

ЛИТЕРАТУРА:

1. О самоорганизации в технологическо-эксплуатационных процессах при комбинированных методах обработки материалов / П.И.Ящерицын, Л.М.Кожуро, И.А.Сенчило, М.Л.Хейфец // Доклады АН Беларуси. — 1995. — Т. 39. — № 1. — С. 112 — 116.
2. Подураев В.Н. Технология физико-химических методов обработки. — М.: Машиностроение, 1985. — 264 с.
3. Рыжов Э.В., Аверченков В.И. Оптимизация технологических процессов механической обработки. — Киев: Наукова думка, 1989. — 192 с.
4. Голоденко Б.А., Смоленцев В.П. Организация целенаправленного формирования новых методов комбинированной обработки // Вестник машиностроения. — 1994. — № 4. — С. 25 — 28.
5. Хейфец М.Л., Кожуро Л.М., Мрочек Ж.А. Процессы самоорганизации при формировании поверхностей. — Гомель: ИММС НАНБ, 1999. — 276 с.
6. Проектирование технологических комплексов высокоэффективной обработки изделий на основе многофакторной оптимизации / П.И.Ящерицын, Л.М.Кожуро, М.Л.Хейфец, Б.П.Чемисов // Доклады АН Беларуси. — 1997. — Т. 41. — № 3. — С. 121 — 127.
7. Артоболевский И.И., Ильинский Д.Я. Основы синтеза машин автоматического действия. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
8. Совершенствование производственных систем на основе создания условий для самоорганизации технологических процессов и объектов / П.И.Ящерицын, А.А.Шипко, М.Л.Хейфец, Н.Н.Попок // Доклады АН Беларуси. — 1996. — Т. 40. — № 1. — С. 118 — 121.
9. Дружинин В.В., Жонторов Д.С. Проблемы системологии: проблемы теории сложных систем. — М.: Сов. радио, 1976. — 296 с.
10. Синергетические аспекты физико-химических методов обработки / А.И.Гордиенко, М.Л.Хейфец, Б.П.Чемисов и др. — Мн.: ФТИ НАНБ; Новополоцк: ПГУ, 2000. — 172 с.
11. Обработка износостойких покрытий / Под ред. Ж.А.Мрочка. — Мн.: ДизайнПРО, 1997. — 208 с.
12. Акулович Л.М. Термомеханическое упрочнение деталей в электромагнитном поле. — Новополоцк: ПГУ, 1999. — 240 с.
13. Шипко А.А., Поболь И.Л., Урбан И.Г. Упрочнение сталей и сплавов с использованием электронно-лучевого нагрева. — Мн.: Наука и техника, 1995. — 280 с.
14. Интеллектуальное производство: состояние и перспективы развития / Под ред. М.Л.Хейфеца и Б.П.Чемисова. — Новополоцк: ПГУ, 2002. — 268 с.

ОЦЕНКА И СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ КРУЧЕНИЯ

Кондратюк В.Ф., Вербило И.Н., Эльхади Саид

Simple formulas, that give satisfactory results, of tension calculation of torsion of arbitrary section rods are presented here.

В настоящее время в расчетах конструкций широко используются универсальные компьютерные комплексы на базе методов теории конечных элементов с мощной сервисной поддержкой. Не потеряли своего значения и «прозрачные» методы сопротивления материалов (одномерные модели) и аналитические приближенные методы теории упругости, в частности, вариационные. С помощью последних можно получать решения с достаточной для практических целей точностью по сильно усеченным математическим моделям — по первому приближению. Это дает возможность оперативно оценить различные конструктивные решения на ранних стадиях проектирования, а также при модернизации конструкции, позволяет выполнить тестирование приобретаемых компьютерных программ, а учитывая, что на практике принимаются значительные коэффициенты запаса, полу-

ченные приближенные решения могут оказаться достаточными.

