делается вывод о дифференцируемости самой реализации.

На рис. 1 представлен пример корреляционной функции $R(z)=R_0\ \exp\left(-\alpha^2 z^2\right)\ \cos(\beta z)$ дифференцируемой реализации.

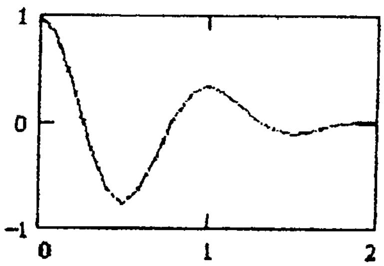
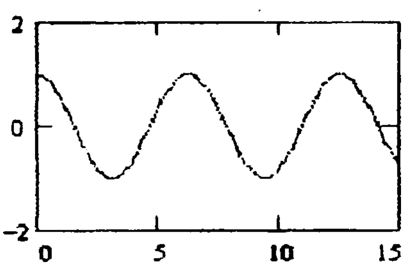


Рис. 1. График корреляционной функции R(z).

Корреляционная функция содержит в общем случае периодические и апериодические составляющие, которые отражают наличие в структуре среды периодичности и непериодичности. На рис. 2 (а, б) представлены корреляционная функция *R(z)* и спектральная плотность *R(q)* в случае периодической реализации типа

$$\varepsilon'(x)=\sum_{m=-1}^{1}\varepsilon'_m \exp(-im\theta x),\quad \varepsilon'(0)=\varepsilon'\left(\frac{2\pi}{\theta}\right).$$

а) *R(z)*



б) *R(q)*

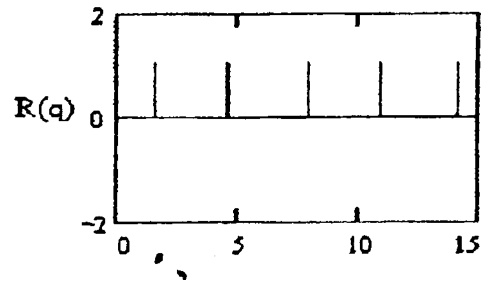


Рис. 2.

Знание дисперсии $R(0)$ позволяет оценить величину среднего квадратичного отклонения σ реализации $\varepsilon(x)$ (рис. 3).

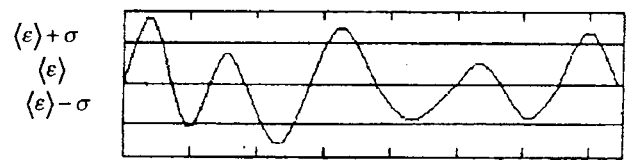


Рис. 3 . Реализация $\varepsilon(x)$ *дифференцируемой функции.*

Радиус корреляции позволяет оценить масштаб неоднородности, в случае слоистой среды — среднюю толщину слоя.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986, 286 с.
2. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. М.: Мир, 1981, т. 2, 317 с.
3. Чигарев А. В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. Мн.: УП «Технопринт», 2000, 425 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ОРТОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОТ ЗАДАННОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Алейникова О.И.

Based on the new conception of general formulas for components of stress pressure and moving of orthotropic in this work it is investigation influence of anisotropic propertus of material on deformation characteristics. Immersion of border of orthotrophic half space defending on action of normal load it is determined using method potential.

Одним из эффективных методов расчета осадки анизотропного полупространства под действием нормальной нагрузки является метод сведения рассматриваемой задачи к некоторой краевой задаче теории потенциала. При заданном значении нормального напряжения s_z на границе полупространства и при отсутствии касательных напряжений t_{zx} и t_{yz} задача сводится к нахождению одной квазигармонической функции, обладающей всеми характеристическими свойствами потенциала простого слоя.

В [2] разработан аналитический метод исследования напряженно — деформированного состояния в анизотропном упругом теле, обладающем тремя плоскостями упругой симметрии. Такие тела называются ортотропными. Исходя из общих формул для компонент напряжений и перемещений ортотропного тела в настоящей работе получены формулы для расчета деформационных характеристик анизотропного полупространства, находящегося под действием равномерно распределенной нагрузки.

