ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ

Мартыненко И.М.

It is obtained general solution of the problem of waves propagation in cubic anisotropic bodies by means of Helmholtz equation solutions.

Получено общее представление решений задач об установившихся движениях в кубически анизотропных телах через решения уравнения Гельмгольца.

Будем рассматривать твердые тела, процессы деформирования в которых описываются следующим законом Гука [1]:

$$\sigma_{ii} = (A_{11} - A_{12})\varepsilon_{ii} + A_{12}\theta$$
$$\sigma_{ij} = 2A_{44}\varepsilon_{ij}, i \neq j = \overline{1,3} \quad (1)$$

Здесь

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \theta = \sum_{k=1}^{3}\partial_k u_k, \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, A_{ij} = const \quad (2)$$

Уравнения движения для таких тел при условии отсутствия массовых сил имеют вид:
где

$$\varepsilon = \frac{A_{11} - A_{12}}{A_{44}} - 2, \sigma = 1 + \frac{A_{12}}{A_{44}}, \Delta = \sum_{k=1}^{3}\partial_k^2, \ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \rho = const \quad (3)$$

$$(\Delta + \varepsilon\partial_i^2)u_i + \sigma\partial_i\theta = \rho\ddot{u}_i, i = \overline{1,3} \quad (4)$$

Для установившихся движений

$$u_i(x,t) = v_i(x)e^{ikt}$$

и поэтому (3) преобразуются к следующему виду:

$$(\Delta + \varepsilon\partial_i^2)v_i + \sigma\partial_i\sum_{k=1}^{3}\partial_k v_k + k^2 v_i = 0 \quad (5)$$

или в матричной форме:

$$M\bar{v} = 0 \quad (6)$$

где

$$M = \begin{Vmatrix} \Delta + (\varepsilon + \sigma)\partial_1^2 + k^2 & \sigma\partial_1\partial_2 & \sigma\partial_1\partial_3 \\ \sigma\partial_1\partial_2 & \Delta + (\varepsilon + \sigma)\partial_2^2 + k^2 & \sigma\partial_2\partial_3 \\ \sigma\partial_1\partial_3 & \sigma\partial_2\partial_3 & \Delta + (\varepsilon + \sigma)\partial_3^2 + k^2 \end{Vmatrix}, \bar{v} = \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Vmatrix} \quad (7)$$

Обозначим

$$F(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2) = \det M \quad (8)$$

Из (7) имеем:

$$F(\partial_1^2, \partial_2^2, \partial_3^2, k^2) = (\Delta + k^2)^3 + (\varepsilon + \sigma)f_1(\Delta + k^2)^2 + \varepsilon(\varepsilon + 2\sigma)f_2(\Delta + k^2) + \varepsilon^2(\varepsilon + 3\sigma)f_3 \equiv$$
$$\equiv (\Delta + k^2)^3 + \lambda f_1(\Delta + k^2)^2 + (\lambda^2 - \sigma^2)f_2(\Delta + k^2) + (\lambda - \sigma)^2(\lambda + 2\sigma)f_3$$

Здесь :

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = \varepsilon + \sigma = \frac{A_{11}}{A_{44}} - 1, \varepsilon = \lambda - \sigma, \varepsilon + 3\sigma = \lambda + 2\sigma \\ &f_1 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \Delta, f_2 = \partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^2\partial_3^2 + \partial_3^2\partial_1^2, f_3 = \partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2 \end{aligned}\right\}(10)$$

Положим

$$\Phi\left(\partial_1^2,\partial_2^2,\partial_3^2,k^2\right)=\begin{Vmatrix} \left(\Delta^*\right)^2+\lambda\Delta^*\left(\partial_2^2+\partial_3^2\right)+\left(\lambda^2-\sigma^2\right)\partial_2^2\partial_3^2 & -\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_3^2\right] & -\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_2^2\right] \\ -\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_3^2\right] & \left(\Delta^*\right)^2+\lambda\Delta^*\left(\partial_1^2+\partial_3^2\right)+\left(\lambda^2-\sigma^2\right)\partial_1^2\partial_3^2 & -\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_1^2\right] \\ -\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_2^2\right] & -\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_1^2\right] & \left(\Delta^*\right)^2+\lambda\Delta^*\left(\partial_1^2+\partial_2^2\right)+\left(\lambda^2-\sigma^2\right)\partial_1^2\partial_2^2 \end{Vmatrix} \quad (11)$$

где для краткости принято $\Delta^*=\Delta+k^2, \lambda=\varepsilon+\sigma$ (12)

