ТОНКОСТЕННЫЕ ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ С ЧИСТОМОМЕНТНЫМ НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ

Мартыненко Т.М.

Выведено уравнение для определения формы срединной поверхности оболочки из условия, что заданная внешняя нагрузка вызывает в ней чистомоментное напряженно-деформированное состояние.

Чистомоментное напряженное состояния является одним из основных в теории упругих оболочек. Оно характеризуется тем, что чистомоментное напряженно-деформированное состояние вызывает только изменение кривизны и кручение срединной поверхности оболочки, в то время как чисто безмоментное напряженно-деформированное состояние характеризуется отсутствием изменения кривизны и кручения срединной поверхности [1,2]. Поэтому

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \gamma_{12} = 0; \tag{1}$$

или, в силу соотношений упругости [1]

$$T_1 = T_2 = S = 0; \; T_{12} = \frac{H}{R_2}; \; T_{21} = \frac{H}{R_1} \tag{2}$$

В этом случае разрешающая система уравнений в рамках теории пологих оболочек Кирхгофа — Лява примет следующий вид [1]:

Условия совместности деформаций:

$$A = B = 1; \; \frac{\partial\chi_1}{\partial\beta} - \frac{\partial\chi_{12}}{\partial\alpha} = 0; \; \frac{\partial\chi_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial\chi_{12}}{\partial\beta} = 0;$$

$$\frac{\chi_1}{R_2} + \frac{\chi_2}{R_1} = 0; \tag{3}$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H}{R_1}\right) + \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = 0; \; \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{H}{R_2}\right) + \frac{Q_2}{R_2} + q_2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H}{R_1}\right) + \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = 0; \; \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{H}{R_2}\right) + \frac{Q_2}{R_2} + q_2 = 0;$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial\beta} + q_3 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\beta} - Q_1 = 0; \; \frac{\partial M_2}{\partial\beta} + \frac{\partial H}{\partial\alpha} - Q_2 = 0; \tag{5}$$

Соотношения упругости (закон Гука):

$$M_1 = D(\chi_1 + \mu\chi_2); \; M_2 = D(\chi_2 + \mu\chi_1);$$

$$M_{12} = M_{21} = H = D(1-\mu)\chi_{12};$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = const \tag{6}$$

Внося (5) в (4), получим следующие формулы для уравнения равновесия:

$$\frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} + 2\frac{\partial H}{\partial\beta}\right) + q_1 = 0;$$

$$\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial M_2}{\partial\beta} + 2\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right) + q_2 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial M_2}{\partial\beta} + \frac{\partial H}{\partial\alpha}\right) + q_3 = 0 \tag{7}$$

Из (6) имеем:

$$\chi_1 = \frac{1}{D(1-\mu^2)}(M_1 - \mu M_2);$$

$$\chi_2 = \frac{1}{D(1-\mu^2)}(M_2 - \mu M_1); \; \chi_{12} = \frac{H}{D(1-\mu)} \tag{8}$$

Поэтому условия совместности деформаций (3) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(M_2 - \mu M_1) = (1+\mu)\frac{\partial H}{\partial\beta};$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(M_1 - \mu M_2) = (1+\mu)\frac{\partial H}{\partial\alpha};$$

$$M_1\left(\frac{1}{R_2} - \frac{\mu}{R_1}\right) + M_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{\mu}{R_2}\right) = 0 \tag{9}$$

Перепишем (7) так

$$\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\beta} = -R_1 q_1 - \frac{\partial H}{\partial\beta};$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial\beta} + \frac{\partial H}{\partial\alpha} = -R_2 q_2 - \frac{\partial H}{\partial\alpha};$$

$$2\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\partial\beta} = q_3 - \frac{\partial}{\partial\alpha}(R_1 q_1) - \frac{\partial}{\partial\beta}(R_2 q_2) \tag{10}$$

Последнее уравнение (10) дает такое представление для $H(\alpha:\beta)$;

$$2H(\alpha;\beta) = f(\alpha) + g(\beta) + \int_0^\alpha\int_0^\beta \left(q_3 - \frac{\partial}{\partial\alpha}(R_1 q_1) - \frac{\partial}{\partial\beta}(R_2 q_2)\right)d\alpha d\beta \tag{11}$$