Компоненты напряжений и перемещений в трехмерном анизотропном упругом теле, обладающем тремя плоскостями упругой симметрии, в зависимости от заданной нормальной статической нагрузки определяются по формулам

$$\sigma_x=\frac{\alpha_3 z}{\lambda_1}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial z\partial y^2}+\xi_1\frac{\partial^3\Phi}{\partial z^3}\right)+\alpha_3\left(\frac{2\xi_1}{\lambda_1}+\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+2\alpha_2\left(\xi_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma_y=\frac{\alpha_3 z}{\lambda_1}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial z\partial x^2}+\eta_1\frac{\partial^3\Phi}{\partial z^3}\right)+\alpha_3\left(\frac{2\eta_1}{\lambda_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial\lambda_1}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+2\alpha_2\left(\eta_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right),$$

$$\sigma_z=\frac{\alpha_3 z}{\lambda_1}\left(\xi_1\frac{\partial^3\Phi}{\partial z\partial x^2}+\eta_1\frac{\partial^3\Phi}{\partial z\partial x^2}\right)-\frac{\alpha_3}{\lambda_1}\left(\xi_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\eta_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right),\qquad(1)$$

$$\tau_{xy}=-\frac{z\alpha_3}{\lambda_1}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y\partial z}-2\alpha_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y},\ \tau_{xz}=-z\frac{\alpha_3\xi_1}{\lambda_1}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial z^2},\ \ \tau_{yz}=-z\frac{\alpha_3\mu_1}{\lambda_1}\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\partial z^2},$$

$$u=\frac{z\alpha_3}{2\lambda_1}\left(a_{44}\eta_1-a_{55}\xi_1-a_{66}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}+\frac{1}{2}\left[\alpha_3\left(a_{44}\frac{\partial\eta_1}{\partial\lambda_1}-a_{55}\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1}\right)+2\alpha_2\left(a_{44}\eta_1-a_{55}\xi_1-a_{66}\right)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$v=\frac{z\alpha_3}{2\lambda_1}\left(a_{55}\xi_1-a_{44}\eta_1-a_{66}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}+\frac{1}{2}\left[\alpha_3\left(a_{55}\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1}-a_{44}\frac{\partial\eta_1}{\partial\lambda_1}\right)+2\alpha_2\left(a_{55}\xi_1-a_{44}\eta_1-a_{66}\right)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

$$w=\frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha_3}{\lambda_1}\left[a_{66}-\left(1+\frac{\lambda_1}{\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1}\right)\left(a_{44}\eta_1+a_{55}\xi_1\right)\right]+2\alpha_2\left(a_{66}-a_{44}\eta_1-a_{55}\xi_1\right)\right\}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+$$
$$+\frac{z\alpha_3}{2\lambda_1}\left(a_{66}-a_{44}\eta_1-a_{55}\xi_1\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},$$

где $F(x,y_1,z_1)$ — квазигармоническая функция, удовлетворяющая уравнению $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1^2}=0$;

$y_1=\mu y$, $z_1=\lambda z$; a_i, l_1, x_1, h_1, m и l — безразмерные параметры, выраженные по соответствующим формулам через постоянные упругости a_{ij}; остальные обозначения приведены в [2].

В предельном случае, когда a_{ij} стремятся к соответствующим значениям изотропного тела, формулы (1) преобразуются в известные формулы Галина Л.А. для изотропного тела [3].

Пусть на границе полупространства действует нормальное напряжение s_z, равное интенсивности распределения давления $p(x,y)$ в области A_1

$\sigma_z=-p(x,y)$ в области A_1;

$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ в области A;

$\sigma_z=0$ в области A_2;

где $A_2=A - A_1$.

Тогда, исходя из третьего уравнения (1), запишем решение задачи

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\right)_{z_1\to0}=\begin{cases}\Omega(x,y_1), & \textit{в области}\ A_1,\\ \left(\frac{\eta_1}{\xi_1}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, & \textit{в области}\ A_2,\end{cases}$$

где $\Omega(x,y_1)=\left(\frac{\eta_1}{\xi_1}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\lambda_1}{\alpha_3\xi_1}p(x,y)$.

На основании теории потенциала простого слоя искомую функцию j(x,y_1,z_1) представим в виде

$$\varphi(x,y_1,z_1)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{s_1}\frac{\Omega(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2}{\sqrt{(x-\theta_1)^2+(y_1-\theta_2)^2+z_1^2}}-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\eta_1}{\xi_1}-\frac{1}{\mu_1^2}\right)\iint\limits_{s_2}\frac{\partial^2\Phi/\partial y^2 d\theta_1 d\theta_2}{\sqrt{(x-\theta_1)^2+(y_1-\theta_2)^2+z_1^2}}$$

Для изотропных и трансверсально –изотропных материалов постоянные упругости удовлетворяют условию

$$\frac{\eta_1}{\xi_1}=\mu^{-2} \text{ или } a_{23}\sqrt{a_{11}}=a_{13}\sqrt{a_{22}}\,.$$

При разработке и создании новых анизотропных материалов, обладающих трехосной симметрией, это соотношение также может выполняться. При этом решение задачи упрощается.

