ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМЫ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

Мартыненко Т.М.

Nonlinear integro-differential equation for determination of meridian of revolution's shell in which given external loading induce momentless state is derived. The formula for determination of surface of elastic supported ring is obtained.

Выведено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для определения формы меридиана оболочки вращения, при которой заданная внешняя нагрузка не вызывает изменения кривизны и кручения срединной поверхности. Получена формула для определения площади упругого подкрепляющего кольца.

Рассматривается упругая оболочка вращения, ограниченная плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, и деформируемая осcиметрической нагрузкой, действующей по поверхности и краям оболочки. Требуется определить форму меридиана и опорного кольца, при которой заданная внешняя нагрузка не вызывает в оболочке моментных напряжений.

Согласно безмоментной теории оболочек определение усилий в оболочке вращения, нагруженной симметрично относительно оси вращения, сводится к решению системы уравнений [1,2]

$$\frac{d}{d\varphi}(rN_\varphi) - r_1 N_\theta \cos\varphi + q_\varphi r r_1 = 0 \qquad (1)$$
$$rN_\varphi + r_1 N_\theta \sin\varphi + q_n r r_1 = 0$$

После очевидных преобразований система (1) принимает вид

$$\frac{d}{d\varphi}(r\sin\varphi N_\varphi) + (q_n\cos\varphi + q_\varphi \sin\varphi) r r_1 = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + q_n = 0$$

Радиусы кривизны меридиана r_1 и срединной поверхности r_2 в плоскости, перпендикулярной к меридиану, связаны с радиусом оболочки r (параллельного круга) и углом φ, образованным нормалью $\vec{n}$ к срединной поверхности и осью вращения, следующими формулами [1,2]:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\sin\varphi}{dr}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\sin\varphi}{r}, \qquad (3)$$

Введя обозначение

$$\eta = \operatorname{cosec}\varphi \qquad (4)$$

Получаем решение системы (2) в виде

$$N_\varphi = \frac{1}{r}\left[C - \int_{r_0}^{r}\left(q_n + \frac{q_\varphi}{\sqrt{\eta^2-1}}\right) r\,dr\right]\eta, \qquad (5)$$

$$N_\theta = -q_n r\eta + \left[C - \int_{r_0}^{r}\left(q_n + \frac{q_\varphi}{\sqrt{\eta^2-1}}\right) r\,dr\right]\frac{d\eta}{dr},$$

где C — постоянная интегрирования, r_0 — радиус начальной окружности оболочки вращения. Если этот край оболочки загружен равномерно распределенной по параллели нагрузкой с интенсивностью $q = const$ параллельно оси вращения, из первого уравнения (5) имеем [2]

$$C = -r_0 q \qquad (6)$$

Если $r_0 = 0$ (нет выреза), то $q = 0$ и $C = 0$

Для вывода разрешающего уравнения задачи воспользуемся уравнением совместности (неразрывности) деформаций, которое в рассматриваемом случае линейных деформаций и изотропных тел имеет вид [2]:

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) = \varepsilon_\varphi. \qquad (7)$$

Преобразуя (7) с помощью закона Гука

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh}(N_\theta - \nu N_\varphi), \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh}(N_\varphi - \nu N_\theta), \qquad (8)$$

из (7) и (8) при $E,\ \nu = const;\ h = h(r)$, находим

$$N_\varphi - \nu N_\theta = h\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{h}(N_\theta - \nu N_\varphi)\right]. \qquad (9)$$

При учете (5) из (9) следует нелинейное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\eta = \operatorname{cosec}\varphi$

$$\begin{aligned}
&r^2\left[C - \int_{r_0}^{r}\left(q_n + \frac{q_\varphi}{\sqrt{\eta^2-1}}\right) r\,dr\right]\frac{d^2\eta}{dr^2} + \\
&+ r\Big[-2q_n r^2 - \frac{q_\varphi r^2}{\sqrt{\eta^2-1}} + \frac{h - h'r}{h}C - \\
&- \frac{h-h'r}{h}\int_{r_0}^{r}\left(q_n + \frac{q_\varphi}{\sqrt{\eta^2-1}}\right)\Big] r\,dr\frac{d\eta}{dr} + \\
&+ \Big[r^3\frac{dq_n}{dr} - \frac{2h - h'r}{h}q_n r^2 + \frac{\nu q_\varphi r^2}{\sqrt{\eta^2-1}} - \\
&- \frac{h - h'r\nu}{h}C + \frac{h-h'r}{h}\int_{r_0}^{r}\left(q_n + \frac{q_\varphi}{\sqrt{\eta^2-1}}\right)\Big] r\,dr\,\eta = 0
\end{aligned} \qquad (10)$$