где $f(\alpha) = 2H(\alpha;0) - g(0)$, $g(\beta) = 2H(0;\beta) - f(0)$

Кроме того, из первых двух уравнений (10) и (9) вытекает:

$$\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} = -R_1 q_1 - 2\frac{\partial H}{\partial\beta}; \; \frac{\partial M_2}{\partial\beta} = -R_2 q_2 - 2\frac{\partial H}{\partial\alpha} \tag{12}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \beta} = (1+\mu)\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \mu\frac{\partial M_2}{\partial \beta};$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \alpha} = (1+\mu)\frac{\partial H}{\partial \beta} + \mu\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} \qquad (13)$$

Если

$$-\frac{\partial}{\partial \beta}(R_1 q_1 + 2\frac{\partial H}{\partial \beta}) = \frac{\partial}{\partial \alpha}((1+\mu)\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \mu(R_2 q_2 + 2\frac{\partial H}{\partial \alpha})) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial \alpha}((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \mu R_2 q_2) \qquad ;$$

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha}(R_2 q_2 + 2\frac{\partial H}{\partial \alpha}) = \frac{\partial}{\partial \beta}((1+\mu)\frac{\partial H}{\partial \beta} - \mu(R_1 q_1 + 2\frac{\partial H}{\partial \beta})) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial \beta}((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial \beta} - \mu R_1 q_1)$$

то:

$$M_1(\alpha;\beta) = \int_{M_0 M} (\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial M_1}{\partial \beta} d\beta) \quad ;$$

$$M_2(\alpha;\beta) = \int_{M_0 M} (\frac{\partial M_2}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial M_2}{\partial \beta} d\beta)$$

и поэтому:

$$M_1(\alpha;\beta) = \int_{M_0 M} ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \mu R_2 q_2) d\beta - (R_1 q_1 + 2\frac{\partial H}{\partial \beta}) d\alpha$$

$$M_2(\alpha;\beta) = \int_{M_0 M} ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial \beta} - \mu R_1 q_1) d\alpha - (R_2 q_2 + 2\frac{\partial H}{\partial \alpha}) d\beta \quad (14)$$

здесь $H(\alpha,\beta)$ определяется формулой (11).

Внесем (14) в третье уравнение условий совместности деформаций (9), получим интегро-дифференцированное уравнение для нахождения срединной поверхности оболочки:

$$(\frac{1}{R_1} - \frac{\mu}{R_2}) \int_{M_0 M} ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial \beta} - \mu R_1 q_1) d\alpha - (R_2 q_2 + 2\frac{\partial H}{\partial \alpha}) d\beta$$

$$+(\frac{1}{R_2} - \frac{\mu}{R_1}) \int_{M_0 M} (-(R_1 q_1 + 2\frac{\partial H}{\partial \beta})) d\alpha + ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \mu R_2 q_2)) d\beta = 0 \quad (15)$$

Для произвольной срединной пологой поверхности оболочки, заданной уравнением:

$$z = f(x,y) \qquad (16)$$

пологость которой определяется условиями:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ll 1; \ \frac{\partial f}{\partial y} \ll 1; \ A \approx B \approx 1; \chi = \frac{\pi}{2} \qquad (17)$$

имеем [1]

$$\frac{1}{R_1} \approx -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \ \frac{1}{R_2} \approx -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \ \frac{1}{R_{12}} \approx -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad (18)$$

Для пологой поверхности переноса, задаваемой уравнением:

$$z = \varphi(x) + \psi(y) \qquad (19)$$

и условиями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \ll 1; \ \frac{\partial \psi}{\partial y} \ll 1 \qquad (20)$$

имеем [1]:

$$A \approx B = 1; \ \frac{1}{R_1} \approx -\varphi''(x); \ \frac{1}{R_2} \approx -\psi''(y); \ \frac{1}{R_{12}} = 0 \qquad (21)$$

Поэтому (16) представляет искомое интегро-дифференцированное уравнение для определения безмоментной формы срединной поверхности оболочек. Это уравнение упрощается для оболочек с нулевой гауссовой, кривизной срединной поверхности, для которых $k = \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} = 0$, то есть или $\frac{1}{R_1} = 0$, или $\frac{1}{R_2} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бидерман В.Л., Механика тонкостенных конструкций, М., Машиностроение.-1977г.
2. Огибалов М.П., Колтунов М.А., Оболочки и пластины, М., Издательство МГУ, 1969 г.
3. Гольденвейзер А.Л., Теория упругих тонких оболочек, М., ГИТТЛ, 1953г.
4. Гольденвейзер А.Л., Теория упругих тонких оболочек, издание 2 , М., Наука, 1976г