Рассматриваем задачу кручения конструкции с произвольным поперечным сечением и возможно переменным по ее длине.

В работе [1] рассмотрен расчет кручения рамы автомобиля от воздействия дороги заданием кинематической связи — имитация неровности проезжей части. Упругие перемещения по трем координатам аппроксимировались степенными рядами. Обобщенные перемещения вычислялись на основе вариационного уравнения Лагранжа (метод Треффтца) в результате решения 37 линейных алгебраических уравнений (24 вариационных, 12 уравнений внутренних связей, одно уравнение кинематической связи, задающее перемещение некоторой точки).

В работе [2] показано, что аналогичная задача может быть сведена к нахождению только двух

перемещений: деформации сечений (перемещений $u = Uyz$ вдоль продольной оси x) и трансверсальному $w_\tau = W_\tau r x$ (y, z – горизонтальная и вертикальная оси сечения, r – его линейная полярная координата). Обобщенные перемещения U, W_τ находятся в первом приближении по двум алгебраическим уравнениям. Коэффициенты уравнений при неизвестных содержат объемные интегралы, представляющие собой физические (материал неоднороден, модуль сдвига — функция координат) или геометрические моменты второго порядка, умноженные на постоянный модуль сдвига G , если материал конструкции однородный.

В настоящей статье рассмотрим элемент постоянного поперечного сечения, выполненный из однородного материала.

Разрешающая система уравнений:

$$bU + JW_\tau = 0, \quad JU + bW_\tau = T;$$

$$b = G \int_V (y^2 + z^2) dA, \quad J = G \int_V (y^2 - z^2) dA$$

или $b = G(J_z + J_y)$, $J = G(J_z - J_y)$, J_z, J_y – осевые моменты инерции.

Определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & J \\ J & b \end{vmatrix} = b^2 - J^2; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & J \\ T & b \end{vmatrix} = -JT; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b & 0 \\ J & T \end{vmatrix} = bT$$

Решение системы уравнений:

$$U = \Delta_1 / \Delta = -JT / (b^2 - J^2); \quad W_\tau = \Delta_2 / \Delta = bT / (b^2 - J^2),$$

$$b^2 - J^2 = 4G^2 J_z J_y.$$

Относительный угол закручивания ($x=1$):

$$\theta = w_\tau / r = W_\tau x = W_\tau \cdot 1 = bT / (b^2 - J^2).$$

Крутящий момент T , выраженный через относительный угол закручивания:

$$T = [(b^2 - J^2) / b] \theta = 4G [J_z J_y / (J_z + J_y)] \theta.$$

Сравнение результатов с точным решением по угловым деформациям для некоторых сечений дано в работе [2]. Здесь для отдельных сечений приведем сравнение по напряжениям с точными и приближенными решениями [3]. Так как в указанном источнике напряжения выражаются через крутящий момент T (точное решение) или через относительный угол закручивания θ (приближенное решение), выразим напряжения через эти параметры.

Касательные напряжения, выраженные через обобщенные перемещения согласно уравнениям Коши и Гука при перемещениях

$$u = U y z, \quad v = -W_\tau x y, \quad w = W_\tau x y;$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G(U - W_\tau) z;$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G(U + W_\tau) y;$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = (-W_\tau + W_\tau) = 0.$$

Касательные напряжения, выраженные через крутящий момент:

$$\tau_{xy} = -\frac{T}{2J_y} z; \quad \tau_{xz} = \frac{T}{2J_z} y.$$

Касательные напряжения, выраженные через относительный угол закручивания:

$$\tau_{xy} = -2G \frac{J_z}{J_z + J_y} \theta z; \quad \tau_{xz} = 2G \frac{J_y}{J_z + J_y} \theta y.$$

Сравнение с точным решением

по наибольшим касательным напряжениям

1. Стержень круглого поперечного сечения диаметром d .

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2} \frac{d}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{T}{W_p},$$

W_p – полярный

момент сопротивления,

совпадает с точным решением [3, с. 235].