Пусть область A_1 представляет прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$.

Тогда

$$\varphi=\frac{\lambda_1 P}{2\pi\xi_1\alpha_3}\int\limits_{-b\mu_1}^{b\mu_1}d\theta_2\int\limits_{-a}^{a}\frac{d\theta_1}{\sqrt{(x-\theta_1)^2+(y-\theta_2)^2+z_1^2}}=$$

$$=\frac{\lambda_1 p}{4\pi\xi_1\alpha_3}\cdot\Bigg[\Big[\mu_1(y-b)\ln\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y-b)^2+z_1^2}}{x+a+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y+b)^2+z_1^2}}-$$

$$-\mu_1(y+b)\ln\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y+b)^2+z_1^2}}{x+a+\sqrt{(x+a)^2+\mu_1^2(y+b)^2+z_1^2}}+$$

$$+(x-a)\ln\frac{\mu_1(y-b)+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y-b)^2+z_1^2}}{\mu_1(y+b)+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y+b)^2+z_1^2}}-$$

$$-(x+a)\ln\frac{\mu_1(y-b)+\sqrt{(x+a)^2+\mu_1^2(y-b)^2+z_1^2}}{\mu_1(y+b)+\sqrt{(x+a)^2+\mu_1^2(y+b)^2+z_1^2}}+$$

$$+2z_1\Bigg(\operatorname{arctg}\frac{x-a+\mu_1(y-b)+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y-b)^2+z_1^2}}{z_1}-$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{x-a+\mu_1(y+b)+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y+b)^2+z_1^2}}{z_1}-$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{x+a+\mu_1(y-b)+\sqrt{(x+a)^2+\mu_1^2(y-b)^2+z_1^2}}{z_1}+$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{x+a+\mu_1(y+b)+\sqrt{(x+a)^2+\mu_1^2(y+b)^2+z_1^2}}{z_1}\Bigg)\Bigg]\Bigg]$$

С учетом полученного выражения для потенциала j можно найти компоненты перемещений и напряжений. В частности,

$$w(x,y,0)=\frac{\lambda_1^2 p}{4\pi\xi_1\alpha_3}\left\{\frac{\alpha_3}{\lambda_1}\left[a_{66}-\left(1+\frac{\lambda_1}{\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1}\right)(a_{44}\eta_1+a_{55}\xi_1)\right]+2\alpha_2(a_{66}-a_{44}\eta_1-a_{55}\xi_1)\right\}\times \quad (2)$$

$$\times\Big[\mu_1(y-b)\ln\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y-b)^2}}{x+a+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y+b)^2}}-\mu_1(y+b)\ln\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y+b)^2}}{x+a+\sqrt{(x+a)^2+\mu_1^2(y+b)^2}}+$$

$$+(x-a)\ln\frac{\mu_1(y-b)+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y-b)^2}}{\mu_1(y+b)+\sqrt{(x-a)^2+\mu_1^2(y+b)^2}}-(x+a)\ln\frac{\mu_1(y-b)+\sqrt{(x+a)^2+\mu_1^2(y-b)^2}}{\mu_1(y+b)+\sqrt{(x+a)^2+\mu_1^2(y+b)^2}}\Bigg].$$

Проведем численный расчет осадки w для некоторых анизотропных материалов.

Определим перемещение w точек равномерно загруженной квадратной области анизотропного полупространства. Расположим начало координат в центре квадрата, а оси x и y направим параллельно его сторонам.

Квадратная область границы полупространства, находящегося под действием нормального давления интенсивности p=const, ограничена прямыми $x=\pm 20$ см, $y=\pm 20$ см.