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$M\Phi=FE \qquad (13),$$

где

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Из (13) вытекает, что если φ(x) является решением уравнения

$$F\left(\partial_1^2,\partial_2^2,\partial_3^2,k^2\right)\varphi(x)=0 \qquad (14),$$

то решениями (5) будут также вектор-функции

$$\left.\begin{aligned} v_1^{(1)}(x)&=\left[\left(\Delta^*\right)^2+\lambda\Delta*\left(\partial_2^2+\partial_3^2\right)+\left(\lambda^2-\sigma^2\right)\partial_2^2\partial_3^2\right]\varphi(x)\\ v_2^{(1)}(x)&=-\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_3^2\right]\varphi(x)\\ v_3^{(1)}(x)&=-\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_2^2\right]\varphi(x)\end{aligned}\right\}(15)$$

$$\left.\begin{aligned} v_1^{(2)}(x)&=-\sigma\partial_1\partial_2\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_3^2\right]\varphi(x)\\ v_2^{(2)}(x)&=\left[\left(\Delta^*\right)^2+\lambda\Delta*\left(\partial_1^2+\partial_3^2\right)+\left(\lambda^2-\sigma^2\right)\partial_1^2\partial_3^2\right]\varphi(x)\\ v_3^{(2)}(x)&=-\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_1^2\right]\varphi(x)\end{aligned}\right\}(16)$$

$$\left.\begin{aligned} v_1^{(3)}(x)&=-\sigma\partial_1\partial_3\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_2^2\right]\varphi(x)\\ v_2^{(3)}(x)&=-\sigma\partial_2\partial_3\left[\Delta^*+(\lambda-\sigma)\partial_1^2\right]\varphi(x)\\ v_3^{(3)}(x)&=\left[\left(\Delta^*\right)^2+\lambda\Delta*\left(\partial_1^2+\partial_2^2\right)+\left(\lambda^2-\sigma^2\right)\partial_1^2\partial_2^2\right]\varphi(x)\end{aligned}\right\}(17)$$

Решение уравнения (14) может быть выполнено с помощью разложения его на множители:

$$\begin{aligned} F\left(\partial_1^2,\partial_2^2,\partial_3^2,k^2\right)&=\left(\Delta+a\partial_1^2+b\partial_2^2+m\right)\times\\ &\times\left(\Delta+a\partial_2^2+b\partial_3^2+m\right)\left(\Delta+a\partial_3^2+b\partial_1^2+m\right), \end{aligned} \qquad (18)$$

где a,b,m — константы, которые определим из поточечного равенства правых частей (14) и (18).[2]. Так, например, имеем:

$$F\left(0,0,0,k^2\right)=\left(k^2\right)^3=m^3 \qquad (19)$$

Откуда $m=k^2e^{\frac{2\pi ni}{3}}, n=1,2,3$ (20)

Далее

$$\begin{aligned} F\left(1,1,-2,k^2\right)&=\left(k^2\right)^3-3\left(\lambda^2-\sigma^2\right)k^2-2(\lambda-\sigma)^2(\lambda+2\sigma)=\\ &=(a+b+m)(a-2b+m)(b-2a+m)\equiv\\ &\equiv m^3+m\left(3ab-3a^2-3b^2\right)+(a+b)(a-2b)(b-2a) \end{aligned} \qquad (21)$$

В силу (20) отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^2-\sigma^2=\left(a^2+b^2-ab\right)e^{2\pi n i/3}\\&-2\left(\lambda-\sigma\right)^2\left(\lambda+2\sigma\right)=\left(a+b\right)\left(a-2b\right)\left(b-2a\right)\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\left(a+b\right)^2=3ab+\left(\lambda^2-\sigma^2\right)e^{-\frac{2\pi n i}{3}}\\&\left(a+b\right)\left[9ab-2\left(a+b\right)^2\right]=-2\left(\lambda-\sigma\right)^2\left(\lambda+2\sigma\right)\end{aligned}\right\}\ (22)$$

После очевидных выкладок получим:

$$\left.\begin{aligned}&3ab=\left(a+b\right)^2-\left(\lambda^2-\sigma^2\right)e^{-\frac{2\pi n i}{3}}\\&\left(a+b\right)\left[\left(a+b\right)^2-3\left(\lambda^2-\sigma^2\right)e^{-\frac{2\pi n i}{3}}\right]=-2\left(\lambda-\sigma\right)^2\left(\lambda+2\sigma\right)\end{aligned}\right\}\ (23)$$

Обозначим:

a+b = t (24).