где $h' = \frac{dh}{dr}$. Искомая форма меридиана $r = r(x)$ определяется из уравнения

$$\frac{dr}{dx} = \sqrt{\eta^2 - 1} \tag{11}$$

где x — расстояние вдоль оси вращения.

Решение уравнения (10) является функцией r, т.е. $\eta = \eta(r)$, уравнение (12) допускает разделение переменных:

$$x = x_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \tag{12}$$

где (x_0, r_0) — координаты начальной точки меридиана.

Другой вариант разрешающей системы уравнений можно получить, используя условия равновесия для части оболочки, расположенной над параллельной окружностью. В этом случае исходная система уравнений записывается так [2]

$$\begin{aligned} &2\pi r N_\varphi \sin\varphi + R = 0 \\ &N_\varphi r + r_1 \sin\varphi N_\theta + q_n r r_1 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь R — проекция главного вектора полной нагрузки, приложенной к вышеупомянутой части оболочки, на ось вращения.

Решение системы уравнений (13) имеет вид

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{R\eta}{2\pi r} \\ N_\theta &= -\frac{\eta}{r_1}\left[q_n r r_1 - \frac{2R\eta}{2\pi}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) и (9) получаем уравнение для определения $\eta = \eta(r)$. Искомую форму меридиана находим при подстановке этой функции в (12).

Формулы (11) – (14) обеспечивают безизгибную форму меридиана и, естественно, безизгибное напряженное состояние оболочки в ее главной части, т.к. напряжения изгиба могут появиться в окрестности границы. Этого можно избежать, подкрепляя оболочку круглыми кольцами подходящими жесткостями. Параметры такого кольца определяются из условий равенства окружных деформаций кольца и оболочки и равновесия элемента кольца

$$\varepsilon'_\theta = \varepsilon_\theta; \quad S\sigma'_\theta \pm h\sigma_\varphi r\cos\varphi = 0 \tag{15}$$

Здесь ε'_θ и σ'_θ – деформация и напряжение в кольце, S — площадь его поперечного сечения. Для простоты будем считать, что оболочка и кольцо выполнены из одного материала. Тогда (15) в силу закона Гука принимает следующий вид:

$$\sigma'_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi; \quad S\sigma'_\theta \pm h\sigma_\varphi r\cos\varphi = 0,$$

Откуда получаем

$$S = \mp\frac{h\sigma_\varphi r\cos\varphi}{\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi} \tag{16}$$

или

$$S = \mp\frac{hN_\varphi r\cos\varphi}{N_\theta - N\sigma_\varphi}$$

Здесь знак «+» или «-» выбирается из условия $S > 0$.

Выражение (16) при отрицательном значении дроби в его правой части может быть использовано для определения площади поперечного сечения внешнего граничного кольца, а при положительном – площади внутреннего кольца.

Обозначения.

x - расстояние вдоль оси вращения оболочки; r — радиус оболочки; h — толщина; φ — угол между нормалью к оболочке и осью вращения; $\eta = \operatorname{cosec}\varphi$; r_1 и r_2 — радиусы кривизны меридиана и сечения в плоскости, перпендикулярной к меридиану; θ — полярный угол; $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\theta$ и $N_\varphi, N_\theta, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ — деформации и усилия в меридианной плоскости и в плоскости перпендикулярной к меридиану; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, q_n и q_φ — нормальная и касательная компоненты нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Horne M.R. Shells with zero bending stress, J. Mech. Phys. Solids, 1954, 2, №2 p. 117.
2. Тимошенко С.П., Войновский- Кригер С., Пластинки и оболочки, М., Наука.