2. Стержень прямоугольного сечения размерами $b \times h$ ($h \geq b$).

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2} \frac{b}{\frac{hb^3}{12}} = \frac{T}{0,333hb^2},$$

$W_x = 0,333hb^2$ – момент сопротивления

при кручении.

Решение совпадает с точным при $h/b > 10$.

Момент сопротивления при кручении в точном решении определяется формулой [3, с. 238]:

$$W_x = \alpha hb^2, \quad \text{где } \alpha = 0,208 \div 0,313 \text{ при } h/b = 1 \div 10.$$

Наибольшее расхождение значений напряжений по предлагаемому и точному решениям обнаруживается при кручении стержня квадратного сечения и составляет 37,6% по отношению к точному решению.

Сравнение с приближенным решением [3, табл. 23, с. 248]:

по наибольшим касательным напряжениям

1. Стержень коробчатого квадратного сечения (рис. 1).

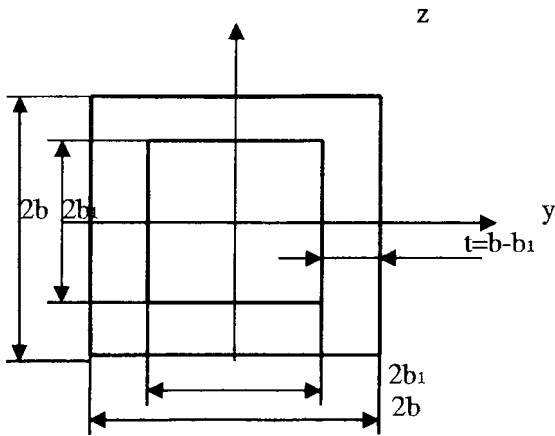


Рис. 1. Коробчатое квадратное сечение

Предлагаемое приближенное решение:

$$\tau_{\max}^{\text{предл}} = 2G \frac{J_y}{J_z + J_y} \theta \quad y_{\max} = 2G \frac{J_y}{2J_y} b \theta = Gb\theta,$$

так как $J_y = J_z$, $y_{\max} = b$.

Приближенное решение по [3]:

$$\tau_{\max}^{[3]} = (\gamma + 1)G\theta t,$$

где t — толщина стенок сечения; γ — коэффициент, зависящий от отношения b/t .

Для возможности сопоставления результатов выразим касательное напряжение приближенного решения через параметр b .

Обозначим $b/t = k_{b/t}$. Тогда:

$$\tau_{\max}^{[3]} = (\gamma + 1)G\theta b / k_{b/t}.$$

Предлагаемое приближенное решение не зависит от отношения b/t , а приближенное решение по [3] — зависит.

Наибольшие касательные напряжения по разным решениям соотносятся следующим образом:

$$\tau_{\max}^{[3]} = K \tau_{\max}^{\text{предл}}, \quad \text{где } K = (\gamma + 1) / k_{b/t}.$$

Величина отклонения предлагаемого приближенного решения по отношению к аналогичному справочному, приведенная в таблице, вычислена по формуле:

Таблица

Зависимости между параметрами сечения

$k_{b/t}$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	10,0	20,0
γ	1,154	1,681	2,194	2,701	3,206	3,709	4,713	9,720	19,723
K	1,436	1,341	1,278	1,234	1,202	1,177	1,143	1,072	1,036
δ %	30,4	25,4	21,8	19,0	16,8	15,0	12,5	6,7	3,5

$$\delta = \frac{\tau_{\max}^{[3]} - \tau_{\max}^{\text{предл}}}{\tau_{\max}^{[3]}} 100\%.$$

ВЫВОДЫ

1. Выполнена частичная сравнительная оценка универсального алгоритма приближенного решения задачи кручения стержней (рам) произвольной геометрической структуры.
2. Представленную математическую модель обеспечивают два алгебраических уравнения, в коэффициенты которых помимо модуля сдвига входят лишь два геометрических параметра — осевые моменты инерции. Сумма их

определяет угол закручивания, а разность — депланацию.

