела в напряжениях. — ИФЖ. 2002. Т 75, № 3. С. 74—81.

## ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Босяков С.М., Журавков М.А., Медведев Д.Г.

*The structure of course of laboratory operations «Dynamic problems of the theory of elasticity», designed on faculty of a theoretical and applied mechanics of the Byelorussian state university is submitted. The solution of the tasks of laboratory operations is under construction with the help of functions of computer system of «Mathematica». The example of realization of one of the tasks of laboratory operation «Radial oscillations of homogeneous isotropic mediums» is given.*

Задачи динамики упругих изотропных и анизотропных сред занимают важное место в современной механике деформируемого твердого тела. Сведения о динамическом поведении упругих тел можно получить, например, при изучении напряжений, возникающих при вращении тел, при исследовании закономерностей распространения упругих волн от действия источника возбуждения силового характера и т. д. Подобные задачи [1, 2] достаточно сложны и громоздки, поэтому при их решении целесообразно использовать современные системы компьютерной математики, например, Mathematica. На кафедре теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета в соответствии с учебным планом подготовки механиков (специальность G

310303) разработан и апробирован курс лабораторных работ «Задачи динамической теории упругости», включающий задания по динамической теории упругости, решение которых строится с помощью функций системы Mathematica. Эта программа позволяет находить выражения для производных и первообразных заданных функций, решать в аналитическом виде сложные алгебраические и дифференциальные уравнения, производить всевозможные символьные преобразования математических выражений, а также визуализировать полученные результаты [3].

Программа курса «Задачи динамической теории упругости» предусматривает выполнение лабораторных работ, причем лабораторные работы могут включать от одного до трех за-

даний. На выполнение одного задания лабораторной работы в зависимости от его объема и сложности может быть отведено два или три академических часа.

Лабораторная работа №1 «Напряженно-деформированное состояние тел под действием центробежных сил» включает три задания: определение НДС тонкого однородного кольцевого диска, определение НДС сплошного и полого однородного цилиндров. Выполнение этих заданий предусматривает решение дифференциальных уравнений, систем линейных алгебраических уравнений, операции с символьными выражениями, а также построение эпюр напряжений.

Лабораторная работа №2 «Радиальные колебания однородных изотропных тел» включает следующие задания: определение частот собственных радиальных колебаний сплошного и полого шаров, а также однородного кольцевого диска. Особенностью выполнения этих заданий с помощью системы Mathematica является применение функций системы для численного решения трансцендентных уравнений методом Ньютона, построение графиков решения уравнений, разложение в ряд функций Бесселя при расчете собственных частот радиальных колебаний.

Лабораторная работа №3 «Волновые процессы в прямолинейном однородном бесконечном и изотропном стержне кругового сечения» предусматривает выполнение следующих заданий: определение фазовой скорости и коэффициента затухания волн кручения, а также определение зависимости фазовой скорости распространения продольной волны от циклической частоты.

Следующие четыре лабораторные работы посвящены исследованию закономерностей распространения упругих волн в неограниченных изотропных средах: «Поверхностные волны Рэлея», «Волны Лява», «Распространение волн в упругом слое», а также «Отражение упругой продольной волны от свободной поверхности».

Лабораторная работа № 8 «Волновые движения в бесконечном пространстве с полостью» предусматривает выполнение двух заданий: определение перемещений и напряжений в бесконечном пространстве со сферической и цилиндрической полостью.

Приведем пример выполнения одного из заданий лабораторной работы №2 «Радиальные колебания однородных изотропных сред», которое заключается в определении частот собственных радиальных колебаний упругого шара радиуса  $b$ , внешняя поверхность которого свободна от напряжений.

Радиальные колебания упругого шара происходят в случае, если шар нагрузить радиаль-

ными силами, равномерно распределенными по его поверхности, а затем эти силы внезапно убрать [1]. Поскольку такие колебания носят центрально-симметричный характер, то соответствующие уравнения движения целесообразно записать в сферической системе координат  $(r, \beta, \alpha)$ . В этом случае перемещения  $u_\alpha = u_\beta = 0$ , а отличным от нуля будет перемещение  $u_r$ , которое выразим через неизвестную функцию  $W(r)$ ,  $0 \leq r \leq b$  следующим образом [1]

$$u_r(r, t) = W(r) r \cos(pt + \varepsilon), \quad (1)$$

где  $p$  — круговая частота;  $\varepsilon$  — начальная фаза колебаний.

Функцию  $W(r)$  находим из дифференциального уравнения движения:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{2u_r}{r^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2 u_r}{dt^2}, \quad (2)$$

$\lambda, \mu$  — постоянные упругости Ламе;  $\rho$  — плотность материала.