Для ортотропного тела при

E_1= 1.31E+04 МПа, E_2 = 1.79E+04 МПа, E_3 = 3.80E+03 МПа,
G_{23} = 3.48E+03 МПа, G_{13} = 2.98E+03 МПа, G_{12} = 6.54E+04 МПа,
ν_{12} = 0.146, ν_{23} = 0.4, ν_{31} = 0.1

получаем значения $w\cdot 10^3/p$:

x\y	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
-20	0,411	0,479	0,538	0,559	0,566	0,559	0,538	0,479	0,411
-15	0,492	0,624	0,678	0,705	0,713	0,705	0,678	0,624	0,492
-10	0,531	0,677	0,739	0,770	0,779	0,770	0,739	0,677	0,531
-5	0,551	0,703	0,769	0,803	0,813	0,803	0,769	0,703	0,551
0	0,557	0,711	0,779	0,813	0,823	0,813	0,779	0,711	0,557
5	0,551	0,703	0,769	0,803	0,813	0,803	0,769	0,703	0,551
10	0,531	0,677	0,739	0,770	0,779	0,770	0,739	0,677	0,531
15	0,492	0,624	0,678	0,705	0,713	0,705	0,678	0,624	0,492
20	0,411	0,497	0,538	0,559	0,566	0,559	0,538	0,497	0,411

Увеличим значения модули Юнга в два раза.

Для ортотропного тела при

E_1= 2.62E+04 МПа, E_2 = 3.58E+04 МПа, E_3 = 3.80E+03 МПа,
G_{23} = 6.70E+04 МПа, G_{13} = 5.95E+03 МПа, G_{12} = 1.31E+04 МПа,
ν_{12} = 0.146, ν_{23} = 0.4, ν_{31} = 0.1

получаем значения $w\cdot 10^3/p$:

x\y	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
-20	0,0069	0,0093	0,0090	0,0093	0,0094	0,0093	0,0090	0,0093	0,0069
-15	0,0082	0,0104	0,0113	0,0118	0,0118	0,0118	0,0113	0,0104	0,0082
-10	0,0088	0,0113	0,0123	0,0129	0,0130	0,0129	0,0123	0,0113	0,0088
-5	0,0092	0,0117	0,0129	0,0134	0,0136	0,0134	0,0129	0,0117	0,0092
0	0,0093	0,0119	0,0130	0,0136	0,0138	0,0136	0,0130	0,0119	0,0093
5	0,0092	0,0117	0,0129	0,0134	0,0136	0,0134	0,0129	0,0117	0,0092
10	0,0088	0,0113	0,0123	0,0129	0,0130	0,0129	0,0123	0,0113	0,0088
15	0,0082	0,0104	0,0113	00118	0,0118	00118	0,0113	0,0104	0,0082
20	0,0069	0,0093	0,0090	0,0093	0,0094	0,0093	0,0090	0,0093	0,0069

При увеличении в два раза модулей Юнга значительно уменьшились значения перемещения.

Для трансверсально-изотропного тела при

$E_1 = E_2$ =2.62E+04 МПа, E_3 =7.60E+03 МПа,
$G_{23} = G_{13}$ = 5.95E+03 МПа, G_{12} =1.09E+04 МПа,
ν_{12} = 0.2, ν_{23} = 0.345, ν_{31} = 0.1

получаем значения $w\cdot 10^3/p$:

x\y	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
-20	0,204	0,246	0,265	0,276	0,279	0,276	0,265	0,246	0,204
-15	0,246	0,310	0,336	0,350	0,354	0,350	0,336	0,310	0,246
-10	0,265	0,336	0,367	0,382	0,387	0,382	0,367	0,336	0,265
-5	0,276	0,350	0,382	0,399	0,404	0,399	0,382	0,350	0,276
0	0,290	0,354	0,387	0,404	0,409	0,404	0,387	0,354	0,290
5	0,276	0,350	0,382	0,399	0,404	0,399	0,382	0,350	0,276
10	0,265	0,336	0,367	0,382	0,387	0,382	0,367	0,336	0,265
15	0,246	0,310	0,336	0,350	0,354	0,350	0,336	0,310	0,246
20	0,204	0,246	0,265	0,276	0,279	0,276	0,265	0,246	0,204

Используя формулу (2) для нахождения перемещения изотропного полупространства при
E = 3.56E+04 МПа, G = 3.83E+03 МПа, n = 0.274
получаем значения $w \cdot 10^3 / p$:

x\y	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20
-20	0,213	0,256	0,276	0,287	0,290	0,287	0,276	0,256	0,213
-15	0,256	0,323	0,350	0,364	0,368	0,364	0,350	0,323	0,256
-10	0,276	0,350	0,382	0,398	0,403	0,398	0,382	0,350	0,276
-5	0,287	0,364	0,398	0,415	0,420	0,415	0,398	0,364	0,287
0	0,290	0,368	0,403	0,420	0,425	0,420	0,403	0,368	0,290
5	0,287	0,364	0,398	0,415	0,420	0,415	0,398	0,364	0,287
10	0,276	0,350	0,382	0,398	0,403	0,398	0,382	0,350	0,276
15	0,256	0,323	0,350	0,364	0,368	0,364	0,350	0,323	0,256
20	0,213	0,256	0,276	0,287	0,290	0,287	0,276	0,256	0,213

Из полученных результатов следует, что при увеличении значений E_i и G_i значения перемещения w уменьшается.