3. Получены окончательные формулы для вычисления касательных напряжений при кручении элементов конструкций из однородного материала постоянного поперечного сечения в зависимости от крутящего момента и относительного угла закручивания.
4. Сравнение с некоторыми известными решениями обнаруживает достаточную для практических целей точность, по крайней мере, по наибольшим напряжениям. Анализ сравнительной оценки показал:
 - сравнение решений при кручении стержня круглого сечения обнаружило полное совпадение результатов;

- решение задачи кручения стержня прямоугольного сечения совпадает с точным по наибольшим напряжениям при соотношении сторон больше 1:10; при меньших соотношениях сторон результаты также вполне приемлемы.
 - замечена тенденция быстрого уменьшения отклонения результатов расчета с уменьшением толщины стенок в коробчатом сечении при сравнении с приближенным решением.
5. Алгоритм может быть использован в практике оперативной оценки вариантов конструктивных решений при проектировании и модернизации конструкций.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кондратюк В.Ф. Оценка жесткости и прочности базовых конструкций горных машин // Горная механика — 1999. — № 3 — 4. — С. 34 — 36.
2. Кондратюк В.Ф., Цыбулько В.А., Сологуб Д.П. К вопросу определения деформаций рам мобильных машин // Межведомственный сб. научно-методических статей / Минск: УП «Технопринт», 2002. — С. 136 — 138.
3. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наукова думка, 1988. — 736 с.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА УСКОРИТЕЛЯ ДРОБИЛКИ КАК СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Крушевский А.Е., Воробьев В.В., Кондратюк В.Ф., Шепель С.Р.

The formula for the calculation of natural frequency of stone crusher was derived.

Пусть (рис. 1):

- φ_1 — угол поворота ротора двигателя;
- φ_2 — угол поворота вала, соединяющего ротор с карданом;
- φ_3 — угол поворота вала, соединяющего кардан с ускорителем;
- φ_4 — угол поворота ускорителя;
- J_1 — момент инерции ротора электродвигателя;
- J_4 — момент инерции ускорителя.



Рис. 1. Принципиальная механическая схема механизма

На основании теоремы об изменении кинетического момента запишем:

$$J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -c_2 (\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$J_4 \frac{d^2 \varphi_4}{dt^2} = -c_3 (\varphi_4 - \varphi_3),$$

где c_2, c_3 — жесткости валов 2 и 3 при кручении.

Передаточное число $\frac{\varphi_2}{\varphi_3} = \frac{1}{i_{23}}$ — условие равенства окружных усилий в кардане.

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_4 - \varphi_3} = -\frac{c_3}{c_2} i_{23},$$

где i_{23} — передаточное число кардана, включающего два шарнира Гука:

$$i_{23} = i_{20} / i_{03} = \frac{\cos \alpha_1 / \cos \alpha_2}{(1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \gamma_1) / (1 - \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \gamma_2)},$$

где α_1 — угол между осью вала 2 и осью вилки со шлицами; α_2 — угол между осью вала 3 и осью вилки со шлицами; γ_1 — угол между плоскостью ведущей вилки с плоскостью осей: оси вала 2 и оси вилки со шлицами; γ_2 — угол между плоскостью ведомой вилки с плоскостью осей: оси вала 3 и оси вилки со шлицами.

Итак, имеем систему двух дифференциальных уравнений и двух уравнений связей:

$$J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -c_2 (\varphi_1 - \varphi_2), \quad J_4 \frac{d^2 \varphi_4}{dt^2} = -c_3 (\varphi_4 - \varphi_3);$$

$$\varphi_3 = i_{23} \varphi_2, \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{\varphi_4 - \varphi_3} = -\frac{c_3 i_{23}}{c_2}.$$