Решение (2) относительно  $W(r)$  находим с помощью функции DSolve без предварительной подстановки (по умолчанию константы интегрирования обозначаются C[i]):

```
РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ur[x,t]=W[x] x Cos[p t + ε];
DSolve[Dxx ur[x,t] + 2 Dc ur[x,t]/x -
2 ur[x,t]/x^2 - ρ Dct ur[x,t]/(λ + 2 μ) == 0,
w[x],x]//Simplify
```

Из частных решений уравнения (2) выбираем те, которые не имеют особенности в нуле, т. к. ввиду центрально-симметричного характера колебаний предполагаем, что  $u_r(0, t) = 0$  [1]. Значит, в полученном решении приравняем нулю константу интегрирования при той функции, которая не удовлетворяет этому требованию:

### ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

% /.C[i] -> 0

Для определения другой постоянной интегрирования C[j] используем граничное условие задачи

$$\sigma_r = 0 \text{ при } r = b, \quad (3)$$

где

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda \frac{u_r}{r}. \quad (4)$$

Подставим функцию  $u_r(r, t)$  в граничное условие (3):

```
ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ
W[r]=solution;
{σr = (λ+2 μ) Dc u[r,t]+2 λ u[r,t]/r} /.r->b
//Simplify
```

Чтобы получить уравнение частот необходимо выделить коэффициент при константе C[j]. Для этого применяем функцию CoefficientList, которая возвращает список коэффициентов перед степенями переменной в

выражении, начиная с нулевой степени этой переменной:

**СПИСОК КОЭФФИЦИЕНТОВ**  
**CoefficientList[%, C[j]]**

Для нахождения собственных частот радиальных колебаний, полученное выражение приравниваем нулю. В результате будем иметь трансцендентное уравнение относительно частоты  $p$ , которое не имеет аналитического решения. Однако решение этого уравнения возможно численными методами, например, с помощью функции FindRoot, которая находит одно решение уравнения методом Ньютона по начальному приближению. Уравнение  $\cos(pt + \varepsilon) = 0$  не рассматриваем, поскольку оно приводит к тривиальному решению.

Предварительно будет полезна графическая визуализация решения уравнения, т. к. это позволит убедиться в существовании решения, определить количество корней и установить необходимые начальные приближения. На рис. 1 показан график функции, представляющей левую часть частотного уравнения для стального шара радиусом  $b = 0.2$  м (частота  $p$  изменяется от нуля до  $1 \text{ Mc}^{-1}$ , числовые данные взяты из [4]).

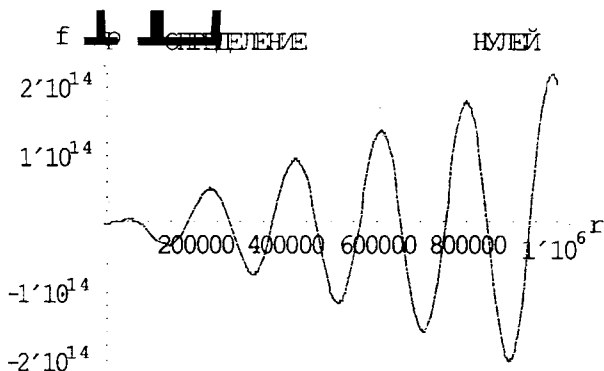


Рис. 1. Графическое решение частотного уравнения радиальных колебаний стального шара.

При построении зависимости  $f(p)$  для цветового выделения графика примените директива GrayLevel[Ci], позволяющая задавать степень плот-

ности серого цвета (значения Ci указываются в относительных единицах — от 0 до 1).

Как следует из рис. 1, на заданном промежутке существует десять нетривиальных решений (при  $p = 0$  колебания не происходят). Найдем одно решение вблизи точки пересечения  $f(p)$  с осью абсцисс (начальная точка  $0.15 \text{ Mc}^{-1}$ ):

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ**  
FindRoot[numerical\_expression==0, {p, 150000}]

Получим  
{p->182499.}

Меняя начальную точку, определяем все частоты собственных радиальных колебаний.

Одновременно несколько корней частотного уравнения можно найти, используя «таблицу» решений. В этом случае применяем функцию Table совместно с функцией FindRoot, в которую последовательно подставляются различные начальные приближения [3].

В заключение отметим, что данный курс лабораторных работ может выполняться как студентами-механиками, так и студентами-математиками.

**ЛИТЕРАТУРА:**

1. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
2. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. — М.: Высшая школа, 1977. — 216 с.
3. Дьяконов В. Mathematica 4. Учебный курс. — Санкт-Петербург: Питер, 2001. — 656 с.
4. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев и др. — Мн.: Наука и техника, 1988. — 464 с.