Тогда (22) принимает следующий вид:

$$3ab=t^2-\left(\lambda^2-\sigma^2\right)e^{-\frac{2\pi n i}{3}} \qquad (23)$$

$$t^3-3\left(\lambda^2-\sigma^2\right)e^{-\frac{2\pi n i}{3}}t+2\left(\lambda-\sigma\right)^2\left(\lambda+2\sigma\right)=0 \qquad (24)$$

Уравнение (24) решается непосредственно с помощью формул Кардано [3]:

$$\begin{aligned}t=&\sqrt[3]{-\left(\lambda-\sigma\right)^2\left(\lambda+2\sigma\right)+\left|\sigma\left(\lambda-\sigma\right)\right|\sqrt{\left(\sigma-\lambda\right)+\left(3\lambda+5\sigma\right)}}+\\&+\sqrt[3]{-\left(\lambda-\sigma\right)^2\left(\lambda+2\sigma\right)-\left|\sigma\left(\lambda-\sigma\right)\right|\sqrt{\left(\sigma-\lambda\right)\left(3\lambda+5\sigma\right)}}\end{aligned} \qquad (25)$$

Внося (25) в (23), найдем $ab=\frac{1}{3}\left[t^2-\left(\lambda^2-\sigma^2\right)e^{-\frac{2\pi n i}{3}}\right]$ (26).

Формулы (25) и (26) показывают, что a и b являются корнями квадратного уравнения

$$x^2-\left(a+b\right)x+ab=0 \qquad (27)$$

или

$$x^2-tx+\frac{1}{3}\left[t^2+\left(\lambda^2-\sigma^2\right)e^{-\frac{2\pi n i}{3}}\right]=0 \qquad (28)$$

Таким образом, приходим к следующему выражению для a и b:

$$\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\left\{t\pm\sqrt{\frac{4\left(\lambda^2-\sigma^2e^{-\frac{2\pi n i}{3}}\right)-t^2}{3}}\right\} \qquad (29),$$

где t определяется по формуле (25).

При известных a,b,m решение уравнения (14) представимо в таком виде[1]:

$$\varphi\left(x\right)=\varphi_\alpha\left(x\right)+\varphi_\beta\left(x\right)+\varphi_\gamma\left(x\right) \qquad (30),$$

где $\varphi_\alpha,\varphi_\beta,\varphi_\gamma$ являются решением уравнений:

$$\left(\Delta+a\partial_\alpha^2+b\partial_\beta^2+m\right)\varphi_\gamma\left(x\right)=0 \qquad (31)$$

Здесь (α,β,γ) являются циклической перестановкой чисел (1,2,3).

Уравнения (31) сводятся к стандартному уравнению Гельмгольца (Δ+m)φ = 0 с помощью замены [4]:

$$\xi_\alpha=\frac{x_\alpha}{\sqrt{1+a}},\xi_\beta=\frac{x_\beta}{\sqrt{1+b}},\xi_\gamma=x_\gamma \qquad (32)$$

В самом деле, из (32) имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\alpha}\frac{d\xi_\alpha}{dx_\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+a}}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\alpha};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha^2}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1+a}}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_\alpha^2}\frac{1}{1+a}$$

Поэтому (31) принимает вид:

$$\begin{aligned}&\left(\Delta+a\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}+b\frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2}+m\right)\varphi_\gamma=\\&=\left[(1+a)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}+(1+b)\frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\gamma^2}+m\right]\varphi_\gamma=\\&=\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_\beta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma^2}+m\right)\varphi_\gamma=\\&=(\Delta+m)\varphi_\gamma\left(\xi_\alpha,\xi_\beta,\xi_\gamma\right)=0\end{aligned}\tag{33}$$

Здесь

$$\varphi_\gamma\left(\xi_\alpha,\xi_\beta,\xi_\gamma\right)=\varphi_\gamma\left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{1+a}},\frac{x_\beta}{\sqrt{1+b}},x_\gamma\right)\tag{34}$$

С учетом вышесказанного общее решение уравнения (14), даваемое формулами (30)-(31), может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,x_2,x_3)=\varphi_\gamma&\left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{1+a}},\frac{x_\beta}{\sqrt{1+b}},x_\gamma\right)+\\+\varphi_\alpha\left(x_\alpha,\frac{x_\beta}{\sqrt{1+a}},\frac{x_\gamma}{\sqrt{1+b}}\right)&+\varphi_\beta\left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{1+a}},x_\beta,\frac{x_\gamma}{\sqrt{1+b}}\right)\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. В. Новацкий. Теория упругости. М., Мир, 1976.
2. В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин. Симметрия в алгебре. М., Наука, 1967.
3. В.И. Смирнов. Курс высшей математики. Т.1, М., Наука, 1962, с.479.
4. А.Ф. Бермант. Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина. М., Наука, 1958, с. 308.