Максимальное значение w достигается в центре рассматриваемой области, а наименьшее — по контуру квадратной области. Значения w в угловых точках в два раза меньше, чем в центре области.

Для подтверждения полученных результатов рассмотрим решение краевой задачи методом, предложенным Лурье А.И.[1].

Перемещение в точках граничной области изотропного полупространства можно вычислить по формулам:

$$u = -\frac{\mathrm{m}-2}{4\pi \mathrm{m} G}\frac{\partial \omega_1(x,y,0)}{\partial x}, \quad v = -\frac{\mathrm{m}-2}{4\pi \mathrm{m} G}\frac{\partial \omega_1(x,y,0)}{\partial y},$$

$$w = -\frac{\mathrm{m}-2}{4\pi \mathrm{m} G}\frac{\partial \omega(x,y,0)}{\partial z},$$

где G — модуль сдвига,

m — число Пуассона(отношение относительного удлинения в направлении действия нагрузки к относительному укорочению поперечных размеров[1]),

$\omega(x,y,0)$, $\omega_1(x,y,0)$ — гармонические функции, обладающие характеристиками простого слоя.

В случае распределенной нагрузки интенсивности $p(x^?,y^?)$ в области Ω плоскости $z = 0$ функции $\omega(x,y,z)$ и $\omega_1(x,y,0)$ вычисляются по формулам

$$\omega(x,y,z) = \iint_\Omega p(x',y')\frac{dA}{R},$$

$$\omega_1(x,y,z) = \iint_\Omega p(x',y')\ln(R' + z)dA,$$

где dA — элемент площади,

$$R^{'} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z}$$

Запишем $\omega(x,y,0)$, в полярных координатах, приняв за начало координат точку M, находящуюся внутри области Ω

$$\omega(x,y,0) = p\int_0^{2\pi} r(\lambda)d\lambda$$

Если участок нагружения A представляет полигональную область, то его можно разбить на n треугольников $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_n$ с общей вершиной в точке $P(x,y,0)$, находящейся внутри загруженной области. Вычисление функции $\Omega(x,y,0)$ сведется к вычислению интегралов по площадям Ω_i полигонов и их последующему сложению. Каждый полигон-треугольник разбивается на два прямоугольных с общей вершиной в точке M и высотой h_i, опущенной из M на основание, и интеграл по W представится как сумма двух интегралов по полученным треугольникам (рис.).

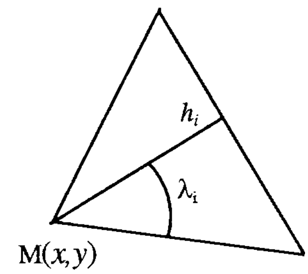


Рис. 1.

Таким образом, задача сводится к вычислению потенциала простого слоя постоянной плотности, распределенного по площади прямоугольного треугольника, в вершине острого угла которого l_0 расположена точка $M(x,y,0)$, а прилежащий к ней катет равен h.

При $z = 0$ имеем:

$$\omega(x,y,0) = \frac{ph}{2}\ln\frac{1+\sin\lambda_0}{1-\sin\lambda_0}.$$

Для полигональной области перемещение w находится по формуле:

$$w(x,y,0) = \frac{(m-1)p}{2\pi mG}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{2}\ln\frac{1+\sin\lambda_0}{1-\sin\lambda_0}. \qquad (3)$$

Этот метод применим только для изотропного полупространства. Полученные числовые значения осадки w для изотропного тела квадратной области при

$E = 3.56E+04$ МПа, $G = 3.83E+03$ МПа, $\nu = 0.274$, рассчитанные по формуле (3) совпадают со значениями, полученными по формуле (2).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. — 492 с.
2. Василевич Ю.В. Решение первой основной задачи для ортотропного полупространства. — Изв. АН БССР. — 1990, Сер. Физ.- мат. н., № 1.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1953 — 264 с.